



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2022

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Questions préliminaires

Question adaptée au programme actuel : le préambule explicite les achats indépendants et la distribution uniforme des types, nécessaires aux calculs de lois qui suivent.

On fixe $n \geq 1$. Les lois géométriques utilisées sont définies sur $\mathbb{N}^*$; une géométrique de paramètre 1 est constante égale à 1.

1. (a)

La définition $X_i = C_i - C_{i-1}$ permet une sommation télescopique :

$$\sum_{i=1}^n X_i = \sum_{i=1}^n (C_i - C_{i-1}) = C_n - C_0 = C_n.$$

Ainsi, $C_n = X_1 + \dots + X_n$.

1. (b)

Après l'obtention de $i - 1$ types distincts, il reste $n - i + 1$ types nouveaux. Chaque achat indépendant a donc la probabilité de succès :

$$p_i = \frac{n - i + 1}{n}.$$

Si $i \geq 2$, pour obtenir un premier type nouveau au k -ième achat supplémentaire, il faut $k - 1$ échecs puis un succès. Quel que soit l'ensemble des types déjà collectés, sa taille vaut $i - 1$, et cette probabilité est :

$$\forall k \geq 1, \quad P(X_i = k) = (1 - p_i)^{k-1} p_i.$$

Donc $X_i \sim \mathcal{G}(p_i)$. Question adaptée au programme actuel : pour $i = 1$, $p_1 = 1$ et $X_1 = 1$, ce qui correspond bien à la convention annoncée.

Partie I

2. (a)

Pour $k \geq 2$, tous les dénominateurs suivants sont strictement positifs :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}.$$

Or $k(k-1) \leq k^2 \leq k(k+1)$. Le passage aux inverses renverse ces inégalités et donne l'encadrement demandé.

2. (b)

On somme l'encadrement de 2. (a) de $k = 2$ à $k = n$. Les deux sommes extérieures sont télescopiques :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}.$$

En ajoutant le terme de rang 1, égal à 1, on obtient :

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

2. (c)

Méthode 1 — Convergence monotone.

Pour tout $n \geq 1$, $S_{n+1} - S_n = 1/(n+1)^2 > 0$. La suite est croissante et majorée par 2 d'après 2. (b), avec $S_1 = 1$. Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel S . En passant à la limite dans 2. (b) :

$$\frac{3}{2} \leq S \leq 2.$$

Méthode 2 — Série de référence.

La série de Riemann

$$\sum_{k \geq 1} 1/k^2$$

converge puisque son exposant vaut $2 > 1$. Ses sommes partielles S_n convergent donc vers sa somme S . Le même passage à la limite donne $3/2 \leq S \leq 2$.

La première méthode construit la convergence à partir des questions précédentes ; la seconde reconnaît directement une série du cours. Aucune valeur exacte de S n'est nécessaire.

2. (d)

Méthode 1 — Encadrement télescopique du reste.

Pour $N > n \geq 1$, tous les indices $k \in \{n+1, \dots, N\}$ sont au moins égaux à 2. La question 2. (a) donne :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leq S_N - S_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

À n fixé, on fait tendre N vers l'infini :

$$\frac{1}{n+1} \leq S - S_n \leq \frac{1}{n}.$$

Méthode 2 — Comparaison avec une intégrale.

La fonction $t \mapsto t^{-2}$ est positive et décroissante sur $]0, +\infty[$. Pour $k \geq n+1$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}.$$

On somme jusqu'à N , puis on passe à la limite. Les intégrales impropres convergent, avec $\int_b^{+\infty} t^{-2} dt = 1/b$ pour $b > 0$. On retrouve le même encadrement.

Cette comparaison intégrale est réutilisable pour d'autres séries à termes positifs décroissants.

2. (e)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Somme partielle et contrôle direct du reste.

La majoration $S - S_N \leq 1/N$ impose $N \geq 10^7$ pour une erreur de troncature au plus égale à 10^{-7} . Le programme suivant traduit directement cette idée :

Python

```
tolerance = 1e-7
N = 10_000_000
s = 0.0
for k in range(1, N + 1):
```

```
s = s + 1 / (k * k)
print(s)
print("Majoration de l'erreur de troncature :", 1 / N)
```

La boucle inclut bien N , car la borne supérieure de range est exclusive. Elle calcule S_N .

Méthode 2 — Milieu de l'intervalle garanti.

L'encadrement de 2. (d) place S dans $[S_N + 1/(N + 1), S_N + 1/N]$. Le milieu de cet intervalle est :

$$s_N^* = S_N + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N} \right).$$

La demi-largeur donne :

$$|S - s_N^*| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{2N(N+1)}.$$

Pour $N = 5000$, cette erreur est inférieure à 2×10^{-8} , donc strictement inférieure à 10^{-7} :

Python

```
N = 5000
s = 0.0
for k in range(1, N + 1):
    s = s + 1 / (k * k)
approximation = s + 0.5 * (1 / N + 1 / (N + 1))
print(approximation)
print("Majoration de l'erreur de troncature :", 1 / (2 * N * (N + 1)))
```

Les deux codes ont été exécutés. Le second donne environ 1.64493406685090. Les bornes démontrées portent sur les calculs en arithmétique exacte; les opérations flottantes

ajoutent une erreur numérique. Pour le second code, celle-ci est négligeable devant la marge disponible : chaque terme est de module au plus 1, la somme est inférieure à 2, et 5000 additions en double précision entraînent une erreur de l'ordre de 10^{-12} au plus. On peut donc retenir $S \approx 1.6449341$ à 10^{-7} près. La seconde méthode exploite les deux bornes et réduit fortement le nombre d'itérations.

