



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques

2017

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie 0 : Étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$

1. Pour montrer qu'un point n'est pas extrémal, on l'écrit comme le milieu de deux points distincts de l'ensemble.

Soit $a \in]0, 1[$. Posons $h = \frac{1}{2} \min(a, 1 - a) > 0$, $x = a - h$ et $y = a + h$. On a $0 < x < a < y < 1$, donc $x, y \in A$, et $\frac{x + y}{2} = a$ avec $x \neq y$. Ainsi, aucun point de $]0, 1[$ n'est extrémal.

2. Soient $x, y \in [0, 1]$. Si $\frac{x + y}{2} = 0$, alors $x + y = 0$; la positivité de x et y entraîne $x = y = 0$. Ainsi, 0 est extrémal.

Si $\frac{x + y}{2} = 1$, alors $(1 - x) + (1 - y) = 0$. Les deux termes sont positifs ou nuls, donc $x = y = 1$. Ainsi, 1 est extrémal.

Pour chaque $a \in]0, 1[$, la construction de la question 1 fournit deux points distincts de $[0, 1]$ dont le milieu est a . Les points extrémaux de $[0, 1]$ sont donc exactement 0 et 1.

Partie I : Étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$

- 3.a. Pour tout $\alpha \in [0, 1]$, le calcul coefficient par coefficient donne :

$$\alpha I_2 + (1 - \alpha)J = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & \alpha \end{pmatrix} = M_\alpha.$$

En faisant parcourir $[0, 1]$ à α , on obtient exactement A_2 . Remarquons aussi que $M_\alpha = M_\beta$ entraîne $\alpha = \beta$, en comparant les coefficients en position $(1, 1)$.

- 3.b. La dépendance affine en α donne :

$$\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = M_{(\alpha+\beta)/2}.$$

Comme $0 \leq (\alpha + \beta)/2 \leq 1$, cette matrice appartient à A_2 .

3.c. Méthode 1 — Construction explicite de l'inverse.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, les colonnes sont égales. Plus précisément, $M_{1/2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$: cette matrice n'est pas inversible.

Pour $\alpha \neq \frac{1}{2}$, posons

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de $M_\alpha B_\alpha$ valent $\alpha^2 - (1 - \alpha)^2 = 2\alpha - 1$; les autres valent $\alpha(\alpha - 1) + (1 - \alpha)\alpha = 0$. Le même calcul donne $B_\alpha M_\alpha = (2\alpha - 1)I_2$. Ainsi :

$$M_\alpha^{-1} = \frac{1}{2\alpha - 1} \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - 1 \\ \alpha - 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ses lignes et ses colonnes ont pour somme 1. Elle appartient donc à A_2 si et seulement si ses coefficients sont positifs ou nuls. Pour $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, le coefficient diagonal $\frac{\alpha}{2\alpha - 1}$ est négatif dès que $\alpha > 0$; pour $\alpha = 0$, l'inverse est J . Pour $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, le coefficient hors diagonale $\frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1}$ est négatif dès que $\alpha < 1$; pour $\alpha = 1$, l'inverse est I_2 .

Conclusion

M_α est inversible exactement lorsque $\alpha \neq \frac{1}{2}$, et son inverse appartient à A_2 exactement lorsque $\alpha \in \{0, 1\}$.

Méthode 2 — Résolution dans une base adaptée.

Les vecteurs $v_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont libres : les égalités $av_+ + bv_- = 0$ donnent

$a + b = a - b = 0$, donc $a = b = 0$. Ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Le calcul direct donne $M_\alpha v_+ = v_+$ et $M_\alpha v_- = (2\alpha - 1)v_-$. Ainsi, l'application représentée est bijective si et seulement si $2\alpha - 1 \neq 0$.

Si elle est bijective, l'inverse fixe v_+ et multiplie v_- par $\frac{1}{2\alpha - 1}$. Pour une matrice de la forme M_β , ces multiplicateurs seraient 1 et $2\beta - 1$. On doit donc avoir :

$$\beta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2\alpha - 1} \right) = \frac{\alpha}{2\alpha - 1}.$$

L'inverse est la matrice $\begin{pmatrix} \beta & 1 - \beta \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}$, ce qui redonne la formule précédente. Si

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$, alors $\beta < 0$; si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, alors $\beta > 1$; aux bornes, $\beta = 0$ ou 1. On retrouve la même conclusion. La première méthode vérifie une formule par multiplication; la seconde explique la singularité par l'action sur deux directions indépendantes.

4.a. Méthode 1 — Lecture des coefficients.

Supposons $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = I_2$, avec $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Le coefficient diagonal donne $\alpha + \beta = 2$. Puisque chaque terme est au plus 1, $\alpha = \beta = 1$; les deux matrices sont donc I_2 .

Supposons $\frac{1}{2}(M_\alpha + M_\beta) = J$. Le coefficient diagonal donne $\alpha + \beta = 0$. La positivité entraîne $\alpha = \beta = 0$; les deux matrices sont donc J . Ainsi, I_2 et J sont extrémaux.

