



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques 1

1999

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Ce problème étudie différents modèles de propagation, au cours du temps, d'une information au sein d'une population contenant N individus, où N est un entier naturel strictement supérieur à 3. On désigne par $t \geq 0$ la variable représentant le temps. À l'instant initial $t = 0$, une seule personne est informée. Lorsqu'une personne est informée, elle le reste indéfiniment.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel. Pour tout réel x , $[x]$ désigne sa partie entière, c'est-à-dire l'unique entier relatif k tel que $k \leq x < k + 1$. La fonction $\ln$ est le logarithme népérien. La partie II est indépendante de la partie I.

Partie I. Propagation déterministe

A. Premier modèle de propagation

Soit $C > 0$. On considère un intervalle de temps Δ tel que $0 < \Delta < 1/C$, ainsi que les instants $n\Delta$. On note $u_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1}(\Delta) - u_n(\Delta) = C\Delta(1 - u_n(\Delta)). \quad (1)$$

On pose $u_0(\Delta) = 1/N$.

1. Déterminer l'expression de $u_n(\Delta)$ et la valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(\Delta)$.

2. Soit $t > 0$ fixé. Le rapport $\frac{t}{\Delta}$ sera également noté t/Δ .

(a) Comparer $[t/\Delta]\Delta$ et $([t/\Delta] + 1)\Delta$. Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \Delta[t/\Delta]$.

(b) Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} u_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

3. On suppose que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant $t \geq 0$ par $f(t)$, où f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f'(t) = C(1 - f(t)).$$

En considérant la fonction $t \mapsto e^{Ct} f(t)$, déterminer f sachant que $f(0) = 1/N$.

B. Deuxième modèle de propagation

On désigne toujours par $C > 0$ une constante. On considère $0 < \Delta < 1/C$ et les instants $n\Delta$. On note $v_n(\Delta)$ la proportion de personnes informées à l'instant $n\Delta$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1}(\Delta) - v_n(\Delta) = C\Delta v_n(\Delta)(1 - v_n(\Delta)). \quad (2)$$

On pose $v_0(\Delta) = 1/N$.

1. Montrer que la suite $(v_n(\Delta))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[1/N, 1[$, étudier sa convergence et déterminer sa limite éventuelle.

2. On se propose d'étudier la rapidité de diffusion de l'information.

(a)

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - v_{n+1}(\Delta) \leq (1 - v_n(\Delta)) \left(1 - \frac{C\Delta}{N}\right).$$

- En déduire que la série de terme général $1 - v_n(\Delta)$ est convergente.

(b) On pose $x_n = \frac{1 - v_n(\Delta)}{(1 - C\Delta)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la série de terme général $\ln(x_{n+1}) - \ln(x_n)$ est convergente. On note s sa somme.

(c) En déduire qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que

$$1 - v_n(\Delta) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \mu(1 - C\Delta)^n.$$

On explicitera μ en fonction de s et de N .

3. (a) On pose $y_n = \frac{v_n(\Delta)}{(1 - v_n(\Delta))(1 + C\Delta)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = 1 + \frac{C^2 \Delta^2 v_n(\Delta)}{(1 + C\Delta)(1 - C\Delta v_n(\Delta))}.$$

(b)

- Comparer, en justifiant la réponse, $\ln(1 + u)$ et u pour tout réel $u > -1$.
- Soit $q \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\ln \left(\frac{(N - 1)v_q(\Delta)}{(1 - v_q(\Delta))(1 + C\Delta)^q} \right) \leq q \frac{C^2 \Delta^2}{1 - C\Delta}.$$

(c) Soit $t > 0$. Déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} v_{[t/\Delta]}(\Delta)$.

4. On suppose que la proportion de personnes informées est définie à chaque instant $t \geq 0$ par $h(t)$, où h est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad h'(t) = Ch(t)(1 - h(t)).$$

En considérant la fonction $H(t) = 1/h(t)$, déterminer $h(t)$ pour tout $t \geq 0$, sachant que $h(0) = 1/N$.

Partie II. Propagation probabiliste

Dans les modèles précédents, chaque intervalle de temps Δ apportait de façon certaine un lot de personnes nouvellement informées. On suppose maintenant que, pendant un tel intervalle, une seule personne supplémentaire est susceptible d'être informée. La probabilité qu'elle le soit est proportionnelle au produit de Δ , du nombre de personnes déjà informées et du nombre de personnes non encore informées.

Ainsi, conditionnellement au fait qu'il reste r personnes non informées à l'instant $n\Delta$, il en reste $r - 1$ à l'instant $(n + 1)\Delta$ avec la probabilité $\beta\Delta r(N - r)$, où $\beta > 0$ est une constante. Sinon, leur nombre reste égal à r .

Dans les modèles discrets, on choisit $\Delta > 0$ de sorte que $\beta\Delta r(N - r) \leq 1$ pour tout $r \in \{0, \dots, N - 1\}$. Lorsqu'il ne reste aucune personne non informée, cet état est conservé.

A. Une formule dans le cas discret

On note $P_n(\Delta, r)$ la probabilité qu'à l'instant $n\Delta$ il reste exactement r personnes non informées. Ainsi $P_0(\Delta, N - 1) = 1$. On pose $P_n(\Delta, r) = 0$ lorsque $r \notin \{0, \dots, N - 1\}$.