3. (a)

Méthode 1 — Intégration d'une fonction décroissante.

Sur $[n, n+1]$, $1/(n+1) \leq 1/t \leq 1/n$. L'intégration sur cet intervalle de longueur 1 donne :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

Méthode 2 — Accroissements finis.

La fonction $\ln$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$. Il existe $\xi \in]n, n+1[$ tel que $\ln(n+1) - \ln(n) = 1/\xi$. Les bornes sur ξ donnent le même résultat.

La première approche se prête aux comparaisons somme-intégrale ; la seconde contrôle directement un accroissement.

3. (b)

Méthode 1 — Sommation de 3. (a).

Pour $n \geq 2$, la somme de 3. (a), de $k = 1$ à $n - 1$, donne :

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_{n-1} = H_n - \frac{1}{n}.$$

Par conséquent, $1/n \leq u_n \leq 1$, ce qui implique $0 \leq u_n \leq 1$. Pour $n = 1$, $u_1 = 1$.

Méthode 2 — Comparaison somme-intégrale.

Pour $k \geq 1$, la décroissance de $1/t$ donne $\int_k^{k+1} dt/t \leq 1/k$. En sommant jusqu'à n , on obtient $\ln(n+1) \leq H_n$, donc $u_n \geq \ln(1 + 1/n) > 0$.

Pour $k \geq 2$, $1/k \leq \int_{k-1}^k dt/t$. En sommant de 2 à n , $H_n - 1 \leq \ln(n)$, donc $u_n \leq 1$. Cette dernière borne reste vraie pour $n = 1$.

Les deux approches établissent l'encadrement demandé, la seconde donnant une autre minoration explicite.

3. (c)

On calcule :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq 0$$

par 3. (a). La suite est donc décroissante. Elle est minorée par 0 d'après 3. (b), donc elle converge. Sa limite γ appartient à $[0, 1]$.

4.

Chaque géométrique X_i admet une espérance finie égale à $1/p_i$, y compris $X_1 = 1$. Une somme finie de variables intégrables est intégrable. Par linéarité :

$$E(C_n) = \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = nH_n,$$

où l'on a posé $k = n - i + 1$. L'indépendance n'est pas nécessaire pour cette espérance.

5.

Les géométriques ont un moment d'ordre 2 fini, donc leur somme finie aussi. La formule de variance d'une somme de variables indépendantes s'applique :

$$V(C_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1 - p_i}{p_i^2}.$$

Avec $k = n - i + 1$, on a :

$$\frac{1 - k/n}{(k/n)^2} = \frac{n^2}{k^2} - \frac{n}{k}.$$

D'où :

$$V(C_n) = n^2 S_n - n H_n.$$

Pour $n = 1$, ce résultat donne 0, conformément à $C_1 = 1$.

6. (a)

La variance de C_n est finie. Pour $a > 0$, l'inégalité de Bienaymé–Tchebychev donne :

$$P(|C_n - nH_n| \geq an) \leq \frac{V(C_n)}{a^2 n^2} = \frac{S_n - H_n/n}{a^2} \leq \frac{S}{a^2}.$$

La dernière étape utilise $H_n \geq 0$ et $S_n \leq S$.

6. (b)

On écrit $V_n = (C_n/n - H_n) + u_n$. Comme $|u_n| \leq 1$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|V_n| \leq \left| \frac{C_n}{n} - H_n \right| + 1.$$

Ainsi, pour $c > 1$:

$$[|V_n| \geq c] \subset \left[\left| \frac{C_n}{n} - H_n \right| \geq c - 1 \right].$$

On applique 6. (a) avec $a = c - 1 > 0$ et on obtient $P(|V_n| \geq c) \leq S/(c - 1)^2$.

6. (c)

On choisit $c = 6$. Comme $S \leq 2$, la question précédente donne :

$$P(|V_n| \geq 6) \leq \frac{2}{25} = 0.08.$$

Donc $P(|V_n| < 6) \geq 0.92$. Pour $n = 10^6$, $\ln(n) = 6 \ln(10) \approx 13.8155106$, et :

$$[\ln(n) - 6, \ln(n) + 6] \subset [7.81, 19.92].$$

En effet, les extrémités du premier intervalle valent environ 7.8155106 et 19.8155106. L'événement $[|V_n| < 6]$ est donc inclus dans $[C_n/n \in [7.81, 19.92]]$, ce qui prouve la minoration 0.92. L'arrondi 13.816 fourni dans l'énoncé conduit à la même inclusion.

Partie II

7.