Méthode 2 — Transfert de l'exemple réel.

L'application $T : [0, 1] \rightarrow A_2, \alpha \mapsto M_\alpha$, est bijective d'après 3.a et préserve les milieux d'après 3.b. Une égalité $T(a) = \frac{1}{2}(T(x) + T(y))$ équivaut donc à $a = \frac{x+y}{2}$. Les points extrémaux de $[0, 1]$ étant 0 et 1, ceux de A_2 sont $T(0) = J$ et $T(1) = I_2$. Cette approche met en évidence que le segment matriciel a la même structure affine que le segment réel ; les questions suivantes en donnent des décompositions explicites.

4.b. Pour $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$, $2\alpha \in]0, 1]$, donc $M_{2\alpha} \in A_2$. Comme $J = M_0$, la question 3.b donne :

$$\frac{1}{2}(M_{2\alpha} + J) = M_\alpha.$$

Les deux matrices sont distinctes, car $2\alpha \neq 0$. Ainsi, M_α n'est pas extrémal, y compris pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

4.c. Pour $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, $2\alpha - 1 \in [0, 1[$. On a :

$$M_\alpha = \frac{1}{2}(M_{2\alpha-1} + I_2).$$

Les deux matrices appartiennent à A_2 et sont distinctes puisque $2\alpha - 1 < 1$. Ainsi, M_α n'est pas extrémal. Les questions 4.a à 4.c établissent que les seuls points extrémaux de A_2 sont I_2 et J .

5.a. On résout

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

avec $(x, y) \neq (0, 0)$. Les équations sont $y = \lambda x$ et $x = \lambda y$. Si $x = 0$, alors $y = 0$, ce qui est exclu ; donc $x \neq 0$ et $\lambda^2 = 1$.

Pour $\lambda = 1, y = x$, donc

$$E_1(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Pour $\lambda = -1, y = -x$, donc

$$E_{-1}(J) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Les valeurs propres sont exactement 1 et -1 .

5.b. Les deux vecteurs de 5.a forment une base. Choisissons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}P,$$

la formule de l'inverse étant vérifiée par $P^2 = 2I_2$.

Comme $M_\alpha = \alpha I_2 + (1 - \alpha)J$, cette matrice multiplie v_+ par 1 et v_- par $2\alpha - 1$. Ainsi :

$$P^{-1}M_\alpha P = D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}.$$

Le choix de P est indépendant de α , ce qui réalise la réduction simultanée demandée.

5.c. Méthode 1 — Utilisation de la matrice diagonale.

L'endomorphisme u_α est un projecteur si et seulement si $M_\alpha^2 = M_\alpha$, ou encore $D_\alpha^2 = D_\alpha$.

Cela équivaut à $(2\alpha - 1)^2 = 2\alpha - 1$, donc $2\alpha - 1 \in \{0, 1\}$.

Les seules valeurs sont $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = 1$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, $u_{1/2}(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right)$, donc $\text{Im}(u_{1/2}) = \text{Vect}((1, 1))$ et $\text{Ker}(u_{1/2}) = \text{Vect}((1, -1))$.

Pour $\alpha = 1$, u_1 est l'identité : $\text{Im}(u_1) = \mathbb{R}^2$ et $\text{Ker}(u_1) = \{0\}$.

Méthode 2 — Calcul direct avec $J^2 = I_2$.

Le produit J^2 vaut I_2 . En développant M_α^2 puis en soustrayant M_α , on obtient :

$$M_\alpha^2 - M_\alpha = (2\alpha^2 - 3\alpha + 1)(I_2 - J) = (2\alpha - 1)(\alpha - 1)(I_2 - J).$$

La matrice $I_2 - J$ étant non nulle, l'égalité $M_\alpha^2 = M_\alpha$ équivaut à $\alpha \in \{\frac{1}{2}, 1\}$. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'image est constituée des couples égaux et le noyau des couples de somme nulle, par la formule $u_{1/2}(x, y) = \frac{x+y}{2}(1, 1)$. Pour $\alpha = 1$, l'application est l'identité. On retrouve les images et noyaux précédents. Le calcul direct évite tout changement de base ; la première méthode réutilise efficacement la réduction déjà obtenue.

Partie II : Points extrémaux et diamètre d'une partie bornée d'un espace euclidien

6. Comme $A \neq \emptyset$, choisissons $v_0 \in A$. La distance $\|v_0 - v_0\| = 0$ appartient à l'ensemble considéré : celui-ci n'est pas vide.

Pour tous $v, w \in A$, l'inégalité triangulaire donne $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq 2R$. L'ensemble est donc majoré par $2R$. Le théorème de la borne supérieure assure l'existence de $\delta(A)$, avec $0 \leq \delta(A) \leq 2R$.