Montrer la relation suivante :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \{0, \dots, N - 1\}, \quad P_{n+1}(\Delta, r) &= P_n(\Delta, r)(1 - \beta\Delta r(N - r)) \\ &+ P_n(\Delta, r + 1)\beta\Delta(r + 1)(N - r - 1). \end{aligned} \quad (3)$$

B. Étude d'un premier cas discret

On suppose dans cette sous-partie que $N = 4$, $\Delta = 1$ et $0 < \beta < 1/4$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n = \begin{pmatrix} P_n(1, 0) \\ P_n(1, 1) \\ P_n(1, 2) \\ P_n(1, 3) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice T telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = TU_n$.
2. (a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de T .
(b) Déterminer trois réels y, z, t tels que

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (1 - 3\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) En déduire qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que $T = PSP^{-1}$, où

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 4\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 3\beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 3\beta \end{pmatrix}.$$

On ne demande pas le calcul explicite de P^{-1} .

(d) Pour tout entier $n \geq 1$, calculer S^n en fonction de n et de β .

3. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, on note $(A)_{i,j}$ son coefficient situé sur la i -ième ligne et la j -ième colonne.

On dit qu'une suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ converge vers M lorsque, pour tout $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4\}^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n)_{i,j} = (M)_{i,j}$.

On utilisera sans le démontrer le résultat suivant : si $M_n \rightarrow M$, alors $M_n A \rightarrow MA$ et $BM_n \rightarrow BM$, pour toute matrice A ayant quatre lignes et toute matrice B ayant quatre colonnes.

Montrer que $(T^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que sa limite, notée T_∞ , est de la forme

$$T_\infty = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. On considère la matrice ligne $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer LT^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire T_∞ .

5. Pour $r \in \{0, 1, 2, 3\}$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(1, r)$ en fonction de r .

C. Étude du cas discret général

On suppose dans cette sous-partie que $0 < \Delta < \frac{4}{\beta N^2}$ et on rappelle que $N \geq 4$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_n = \begin{pmatrix} P_n(\Delta, 0) \\ \vdots \\ P_n(\Delta, N-1) \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice R telle que $\forall n \in \mathbb{N}, W_{n+1} = RW_n$.
2. En Python, les constantes beta , N et Delta sont fixées par l'utilisateur, avec $\beta > 0$, $N \geq 4$ et $0 < \Delta < 4/(\beta N^2)$. Un vecteur de $\mathbb{R}^N$ est représenté par un tableau NumPy V à une dimension, de longueur N , contenant des nombres flottants. L'indice Python r représente l'état où il reste r personnes non informées.

Python

```
import numpy as np
```

```
beta = ...
```

```
N = ...
```

```
Delta = ...
```

- (a) Écrire une fonction Python `Calcul1(V)` qui modifie le tableau V sur place pour qu'il contienne le résultat du produit RV .
- (b) Écrire une fonction Python `Calcul2(V, i)`, pour un entier i positif ou nul, qui modifie V sur place pour qu'il contienne W_i . Cette fonction pourra utiliser la précédente.

Dans la suite de cette sous-partie, on pose $\rho = 1 - \beta\Delta(N-1)$.

3. Calculer $P_n(\Delta, N-1)$ en fonction de n et de ρ .
4. (a) On considère une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et trois réels a, b, q vérifiant

$$0 < a < q, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} \leq av_n + bq^n.$$

Montrer qu'il existe un réel A tel que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq Aq^n$.

(b) On considère une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et trois réels a, b, q vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + bq^n.$$

On suppose $a \neq 0$ et $a \neq q$. En considérant, pour tout entier $n \geq 1$, la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{a^{k+1}} - \frac{u_k}{a^k} \right),$$

déterminer u_n en fonction de u_0, n, a, b, q .

On utilise la convention $q^0 = 1$, y compris si $q = 0$.

(c) Faire le tableau de variation de $x \mapsto x(N - x)$ sur $[0, N]$.

5. Déterminer $P_n(\Delta, N - 2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que

$$\forall r \in \{2, \dots, N - 1\}, \exists A_r \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, P_n(\Delta, r) \leq A_r \rho^n.$$

7. (a) Étudier la convergence de $(P_n(\Delta, 0))_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(\Delta, r)$ pour $r \in \{0, \dots, N - 1\}$.

8. Pour $t > 0$, déterminer $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N - 1)$ et $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} P_{[t/\Delta]}(\Delta, N - 2)$.

D. Étude du cas continu

On suppose que la probabilité qu'il reste r personnes non informées à l'instant $t \geq 0$ est donnée par $F_r(t)$. Les fonctions $F_0, \dots, F_N$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et vérifient

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F_N(t) = 0, \quad F_{N-1}(0) = 1, \quad \forall r \in \{0, \dots, N-2\}, \quad F_r(0) = 0,$$

$$\forall r \in \{0, \dots, N-1\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad F'_r(t) = \beta(r+1)(N-1-r)F_{r+1}(t) - \beta r(N-r)F_r(t).$$

Le but est d'expliciter certaines des fonctions F_r .

1. On étudie une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I , telle qu'il existe des réels a, q, b vérifiant $\forall t \in I, f'(t) = -af(t) + be^{-qt}$. On suppose $a \neq q$.

En considérant $t \mapsto e^{at}f(t)$, déterminer la forme de f .

2. Déterminer F_{N-1} et F_{N-2} .