Si $x \leq 0$, $P(M_n \leq x) = 0$, car les exponentielles sont strictement positives presque sûrement. Si $x > 0$, l'indépendance donne :

$$P(M_n \leq x) = P(T_1 \leq x, \dots, T_n \leq x) = \prod_{i=1}^n (1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x})^n.$$

La fonction ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sa dérivée sur ce dernier intervalle vaut :

$$ne^{-x}(1 - e^{-x})^{n-1}.$$

Cela fournit la densité f_n demandée. La valeur choisie pour cette densité en 0 ne change pas la loi; pour $n = 1$, la dérivée peut avoir un saut en 0, ce qui est autorisé.

8. (a)

Pour $0 < t < x$, $g(x - t) = (n + 1)e^{-(n+1)(x-t)}$. De plus :

$$(1 - e^{-t})^{n-1} = e^{-(n-1)t}(e^t - 1)^{n-1}.$$

Donc :

$$f_n(t)g(x - t) = n(n + 1)e^{-t}e^{-(n-1)t}e^{-(n+1)x}e^{(n+1)t}(e^t - 1)^{n-1}.$$

L'exposant total en t vaut $-1 - (n - 1) + (n + 1) = 1$. Ainsi :

$$f_n(t)g(x - t) = (n + 1)e^{-(n+1)x}ne^t(e^t - 1)^{n-1}.$$

8. (b)

On démontre le résultat par récurrence. Pour $n = 1$, $Z_1 \sim \mathcal{E}(1)$ et sa densité est f_1 .

Supposons

$$Q_n = \sum_{i=1}^n Z_i$$

de densité f_n . Par l'indépendance mutuelle et le lemme des coalitions, Q_n et Z_{n+1} sont indépendantes. Leurs densités, nulles sur les réels négatifs et continues sur les réels strictement positifs, permettent d'utiliser la formule de convolution.

Pour $x > 0$, une densité de $Q_n + Z_{n+1}$ est :

$$h(x) = \int_0^x f_n(t)(n+1)e^{-(n+1)(x-t)} dt.$$

La question 8. (a) donne :

$$h(x) = (n+1)e^{-(n+1)x} \int_0^x ne^t(e^t - 1)^{n-1} dt.$$

Or $t \mapsto (e^t - 1)^n$ est une primitive de l'intégrande. Il vient :

$$h(x) = (n+1)e^{-(n+1)x}(e^x - 1)^n = (n+1)e^{-x}(1 - e^{-x})^n = f_{n+1}(x).$$

Pour $x < 0$, la densité est nulle ; on peut aussi lui attribuer la valeur 0 en 0. La récurrence est établie pour tout $n \geq 1$. En particulier, Q_n et M_n ont la même loi.

9.

La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. Posons $F(x) = e^{-e^{-x}}$. La dérivation par composition donne :

$$F'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}} = f(x).$$

Pour $a < b$, le théorème fondamental du calcul intégral donne

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \text{ Or :}$$

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} F(a) = 0, \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = 1.$$

Les intégrales impropres convergent donc et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$. Ainsi f est une densité, et la fonction de répartition de la loi de Gumbel est $F(x) = e^{-e^{-x}}$. L'utilisation d'une primitive évite tout changement de variable supplémentaire.

10. (a)

D'après 8. (b),

$$\sum_{i=1}^n Z_i$$

et M_n ont la même loi. Donc :

$$F_{W_n}(x) = P\left(\sum_{i=1}^n Z_i \leq x + \ln(n)\right) = F_{M_n}(x + \ln(n)).$$

Si $x + \ln(n) \leq 0$, cette probabilité est nulle. Sinon :

$$F_{W_n}(x) = (1 - e^{-(x+\ln(n))})^n = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n.$$

On obtient exactement la formule annoncée, y compris au seuil $x = -\ln(n)$.

10. (b)

Fixons $x \in \mathbb{R}$ et posons $b = e^{-x} > 0$. Pour n assez grand, $x > -\ln(n)$ et $b/n < 1$. Le développement limité du logarithme en 0 donne :

$$\ln(1 - b/n) = -b/n + o(1/n).$$

Par conséquent, $n \ln(1 - b/n) \rightarrow -b$, puis, par continuité de l'exponentielle :

$$F_{W_n}(x) = \exp(n \ln(1 - b/n)) \rightarrow e^{-b} = e^{-e^{-x}}.$$

La fonction limite F est la fonction de répartition continue identifiée en 9. La convergence de ces fonctions en chaque point de continuité de F prouve la convergence en loi de W_n vers la loi de Gumbel.

11. (a)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

On simule les accroissements indépendants de 1. (b), puis on utilise 1. (a) :

Python

```
import numpy as np

def simulV(n):
    C = 1
    for i in range(2, n + 1):
        p = (n - i + 1) / n
        C = C + np.random.geometric(p)
    return C / n - np.log(n)
```

La première acquisition est certaine et initialise C à 1. La boucle ajoute les $n - 1$ autres temps d'attente. Si $n = 1$, elle ne s'exécute pas et la fonction renvoie 1, conformément à $V_1 = 1$.