7.a. Notons $D = \delta(A) = \|a - b\|$. Puisque $a = \frac{c+d}{2}$, $a - b = \frac{1}{2}((c-b) + (d-b))$. L'inégalité triangulaire et la définition du diamètre donnent :

$$D \leq \frac{1}{2}(\|c - b\| + \|d - b\|) \leq \frac{1}{2}(D + D) = D.$$

Il y a donc égalité partout. Les nombres $\|c - b\|$ et $\|d - b\|$ sont chacun au plus D et leur somme vaut $2D$. Ils sont donc tous deux égaux à D .

7.b. On écrit $c - b = (c - a) + (a - b)$. La bilinéarité et la symétrie du produit scalaire donnent :

$$\|c - b\|^2 = \|c - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle c - a | a - b \rangle.$$

D'après 7.a, $\|c - b\|^2 = \|a - b\|^2 = D^2$. En soustrayant ce terme, on obtient $\|c - a\|^2 = -2\langle c - a | a - b \rangle$.

7.c. On écrit $d - b = (d - a) + (a - b)$ et on développe :

$$\|d - b\|^2 = \|d - a\|^2 + \|a - b\|^2 + 2\langle d - a | a - b \rangle.$$

Les deux distances $\|d - b\|$ et $\|a - b\|$ valent D d'après 7.a. Ainsi,

$$\|d - a\|^2 = -2\langle d - a | a - b \rangle.$$

7.d. L'égalité $c + d = 2a$ donne $d - a = -(c - a)$, donc $\|d - a\|^2 = \|c - a\|^2$. En soustrayant les égalités de 7.b et 7.c, on obtient :

$$0 = -2\langle (c - a) - (d - a) | a - b \rangle = -2\langle c - d | a - b \rangle.$$

Ainsi, $c - d$ et $a - b$ sont orthogonaux.

7.e. Méthode 1 — Conclusion à partir de l'orthogonalité.

Comme $c - a = \frac{1}{2}(c - d)$, la question 7.d implique $\langle c - a | a - b \rangle = 0$. La question 7.b donne alors $\|c - a\|^2 = 0$. Une norme est nulle uniquement sur le vecteur nul, donc $c = a$. Puis $d = 2a - c = a$.

Pour tout couple $(c, d) \in A^2$ dont le milieu est a , on a ainsi $c = d = a$: a est extrémal. Le même argument en échangeant a et b montre que b est également extrémal. Aucune division par D n'a été effectuée, donc la preuve couvre aussi $D = 0$.

Méthode 2 — Identité quadratique du milieu.

Cette méthode donne une preuve directe du résultat de la partie II. Posons $h = c - a$, de sorte que $d - a = -h$. En développant les deux carrés de normes, les termes croisés se compensent :

$$\|c - b\|^2 + \|d - b\|^2 = \|(a - b) + h\|^2 + \|(a - b) - h\|^2 = 2\|a - b\|^2 + 2\|h\|^2.$$

Les deux distances à gauche sont au plus D , alors que $\|a - b\| = D$. Il vient $2D^2 + 2\|h\|^2 \leq 2D^2$, donc $h = 0$. Ainsi, $c = d = a$ et a est extrémal. Cette seconde preuve évite les étapes d'orthogonalité mais établit explicitement l'identité qu'elle utilise ; la première suit la progression imposée par l'énoncé.

Partie III : Étude de l'ensemble des matrices bistochastiques et de ses points extrémaux

8.a. Posons $B = \frac{1}{2}(M + M')$. Ses coefficients $b_{i,j} = \frac{1}{2}(m_{i,j} + m'_{i,j})$ sont positifs ou nuls. Pour chaque ligne i ,

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1.$$

Pour chaque colonne j ,

$$\sum_{i=1}^n b_{i,j} = 1$$

de la même façon. Ainsi, $B \in A_n$.

La transposée ${}^tM$ a des coefficients positifs ou nuls. Ses sommes de lignes sont les sommes de colonnes de M , et ses sommes de colonnes sont les sommes de lignes de M ; elles valent donc toutes 1. Ainsi, ${}^tM \in A_n$.

8.b. La composante d'indice i de MX_0 est

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Toutes les composantes valent donc 1, ce qui donne $MX_0 = X_0$.

8.c. L'égalité $MX_0 = X_0$ signifie que, pour tout i ,

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1.$$

L'égalité $({}^tM)X_0 = X_0$ signifie que, pour tout j ,

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} = 1.$$

Avec la positivité des coefficients donnée dans l'énoncé, ce sont exactement les trois conditions définissant A_n . Ainsi, $M \in A_n$.

8.d. Méthode 1 — Utilisation de X_0 .

Les coefficients du produit $B = MM'$ sont

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} m'_{k,j} \geq 0.$$

D'après 8.b, $BX_0 = M(M'X_0) = MX_0 = X_0$.

D'après 8.a, ${}^tM$ et ${}^tM'$ appartiennent à A_n . Ainsi :

$$({}^tB)X_0 = ({}^tM')({}^tM)X_0 = ({}^tM')X_0 = X_0.$$

La caractérisation de 8.c donne $MM' \in A_n$.

Méthode 2 — Calcul direct des sommes.