11. (b)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Le programme complet comprend la fonction précédente :

Python

```
import numpy as np

def simulV(n):
    C = 1
    for i in range(2, n + 1):
        p = (n - i + 1) / n
        C = C + np.random.geometric(p)
    return C / n - np.log(n)

n = int(input("n = "))
V = np.zeros(1000)
for j in range(1000):
    V[j] = simulV(n)
```

On suppose que l'utilisateur fournit bien un entier $n \geq 1$. Les indices j parcourent $0, \dots, 999$, soit exactement 1000 cases. Chaque appel utilise de nouveaux tirages du générateur ; ces tirages modélisent des répétitions indépendantes.

11. (c)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Pour une exécution autonome, on peut utiliser le programme complet suivant :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def simulV(n):
    C = 1
    for i in range(2, n + 1):
        p = (n - i + 1) / n
```

```

        C = C + np.random.geometric(p)
    return C / n - np.log(n)

def f(x):
    return np.exp(-x) * np.exp(-np.exp(-x))

n = int(input("n = "))
V = np.zeros(1000)
for j in range(1000):
    V[j] = simulV(n)

plt.hist(V, bins=20, density=True, facecolor="white", edgecolor="black")
absc = np.linspace(-1, 10, 100)
plt.plot(absc, f(absc))
plt.show()

```

Le programme a été exécuté pour $n = 1, 5, 10, 50$, avec une saisie remplacée par ces valeurs pour la vérification. Les 1000 simulations ont été produites et les tracés ont été générés pour les trois valeurs 5, 10, 50. Ces nouveaux tirages ne reproduisent pas exactement les histogrammes du PDF, qui dépendent de l'échantillon.

Les figures sources montrent des histogrammes dissymétriques, avec une queue à droite. Pour $n = 5$ et $n = 10$, les hauteurs des classes fluctuent nettement autour de la courbe. Pour $n = 50$, l'allure globale est plus proche de la densité de Gumbel.

On conjecture que V_n converge en loi vers la loi de Gumbel lorsque $n \rightarrow +\infty$. L'accord graphique ne constitue pas une preuve et n'assure pas que chaque nouvel histogramme sera plus proche que le précédent ; les fluctuations d'échantillonnage subsistent.

12.

Comme $p \in]0, 1[$, $\ln(1 - p) < 0$, donc $\alpha > 0$. La variable $V = \lfloor \alpha U \rfloor + 1$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Méthode 1 — Calcul des probabilités ponctuelles.

Pour $k \geq 1$:

$$[V = k] = \left[\frac{k-1}{\alpha} \leq U < \frac{k}{\alpha} \right].$$

Une exponentielle n'a pas d'atome, et sa probabilité de dépassement de $t \geq 0$ vaut e^{-pt} . Ainsi :

$$P(V = k) = e^{-p(k-1)/\alpha} - e^{-pk/\alpha}.$$

Or $p/\alpha = -\ln(1-p)$, donc :

$$P(V = k) = (1-p)^{k-1} - (1-p)^k = p(1-p)^{k-1}.$$

C'est la loi $\mathcal{G}(p)$.

Méthode 2 — Calcul de la fonction de survie entière.

Pour tout entier $k \geq 0$, $V > k$ équivaut à $\alpha U \geq k$. On obtient :

$$P(V > k) = e^{-pk/\alpha} = (1-p)^k.$$

Pour $k \geq 1$, la différence $P(V > k-1) - P(V > k)$ vaut $p(1-p)^{k-1}$, ce qui identifie encore la géométrique. Cette seconde méthode est particulièrement utile pour les temps d'attente.

13. (a)

La propriété de la partie entière donne, pour tout $t \geq 0$, $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$. Donc :

$$0 < V - \alpha U = \lfloor \alpha U \rfloor + 1 - \alpha U \leq 1.$$

En particulier, $D = V - \alpha U$ est bornée, donc admet un moment d'ordre 2. La formule de Huygens et $0 \leq D^2 \leq 1$ donnent :

$$V(D) = E(D^2) - E(D)^2 \leq E(D^2) \leq 1.$$

Ainsi, $V(V - \alpha U) \leq 1$.

13. (b)

L'hypothèse de moment d'ordre 2 implique l'existence des espérances. De plus, l'inégalité ponctuelle $2|XY| \leq X^2 + Y^2$ montre que XY est intégrable. La covariance est donc bien définie.

Méthode 1 — Les deux variances suggérées.

Les variables $X + Y$ et $X - Y$ ont un moment d'ordre 2, puisque $(X \pm Y)^2 \leq 2(X^2 + Y^2)$. Les formules de variance donnent :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y),$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2\text{Cov}(X, Y).$$

En ajoutant :

$$V(X + Y) + V(X - Y) = 2(V(X) + V(Y)).$$

La seconde variance étant positive ou nulle, on obtient l'inégalité demandée.

Méthode 2 — Inégalité ponctuelle sur les variables centrées.

Posons $X_0 = X - E(X)$ et $Y_0 = Y - E(Y)$. L'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ donne :

$$V(X + Y) = E((X_0 + Y_0)^2) \leq 2E(X_0^2) + 2E(Y_0^2).$$

On retrouve la même majoration sans calculer explicitement la covariance. Cette méthode fournit directement un contrôle d'une somme ; la première suit l'indication et met en évidence une identité exacte.

13. (c)

On décompose :

$$V - U = (V - \alpha U) + (\alpha - 1)U.$$

Le premier terme est borné et le second a un moment d'ordre 2, car $U \sim \mathcal{E}(p)$. La question 13. (b) s'applique sans supposer ces deux termes indépendants. Comme $V(U) = 1/p^2$:

$$V(V - U) \leq 2V(V - \alpha U) + 2(\alpha - 1)^2 V(U) \leq 2 + 2 \frac{(1 - \alpha)^2}{p^2}.$$

14. (a)

Posons $p_i = (n - i + 1)/n$. Pour $i \geq 2$, $p_i \in]0, 1[$ et $1 - p_i = (i - 1)/n$. Le coefficient α_i est exactement celui de la question 12 pour $p = p_i$. Donc $X'_i \sim \mathcal{G}(p_i)$ et 13. (c) donne :

$$V(X'_i - Y_i) \leq 2 + 2 \left(\frac{n}{n - i + 1} \right)^2 (1 - \alpha_i)^2.$$

Pour $i = 1$, $X'_1 - Y_1 = 1 - Y_1$, avec $Y_1 \sim \mathcal{E}(1)$, donc sa variance vaut 1.

Chaque différence $X'_i - Y_i$ est une fonction de Y_i seule. Par indépendance des Y_i et lemme des coalitions, ces différences sont mutuellement indépendantes. Leurs moments d'ordre 2 existent. Ainsi :

$$V(V'_n - W'_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X'_i - Y_i).$$

En utilisant les majorations précédentes, on obtient exactement l'inégalité demandée.

14. (b) i.

Sur $]0, 1[$, $\ln(z)$ et $1 - z$ sont non nuls. La fonction ϕ y est continue.

À l'extrémité 0, $\ln(z) \rightarrow -\infty$ et $1 - z \rightarrow 1$, donc $(1 - z)/\ln(z) \rightarrow 0$. Il en résulte :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \phi(z) = 1.$$

À l'extrémité 1, posons $h = 1 - z$, avec $h \rightarrow 0^+$. Le développement limité usuel du logarithme donne :

$$\ln(1 - h) = -h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

On réécrit exactement :

$$\frac{1 + h/\ln(1-h)}{h} = \frac{\ln(1-h) + h}{h \ln(1-h)}.$$

Le numérateur est $-h^2/2 + o(h^2)$ et le dénominateur est $-h^2 + o(h^2)$. Leur quotient tend vers $1/2$. Ainsi :

$$\lim_{z \rightarrow 1^-} \phi(z) = \frac{1}{4}.$$

On prolonge donc ϕ en posant $\phi(0) = 1$ et $\phi(1) = 1/4$. Ce prolongement est continu sur $[0, 1]$. Aucun développement limité composé n'a été utilisé : le changement de variable $h = 1 - z$ est explicite, puis on emploie un développement usuel en 0 et un quotient justifié.

14. (b) ii.

Pour $i \in \{2, \dots, n\}$, posons $z_i = (i-1)/n$. On a $1 - z_i = (n-i+1)/n$ et :

$$1 - \alpha_i = 1 + \frac{1 - z_i}{\ln(z_i)}.$$

Donc :

$$\left(\frac{n}{n-i+1}\right)^2 (1 - \alpha_i)^2 = \phi(z_i).$$

La somme considérée devient :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \phi(j/n).$$

Comme le prolongement de ϕ est continu sur $[0, 1]$, les sommes de Riemann convergent. La somme précédente diffère de la somme à droite complète

$$n^{-1} \sum_{j=1}^n \phi(j/n)$$

du seul terme $\phi(1)/n$, qui tend vers 0. Sa limite est donc :

$$A = \int_0^1 \phi(z) dz.$$

L'intégrale existe, puisque ϕ est continue sur un segment. Elle est strictement positive : $\phi \geq 0$ et, puisque $\phi(0) = 1$, la continuité assure l'existence de $\eta \in]0, 1[$ tel que $\phi(z) \geq 1/2$ sur $[0, \eta]$. Ainsi $A \geq \eta/2 > 0$.

14. (c)

Il faut contrôler à la fois la moyenne et la variance de $D'_n = V'_n - W'_n$.

Pour chaque i , $E(X'_i) = 1/p_i = E(Y_i)$; cette égalité reste vraie pour $i = 1$, où les deux espérances valent 1. La linéarité donne donc $E(D'_n) = 0$.

Posons

$$B_n = n^{-1} \sum_{i=2}^n (n/(n-i+1))^2 (1-\alpha_i)^2.$$

D'après 14. (b) ii, $B_n \rightarrow A$, donc (B_n) est bornée. La question 14. (a) donne :

$$0 \leq V(D'_n) \leq \frac{1}{n^2} + \frac{2B_n}{n} + \frac{2(n-1)}{n^2} \rightarrow 0.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, Bienaymé–Tchebychev entraîne :

$$P(|D'_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(D'_n)}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

C'est la convergence en probabilité de $V'_n - W'_n$ vers 0.

14. (d)