Les coefficients $b_{i,j}$ sont positifs ou nuls comme ci-dessus. Pour chaque ligne i , les sommes étant finies, on peut changer l'ordre de sommation :

$$\sum_{j=1}^n b_{i,j} = \sum_{k=1}^n m_{i,k} \left(\sum_{j=1}^n m'_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^n m_{i,k} = 1.$$

Pour chaque colonne j :

$$\sum_{i=1}^n b_{i,j} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,k} \right) m'_{k,j} = \sum_{k=1}^n m'_{k,j} = 1.$$

Donc $B \in A_n$. La première méthode condense les sommes dans deux identités matricielles ; la seconde montre directement pourquoi le produit conserve les contraintes.

9.a. Si σ est l'identité, alors $f_\sigma(e_j) = e_j$ pour chaque vecteur de la base canonique. Par linéarité, $f_\sigma = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$ et $M_\sigma = I_n$.

9.b. La colonne d'indice j de M_σ est $e_{\sigma(j)}$. Ses coefficients sont donc :

$$(M_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Chaque colonne contient exactement un coefficient égal à 1. Puisque σ est bijective, pour chaque ligne i , il existe exactement un indice $j = \sigma^{-1}(i)$ tel que $i = \sigma(j)$. Chaque ligne contient donc aussi exactement un coefficient égal à 1. Les autres coefficients étant nuls, $M_\sigma \in A_n$.

Le coefficient (i, j) de ${}^t M_\sigma$ vaut 1 si et seulement si $j = \sigma(i)$, c'est-à-dire $i = \sigma^{-1}(j)$. Il est donc celui de $M_{\sigma^{-1}}$. Ainsi, ${}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$ et la permutation cherchée est $\tau = \sigma^{-1}$.

Cette permutation est unique : la colonne j d'une matrice de permutation détermine l'indice $\tau(j)$.

9.c. Pour chaque $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_j) = f_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} = f_{\sigma \circ \sigma'}(e_j).$$

Les deux applications linéaires coïncident sur une base, donc $f_\sigma \circ f_{\sigma'} = f_{\sigma \circ \sigma'}$. En passant aux matrices dans la même base, $M_\sigma M_{\sigma'} = M_{\sigma \circ \sigma'}$.

En prenant $\sigma' = \sigma^{-1}$, puis en échangeant les deux permutations, on obtient $M_\sigma M_{\sigma^{-1}} = M_{\sigma^{-1}} M_\sigma = I_n$. Donc M_σ est inversible et $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$.

9.d. Question adaptée au programme actuel : la propriété demandée est formulée par une égalité entre inverse et transposée.

Méthode 1 — Réutilisation des deux questions précédentes.

D'après 9.b, ${}^t M_\sigma = M_{\sigma^{-1}}$. D'après 9.c, $M_\sigma^{-1} = M_{\sigma^{-1}}$. Ainsi, $M_\sigma^{-1} = {}^t M_\sigma$, puis ${}^t M_\sigma M_\sigma = I_n$.

Méthode 2 — Produit scalaire des colonnes.

Les colonnes de M_σ sont les vecteurs $e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}$. La bijectivité de σ et

l'orthonormalité de la base canonique donnent :

$$({}^t M_\sigma M_\sigma)_{j,k} = \langle e_{\sigma(j)} | e_{\sigma(k)} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc ${}^t M_\sigma M_\sigma = I_n$. L'inversibilité étant établie en 9.c, ${}^t M_\sigma = M_\sigma^{-1}$. La première méthode utilise la permutation inverse ; la seconde relie l'identité matricielle au changement d'ordre d'une base orthonormale.

9.e. Le sens direct a été établi en 9.b : toute matrice M_σ a exactement un 1 par ligne et par colonne, tous ses autres coefficients étant nuls.

Réciproquement, soit B une matrice ayant cette propriété. Pour chaque colonne j , notons $\sigma(j)$ l'indice de son unique coefficient égal à 1. Si $\sigma(j) = \sigma(k)$, la ligne correspondante contiendrait deux coefficients égaux à 1 à moins que $j = k$. Ainsi, σ est injective. Une application injective d'un ensemble fini dans lui-même est bijective, donc $\sigma \in S_n$.

La colonne j de B est $e_{\sigma(j)}$, d'où $B = M_\sigma$. La caractérisation est démontrée dans les deux sens.

10. Soient $U = (u_{i,j})$ et $V = (v_{i,j})$ dans A_n tels que $\frac{1}{2}(U + V) = M_\sigma$.

Si $i \neq \sigma(j)$, le coefficient correspondant de M_σ est nul, donc $u_{i,j} + v_{i,j} = 0$. Les deux coefficients étant positifs ou nuls, $u_{i,j} = v_{i,j} = 0$.

Pour chaque colonne j , tous les coefficients de U et V sont donc nuls sauf éventuellement celui de la ligne $\sigma(j)$. Comme les sommes des colonnes valent 1, $u_{\sigma(j),j} = v_{\sigma(j),j} = 1$. Ainsi, $U = V = M_\sigma$. Chaque matrice de permutation est donc extrémale dans A_n .

11.a. L'application φ_τ a pour réciproque $\varphi_{\tau^{-1}}$, car $\tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma) = \sigma$ et $\tau \circ (\tau^{-1} \circ \sigma) = \sigma$. Elle est donc bijective sur S_n .

En utilisant 9.c et en réindexant une somme finie par cette bijection :

$$f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_\tau \circ f_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} f_{\tau \circ \sigma} = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in S_n} f_\rho = p.$$

11.b. La question précédente s'applique à chaque permutation τ . Par linéarité de la composition :

$$p \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} f_\tau \circ p = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in S_n} p = p.$$

La dernière somme comporte $n!$ termes. L'endomorphisme p vérifie $p^2 = p$: c'est un projecteur.

11.c. Notons $G = \{x \in \mathbb{R}^n; \forall \sigma \in S_n, f_\sigma(x) = x\}$.

Si $x \in \text{Im}(p)$, il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = p(y)$. Pour chaque σ , 11.a donne $f_\sigma(x) = (f_\sigma \circ p)(y) = p(y) = x$. Donc $\text{Im}(p) \subset G$.

Réciproquement, si $x \in G$, alors

$$p(x) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x = x.$$

Ainsi, x est l'image de lui-même par p , donc $x \in \text{Im}(p)$. On conclut $\text{Im}(p) = G$.

11.d. Toute permutation réordonne les vecteurs de la base, donc

$$f_\sigma(x_0) = \sum_{i=1}^n e_{\sigma(i)} = \sum_{i=1}^n e_i = x_0.$$

Par linéarité, $\text{Vect}(x_0) \subset G$.

Inversement, soit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in G.$$

Pour chaque $j \in \{2, \dots, n\}$, choisissons la permutation qui échange 1 et j et fixe tous les autres indices. L'égalité $f_\sigma(x) = x$ entraîne $x_1 = x_j$. Toutes les coordonnées de x sont donc égales et $x = x_1 x_0$.

D'après 11.c, $\text{Im}(p) = G = \text{Vect}(x_0)$.

11.e. Méthode 1 — Symétrie et projection orthogonale.

La transposition est linéaire. D'après 9.b, puis par réindexation à l'aide de la bijection $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ de S_n :

$${}^tP = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} {}^tM_\sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} M_{\sigma^{-1}} = P.$$

Dans la base canonique orthonormale, P est symétrique. Le projecteur p est donc orthogonal. Il projette sur la droite engendrée par x_0 , d'après 11.d. La formule de projection sur une droite donne, pour $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$p(x) = \frac{\langle x | x_0 \rangle}{\langle x_0 | x_0 \rangle} x_0 = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} x_0,$$

car $\|x_0\|^2 = n > 0$. En particulier, $p(e_j) = \frac{1}{n} x_0$ pour chaque j . Ainsi :

$$P = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Son image est $\text{Vect}(x_0)$ et son noyau est

$$\{x \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 0\} = \text{Vect}(x_0)^\perp.$$

Méthode 2 — Dénombrement des coefficients.

Fixons $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Le coefficient (i, j) de M_σ vaut 1 exactement lorsque $\sigma(j) = i$. Une fois cette image fixée, σ doit choisir une bijection entre les $n - 1$ indices restants et les $n - 1$ images restantes : il existe $(n - 1)!$ choix.

Donc $P_{i,j} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Cela donne directement la matrice ci-dessus, qui est symétrique : ${}^tP = P$. Comme $p^2 = p$ par 11.b, c'est un projecteur orthogonal. La première méthode détermine la projection à partir de son image ; la seconde calcule sa moyenne par dénombrement.

11.f. Tous les coefficients de P valent $\frac{1}{n} > 0$. Chaque ligne et chaque colonne comporte n de ces coefficients, donc a pour somme 1. Ainsi, $P \in A_n$.

12.a. Par définition du produit matriciel, le coefficient diagonal d'indice j de ${}^tMN$ vaut

$$\sum_{i=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

La trace est la somme des coefficients diagonaux, donc :

$$\text{Tr}({}^tMN) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{i,j} n_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} n_{i,j}.$$

12.b. La formule de 12.a montre directement la bilinéarité et la symétrie de $(M, N) \mapsto \text{Tr}({}^tMN)$.

Pour toute matrice M ,

$$\text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i,j} m_{i,j}^2 \geq 0.$$

Si cette somme finie de termes positifs ou nuls vaut zéro, chaque $m_{i,j}^2$ est nul, donc $M = 0$. Réciproquement, elle vaut zéro pour la matrice nulle.

L'application est donc un produit scalaire réel sur $M_n(\mathbb{R})$. La norme associée est

$$\|M\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2}.$$

12.c. Méthode 1 — Comptage des coefficients.

Une matrice de permutation possède exactement n coefficients égaux à 1 et les autres nuls. D'après 12.b, $\|M_\sigma\|_2^2 = n$, donc $\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{n}$.