On identifie d'abord les lois des deux variables construites.

Les X'_i sont mutuellement indépendantes, car chacune est une fonction de Y_i . Elles ont les mêmes lois marginales que les X_i , avec $X'_1 = X_1 = 1$. Leurs sommes ont donc la même loi, d'où V'_n et V_n de même loi.

Si $Y_i \sim \mathcal{E}(p_i)$, alors Y_i/n suit la loi exponentielle de taux $np_i = n - i + 1$: pour $t \geq 0$, $P(Y_i/n > t) = e^{-np_i t}$. Ces variables restent indépendantes. Leurs taux parcourent $n, n-1, \dots, 1$; leur somme a donc la même loi que

$$\sum_{i=1}^n Z_i.$$

Ainsi W'_n et W_n ont la même loi. D'après 10. (b), $F_{W'_n}(x) \rightarrow F(x)$ pour tout réel x .

Pour transférer cette conclusion à V'_n , on démontre un encadrement particulier de ses probabilités. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Si $|V'_n - W'_n| \leq \varepsilon$ et $W'_n \leq x - \varepsilon$, alors $V'_n \leq x$.

Inversement, si $V'_n \leq x$ et $|V'_n - W'_n| \leq \varepsilon$, alors $W'_n \leq x + \varepsilon$.

En posant $q_n(\varepsilon) = P(|V'_n - W'_n| > \varepsilon)$, il vient :

$$F_{W'_n}(x - \varepsilon) - q_n(\varepsilon) \leq F_{V'_n}(x) \leq F_{W'_n}(x + \varepsilon) + q_n(\varepsilon).$$

D'après 14. (c), $q_n(\varepsilon) \rightarrow 0$. Le passage aux limites inférieure et supérieure donne :

$$F(x - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{V'_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_{V'_n}(x) \leq F(x + \varepsilon).$$

Enfin, $\varepsilon \rightarrow 0^+$ et la continuité de F donnent $F_{V'_n}(x) \rightarrow F(x)$. Comme V'_n et V_n ont la même loi, V_n converge en loi vers la loi de Gumbel. Cette preuve utilise seulement des inclusions d'événements et la continuité de la fonction de répartition limite.

14. (e)

Pour n grand, la convergence établie suggère :

$$P(-1.17 \leq V_n \leq 3.20) \approx F(3.20) - F(-1.17) \approx 0.96 - 0.04 = 0.92.$$

Pour justifier l'usage des deux bornes dans l'approximation asymptotique, on peut encadrer l'intervalle par ceux dont les extrémités sont décalées de $\varepsilon > 0$, puis appliquer la convergence des fonctions de répartition et la continuité de F . Les éventuels atomes des variables discrètes ne subsistent pas dans la limite continue.

Or $C_n/n = V_n + \ln(n)$ et, pour $n = 10^6$:

$$\ln(n) - 1.17 \approx 12.6455106, \quad \ln(n) + 3.20 \approx 17.0155106.$$

En arrondissant au centième, on obtient l'intervalle indiqué $[12.65, 17.02]$ et l'estimation de probabilité 0.92. Les bornes arrondies modifient légèrement les valeurs centrées ; avec ces bornes exactes, l'approximation par F vaut environ 0.9198.

L'intervalle de la partie I a une largeur $19.92 - 7.81 = 12.11$, contre $17.02 - 12.65 = 4.37$ ici. Le second est donc environ 2.77 fois plus étroit. La partie I fournit une minoration rigoureuse de probabilité pour la valeur de n considérée. La partie II fournit une approximation asymptotique plus précise, sans borne d'erreur numérique à $n = 10^6$ dans cette question. Le signe $\approx$ est donc essentiel.

Partie III

15. (a)

Pour un type i fixé, chacun des m achats fournit ce type avec probabilité $1/n$, indépendamment des autres achats. La variable $A_{i,m}$ compte les succès de m épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre. Ainsi :

$$A_{i,m} \sim \mathcal{B}(m, 1/n).$$

En particulier, elle admet tous ses moments, et $V(A_{i,m}) = m(1/n)(1 - 1/n)$.

15. (b)

Comme les variables sont bornées, la covariance existe. Par bilinéarité, la covariance avec une constante est nulle :

$$\text{Cov}(A_{1,m}, m - A_{1,m}) = -V(A_{1,m}) = -\frac{m(n-1)}{n^2}.$$

Cette quantité est strictement négative puisque $n \geq 2$ et $m \geq 1$.

15. (c)

Supposons, par l'absurde, que $A_{1,m}, \dots, A_{n,m}$ soient mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions, $A_{1,m}$ est alors indépendante de $A_{2,m} + \dots + A_{n,m}$.

Chaque achat fournit exactement une vignette, donc :

$$A_{1,m} + \dots + A_{n,m} = m.$$

Ainsi $A_{2,m} + \dots + A_{n,m} = m - A_{1,m}$. Les deux variables indépendantes ayant des moments d'ordre 2, leur covariance devrait être nulle. Cela contredit la valeur

strictement négative calculée en 15. (b). Les comptages ne sont donc pas mutuellement indépendants.

16. (a)

Méthode 1 — Récurrence à partir de la formule de réunion.

Pour deux événements, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$. Le résultat est immédiat pour $r = 1$. Si la propriété est vraie au rang r , on l'applique à $A = \bigcup_{i=1}^r E_i$ et $B = E_{r+1}$, puis on utilise l'hypothèse de récurrence. Cela donne le rang $r + 1$ et prouve l'inégalité pour tout $r \geq 1$.

Méthode 2 — Indicateurs.

Pour chaque issue,

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i=1}^r E_i} \leq \sum_{i=1}^r \mathbf{1}_{E_i}.$$

Les indicateurs sont intégrables. La croissance et la linéarité de l'espérance, avec $E(\mathbf{1}_E) = P(E)$, donnent directement l'inégalité.

La récurrence ne requiert que la formule pour deux événements; les indicateurs transforment une inclusion combinatoire en une majoration d'espérances.

16. (b)

L'événement $[C_n > m]$ signifie qu'après m achats il manque au moins un type :

$$[C_n > m] = \bigcup_{i=1}^n [A_{i,m} = 0].$$

D'après 15. (a), $P(A_{i,m} = 0) = (1 - 1/n)^m$. La question 16. (a) donne donc :

$$P(C_n > m) \leq n(1 - 1/n)^m.$$

La fonction exponentielle est convexe et située au-dessus de sa tangente en 0, donc $e^u \geq 1 + u$ pour tout réel u . Pour $u = -1/n$, cela donne $1 - 1/n \leq e^{-1/n}$. Ces nombres sont positifs, d'où $(1 - 1/n)^m \leq e^{-m/n}$ et la seconde majoration.

La même formule reste valable pour $m = 0$: le membre de gauche vaut 1 et les bornes de droite valent n .

16. (c)

Question adaptée au programme actuel. Rectification d'une majoration du PDF : le seuil $cn \ln(n)$ peut ne pas être entier, alors que 16. (b) porte sur un nombre entier d'achats.

Pour $t = cn \ln(n) > 0$, le caractère entier de C_n donne $[C_n > t] = [C_n > \lfloor t \rfloor]$. En appliquant 16. (b), étendue à $m = 0$:

$$P(C_n > t) \leq ne^{-\lfloor t \rfloor/n}.$$

Comme $\lfloor t \rfloor \geq t - 1$, on obtient :

$$ne^{-\lfloor t \rfloor/n} \leq ne^{-(t-1)/n} = e^{1/n} n^{1-c}.$$

Si t est entier, le facteur $e^{1/n}$ peut être supprimé et la borne originale n^{1-c} est vraie. Pour un seuil réel quelconque, la borne originale est fautive : avec $n = 2$ et $c = 1.99/(2 \ln 2)$, $t = 1.99$ et $P(C_2 > t) = 1$, car $C_2 \geq 2$. Pourtant $2^{1-c} = 2e^{-1.99/2} \approx 0.739 < 1$.

16. (d)

Question adaptée au programme actuel. La rectification de 16. (c) se répercute sur cette question.

Pour $x > -\ln(n)$, $t = n(x + \ln(n))$ est positif. L'événement $[V_n > x]$ est exactement $[C_n > t]$. La même prise en compte de la partie entière donne :

$$P(V_n > x) \leq ne^{-\lfloor t \rfloor / n} \leq ne^{-(t-1)/n} = e^{1/n} e^{-x}.$$

On pourrait aussi appliquer 16. (c) avec $c = (x + \ln(n)) / \ln(n) > 0$. Le facteur correctif tend vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$; la majoration asymptotique reste donc cohérente avec la queue de la loi limite.

17. (a)

Question adaptée au programme actuel. La loi binomiale concerne la variable $\tilde{A}_i$ conditionnée par $[N = p]$, et non le couple $(\tilde{A}_i, N)$, comme l'indiquait par erreur le PDF. L'indépendance de N et des types des vignettes est explicitée dans le sujet.

Conditionnellement à $[N = p]$, on effectue p tirages indépendants uniformes :

$$\mathcal{L}(\tilde{A}_i \mid N = p) = \mathcal{B}(p, 1/n).$$

Si $p = 0$, $\tilde{A}_i = 0$. Pour $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([N = p])_{p \geq 0}$ donne une série de termes positifs :

$$P(\tilde{A}_i = k) = \sum_{p=k}^{+\infty} \binom{p}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{p-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^p}{p!}.$$

En posant $q = p - k$ et en simplifiant les factorielles :

$$P(\tilde{A}_i = k) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda/n)^k}{k!} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1 - 1/n))^q}{q!}.$$

La série exponentielle converge et vaut $e^{\lambda(1-1/n)}$. Ainsi :

$$P(\tilde{A}_i = k) = e^{-\lambda/n} \frac{(\lambda/n)^k}{k!}.$$

On conclut $\tilde{A}_i \sim \mathcal{P}(\lambda/n)$. Il n'y a ici ni échange de sommes ni réarrangement : seul un changement d'indice dans une série positive a été effectué.

17. (b)