Méthode 2 — Utilisation de l'identité de 9.d.

On a ${}^t M_\sigma M_\sigma = I_n$. Ainsi, $\|M_\sigma\|_2^2 = \text{Tr}(I_n) = n$ et $\|M_\sigma\|_2 = \sqrt{n}$. La première méthode lit la norme sur les coefficients; la seconde utilise la représentation par la trace.

12.d. Le calcul de la différence donne :

$$M_\alpha - M_\beta = (\alpha - \beta) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il y a quatre coefficients dont le carré vaut $(\alpha - \beta)^2$, donc $\|M_\alpha - M_\beta\|_2 = 2|\alpha - \beta| \leq 2$.

Cette borne est atteinte pour $\alpha = 1, \beta = 0$, c'est-à-dire pour I_2 et J . Ainsi, $\delta(A_2) = 2$.

12.e. Pour $M \in A_n$, chaque coefficient vérifie $0 \leq m_{i,j} \leq 1$, car il est positif ou nul et appartient à une ligne de somme 1. Donc $m_{i,j}^2 \leq m_{i,j}$.

En sommant ces inégalités :

$$\|M\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j}^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n 1 = n.$$

Ainsi, A_n est une partie non vide, puisque $I_n \in A_n$, et bornée de l'espace euclidien E muni du produit scalaire de 12.b. Son diamètre est bien défini.

12.f. Le produit scalaire de deux matrices de A_n est positif ou nul, car

$$(M | N) = \sum_{i,j} m_{i,j} n_{i,j}$$

et tous les coefficients sont positifs ou nuls.

Le développement du carré de la norme donne :

$$\|M - N\|_2^2 = \|M\|_2^2 + \|N\|_2^2 - 2(M | N) \leq n + n = 2n.$$

En prenant les racines carrées de nombres positifs ou nuls, $\|M - N\|_2 \leq \sqrt{2n}$.

12.g. Soit ρ la permutation cyclique définie par $\rho(j) = j + 1$ si $j < n$, et $\rho(n) = 1$. Puisque $n \geq 2$, elle n'a aucun indice fixe. Posons $\tau = \sigma \circ \rho$, qui est une permutation.

Pour chaque j , l'injectivité de σ et $\rho(j) \neq j$ donnent $\tau(j) = \sigma(\rho(j)) \neq \sigma(j)$. Dans la colonne j , les coefficients égaux à 1 de M_σ et M_τ sont donc sur deux lignes différentes.

Par la formule de 12.a, leur produit scalaire est nul : $(M_\sigma | M_\tau) = 0$.

12.h. La question 12.f donne $\delta(A_n) \leq \sqrt{2n}$. Pour toute permutation σ , choisissons τ comme en 12.g. Les questions 12.c et 12.g donnent :

$$\|M_\sigma - M_\tau\|_2^2 = n + n - 0 = 2n.$$

Ainsi, la borne est atteinte et $\delta(A_n) = \sqrt{2n}$.

Pour chaque M_σ , il existe donc une matrice $M_\tau \in A_n$ telle que la distance entre les deux soit le diamètre. L'espace E est euclidien de dimension n^2 non nulle et A_n est non vide et borné d'après 12.e. Toutes les hypothèses de la partie II sont satisfaites. Celle-ci montre alors que M_σ est extrémal. On retrouve le résultat de 10.

13.a. La matrice nulle appartient à F_n . Soient $U, V \in F_n$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour chaque ligne i :

$$\sum_{j=1}^n (au_{i,j} + bv_{i,j}) = a \sum_{j=1}^n u_{i,j} + b \sum_{j=1}^n v_{i,j} = 0.$$

Le même calcul pour chaque colonne donne une somme nulle. Ainsi, $aU + bV \in F_n$.
C'est donc un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$.

13.b. Méthode 1 — Construction explicite de l'isomorphisme inverse.

L'application Φ est linéaire, car elle conserve les coefficients du bloc supérieur gauche et cette extraction commute aux combinaisons linéaires.

Soit $M \in F_n$. Les sommes nulles de ses lignes et colonnes imposent :

$$\forall i < n, \quad m_{i,n} = - \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}, \quad \forall j < n, \quad m_{n,j} = - \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,j}.$$

Enfin, la somme de la dernière ligne impose :

$$m_{n,n} = - \sum_{j=1}^{n-1} m_{n,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} m_{i,j}.$$

La somme de la dernière colonne donne exactement la même expression.

Si $\Phi(M) = 0$, toutes ces formules donnent $M = 0$. Le noyau de Φ est donc nul : Φ est injective.

Pour la surjectivité, soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Construisons M en fixant $m_{i,j} = b_{i,j}$ pour $i, j < n$, puis

$$m_{i,n} = - \sum_{j < n} b_{i,j}$$

pour $i < n$,

$$m_{n,j} = - \sum_{i < n} b_{i,j}$$

pour $j < n$, et

$$m_{n,n} = \sum_{i < n} \sum_{j < n} b_{i,j}.$$

Les $n - 1$ premières lignes et colonnes ont des sommes nulles par construction. La dernière ligne a pour somme

$$- \sum_{j < n} \sum_{i < n} b_{i,j} + \sum_{i < n} \sum_{j < n} b_{i,j} = 0;$$

la dernière colonne a également une somme nulle. Donc $M \in F_n$ et $\Phi(M) = B$.

Ainsi, Φ est un isomorphisme et $\dim F_n = \dim M_{n-1}(\mathbb{R}) = (n - 1)^2$.

Méthode 2 — Une base adaptée aux contraintes.

Pour $1 \leq i, j < n$, posons $B_{i,j} = E_{i,j} - E_{i,n} - E_{n,j} + E_{n,n}$. La ligne i et la ligne n de cette matrice ont chacune une somme nulle ; il en va de même des colonnes j et n . Les autres lignes et colonnes sont nulles. Donc $B_{i,j} \in F_n$.

Si

$$\sum_{i,j < n} a_{i,j} B_{i,j} = 0,$$

la lecture du bloc supérieur gauche donne $a_{i,j} = 0$ pour chaque $i, j < n$. La famille est libre.

Pour $M \in F_n$, posons

$$L = M - \sum_{i,j < n} m_{i,j} B_{i,j}.$$

Alors $L \in F_n$ et son bloc supérieur gauche est nul. Pour $i < n$, sa somme de ligne impose $l_{i,n} = 0$; pour $j < n$, sa somme de colonne impose $l_{n,j} = 0$; enfin la dernière somme de ligne impose $l_{n,n} = 0$. Donc $L = 0$ et la famille est génératrice.

Les $(n-1)^2$ matrices $B_{i,j}$ forment une base de F_n . Leurs images par Φ sont les matrices élémentaires de $M_{n-1}(\mathbb{R})$, qui en forment une base. La linéarité de Φ et cette correspondance de bases montrent qu'elle est un isomorphisme. On retrouve $\dim F_n = (n-1)^2$. Cette seconde méthode fournit une base explicite, tandis que la première décrit comment compléter un bloc quelconque.

14.a. Pour relier la définition générale à la partie I, soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in A_2$. La somme de sa première ligne donne $b = 1 - a$; celle de sa première colonne donne $c = 1 - a$; celle de sa deuxième ligne donne $d = a$. La positivité impose $a \in [0, 1]$. Ainsi, les matrices bistochastiques d'ordre 2 sont exactement les M_α de la partie I.

D'après 4.a à 4.c, leurs seuls points extrémaux sont I_2 et J , qui sont les deux matrices de permutation d'ordre 2. La proposition $(\mathcal{P}_2)$ est donc vraie.

Pour l'hérédité, on fixe maintenant $n \geq 3$, on suppose $(\mathcal{P}_{n-1})$ vraie et on considère un point extrémal $M \in A_n$.

14.b. On raisonne sous l'hypothèse que M possède au moins $2n$ coefficients non nuls. Les positions (i_k, j_k) choisies sont distinctes. Les $2n$ matrices élémentaires correspondantes sont libres : dans une combinaison linéaire nulle, la lecture de chaque position choisie impose la nullité du coefficient associé. Donc $\dim H = 2n$.

Par la formule de dimension d'une somme de sous-espaces et par 13.b :

$$\dim(H \cap F_n) = \dim H + \dim F_n - \dim(H + F_n) \geq 2n + (n-1)^2 - n^2 = 1.$$

On a utilisé $H + F_n \subset M_n(\mathbb{R})$, dont la dimension est n^2 . Ainsi, $H \cap F_n \neq \{0\}$.

14.c. Comme $N \in H$, ses coefficients sont nuls hors des $2n$ positions choisies. À ces positions, les coefficients de M sont strictement positifs : ils sont non nuls et $M \in A_n$.

Posons $a = \min_{1 \leq k \leq 2n} m_{i_k, j_k} > 0$ et $b = \max_{1 \leq k \leq 2n} |n_{i_k, j_k}|$. Puisque $N \neq 0$ et que son support est contenu dans ces positions, $b > 0$. Prenons $\varepsilon = \frac{a}{2b} > 0$.

Si $|t| < \varepsilon$, à chaque position choisie :

$$m_{i_k, j_k} + tn_{i_k, j_k} \geq a - |t|b > a - \varepsilon b = \frac{a}{2} > 0.$$

Hors de ces positions, le coefficient de Q_t est celui de M , donc est positif ou nul. Tous les coefficients de Q_t sont donc positifs ou nuls.

Comme $N \in F_n$, ses sommes de lignes et de colonnes sont nulles. Pour chaque ligne i ,

$$\sum_{j=1}^n (m_{i,j} + tn_{i,j}) = 1 + t \cdot 0 = 1;$$

pour chaque colonne j ,

$$\sum_{i=1}^n (m_{i,j} + tn_{i,j}) = 1.$$

Ainsi, $Q_t \in A_n$ pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

14.d. Question adaptée au programme actuel : le choix $t \neq 0$ est explicité pour garantir que la décomposition contredit l'extrémalité.

Choisissons par exemple $t = \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $t \neq 0$ et $|t| < \varepsilon$, donc $Q_t, Q_{-t} \in A_n$ d'après 14.c. Or :

$$\frac{Q_t + Q_{-t}}{2} = \frac{(M + tN) + (M - tN)}{2} = M.$$

L'extrémalité de M imposerait $Q_t = Q_{-t} = M$. Mais $Q_t - Q_{-t} = 2tN \neq 0$, car $t \neq 0$ et $N \neq 0$. On obtient une contradiction.

L'hypothèse d'au moins $2n$ coefficients non nuls est donc impossible. Toute matrice extrémale $M \in A_n$ possède au plus $2n - 1$ coefficients non nuls.

14.e. Chaque colonne possède au moins un coefficient non nul, puisque sa somme vaut 1. Si chacune des n colonnes en possédait au moins deux, M aurait au moins $2n$ coefficients non nuls, contrairement à 14.d.

Il existe donc une colonne s ayant exactement un coefficient non nul, situé sur une ligne r . Sa somme vaut 1, donc ce coefficient vaut $m_{r,s} = 1$. Tous les autres coefficients de cette colonne sont nuls.

14.f. La somme de la ligne r vaut 1 et $m_{r,s} = 1$. Ainsi,

$$\sum_{j \neq s} m_{r,j} = 0.$$

Tous ces termes sont positifs ou nuls, donc $m_{r,j} = 0$ pour chaque $j \neq s$.

La ligne r et la colonne s ont donc comme unique coefficient non nul le coefficient $m_{r,s} = 1$.

14.g. Les coefficients de M' sont positifs ou nuls. Pour chaque ligne restante, supprimer la colonne s supprime un coefficient nul, puisque $m_{i,s} = 0$ pour $i \neq r$. Sa somme reste donc égale à 1. Pour chaque colonne restante, supprimer la ligne r supprime également un coefficient nul, puisque $m_{r,j} = 0$ pour $j \neq s$. Sa somme reste égale à 1. Ainsi, $M' \in A_{n-1}$.

Pour montrer l'extrémalité de M' , supposons $M' = \frac{1}{2}(U' + V')$ avec $U', V' \in A_{n-1}$. Reconstruisons deux matrices U, V d'ordre n : on insère la ligne d'indice r et la colonne d'indice s , avec le coefficient 1 à leur intersection et des zéros ailleurs sur cette ligne et cette colonne. Les autres coefficients sont ceux de U' et V' respectivement, dans l'ordre des indices conservés.

Ces matrices ont des coefficients positifs ou nuls. Leurs nouvelles ligne et colonne ont pour somme 1 ; les autres sommes restent celles de U' et V' , donc valent aussi 1. Ainsi,

$U, V \in A_n$.

Dans le bloc des indices conservés, $\frac{1}{2}(U + V)$ coïncide avec M' ; sur la ligne r et la colonne s , elle coïncide avec M . Donc $M = \frac{1}{2}(U + V)$.

L'extrémalité de M entraîne $U = V = M$. En supprimant la ligne r et la colonne s , on obtient $U' = V' = M'$. Ainsi, M' est un point extrémal de A_{n-1} .

14.h. L'hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}_{n-1}$) s'applique à M' , qui est extrémale dans A_{n-1} d'après 14.g. Donc M' est une matrice de permutation : chaque ligne et chaque colonne de M' contient exactement un coefficient égal à 1, les autres étant nuls.

Pour reconstruire M , on ajoute à ces lignes et colonnes un coefficient nul à la position supprimée. On ajoute aussi la ligne r et la colonne s , dont l'unique coefficient non nul est le 1 en position (r, s) . Ainsi, chaque ligne et chaque colonne de M contient exactement un 1, les autres coefficients étant nuls.

D'après 9.e, M est une matrice de permutation. L'hérédité est démontrée ; avec 14.a, la récurrence établit ($\mathcal{P}_n$) pour tout entier $n \geq 2$.

La question 10 avait établi la réciproque. En conclusion, pour tout $n \geq 2$, les points extrémaux de A_n sont exactement les matrices de permutation.

Relevé des adaptations

- 9.d : la demande relative aux matrices orthogonales est reformulée par ${}^t M_\sigma M_\sigma = I_n$, ou $M_\sigma^{-1} = {}^t M_\sigma$. Cette formulation conserve l'objectif de la question et permet une preuve élémentaire par les colonnes d'une base orthonormale ou par la permutation inverse, sans supposer une théorie supplémentaire des matrices orthogonales.
- 14.d : le choix $t \neq 0$ est ajouté explicitement. Le choix $t = 0$, inclus dans l'intervalle du PDF, donnerait $Q_t = Q_{-t} = M$ et ne produirait aucune contradiction. L'exclusion de zéro précise le raisonnement sans modifier ses autres hypothèses ni son objectif.