Sachant $N = p$, chaque suite ordonnée de p types a la probabilité $1/n^p$. Pour obtenir exactement k_i occurrences du type i , on choisit les k_1 positions du type 1, puis les k_2 positions du type 2 parmi celles restantes, etc. Le nombre de suites est :

$$\binom{p}{k_1} \binom{p-k_1}{k_2} \dots \binom{p-k_1-\dots-k_{n-1}}{k_n} = \frac{p!}{k_1! \dots k_n!}.$$

Ce calcul reste valable si certains k_i sont nuls, avec $0! = 1$. En multipliant par la probabilité de chaque suite, on obtient :

$$P_{[N=p]}(\tilde{A}_1 = k_1, \dots, \tilde{A}_n = k_n) = \frac{p!}{k_1! \dots k_n!} \frac{1}{n^p}.$$

17. (c)

Posons $p = k_1 + \dots + k_n$. Puisque

$$\sum_{i=1}^n \tilde{A}_i = N,$$

l'événement $B = [\tilde{A}_1 = k_1, \dots, \tilde{A}_n = k_n]$ implique $[N = p]$.

Si $p \geq 1$, la formule des probabilités composées et 17. (b) donnent :

$$P(B) = \frac{p!}{k_1! \dots k_n!} \frac{1}{n^p} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^p}{p!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda/n)^p}{k_1! \dots k_n!}.$$

On écrit

$$e^{-\lambda} = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda/n}$$

et

$$(\lambda/n)^p = \prod_{i=1}^n (\lambda/n)^{k_i},$$

d'où :

$$P(B) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\lambda/n} (\lambda/n)^{k_i}}{k_i!}.$$

Si $p = 0$, tous les k_i sont nuls et $B = [N = 0]$. Sa probabilité vaut $e^{-\lambda}$, qui est aussi le produit affiché. La formule est donc vraie dans tous les cas.

17. (d)

D'après 17. (a), chaque facteur du produit de 17. (c) est $P(\tilde{A}_i = k_i)$. La factorisation de toutes les probabilités ponctuelles de la loi conjointe est la caractérisation de l'indépendance mutuelle pour ces variables discrètes. Ainsi, $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n$ sont mutuellement indépendantes.

À nombre d'achats fixé, les comptages ont une somme constante et sont dépendants, comme en 15. (c). Ici, leur somme est la variable de Poisson N . Cette randomisation particulière du nombre de tirages conduit à l'indépendance des comptages non conditionnés. Conditionnellement à $N = p \geq 1$, ils restent dépendants.

18.

La collection est complète si et seulement si chaque type est présent :

$$D_n = \bigcap_{i=1}^n [\tilde{A}_i \geq 1].$$

L'indépendance de 17. (d) et les lois de Poisson de 17. (a) donnent :

$$P(D_n) = \prod_{i=1}^n (1 - P(\tilde{A}_i = 0)) = (1 - e^{-\lambda/n})^n.$$

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le sujet source : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $P_{[N=p]}(D_n) = P(C_n \leq p)$. Il relie la collection dans le modèle à nombre d'achats aléatoire à celle du modèle initial et sera utilisé en 19. (a).

19. (a)

Les événements $[N = p]$, $p \in \mathbb{N}$, forment un système complet, et ils ont tous une probabilité strictement positive puisque $\lambda > 0$. La formule des probabilités totales donne :

$$P(D_n) = \sum_{p=0}^{+\infty} P_{[N=p]}(D_n)P(N = p).$$

Pour $p \geq 1$, on utilise le résultat admis après 18. Pour $p = 0$, aucune vignette n'est obtenue, donc $P_{[N=0]}(D_n) = 0$. De même, $C_n \geq n \geq 2$, donc $P(C_n \leq 0) = 0$. La formule demandée vaut donc aussi avec le terme $p = 0$.

La série est convergente : chaque terme est positif et majoré par $P(N = p)$, dont la somme vaut 1.

19. (b)

La variable $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ a pour espérance et variance λ . Pour $a > 0$, Bienaymé-Tchebychev donne :

$$P(|N - \lambda| < a) \geq 1 - \frac{\lambda}{a^2}.$$

Si $|N - \lambda| < a$, alors $\lambda - a < N < \lambda + a$. Comme N est entier, on a en particulier $k_1 \leq N \leq k_2$, avec $k_1 = \lfloor \lambda - a \rfloor$ et $k_2 = \lfloor \lambda + a \rfloor + 1$. Donc :

$$\sum_{p=k_1}^{k_2} P(N = p) = P(k_1 \leq N \leq k_2) \geq 1 - \frac{\lambda}{a^2}.$$

Les hypothèses $a < \lambda$ et $a > \sqrt{\lambda}$ garantissent respectivement $k_1 \geq 0$ et $1 - \lambda/a^2 > 0$.

19. (c)

Notons $G(p) = P(C_n \leq p)$. Cette fonction est croissante en l'entier p et prend ses valeurs dans $[0, 1]$.

Pour la borne inférieure, on conserve seulement les termes $k_1 \leq p \leq k_2$ de la série positive de 19. (a) :

$$P(D_n) \geq \sum_{p=k_1}^{k_2} G(p)P(N = p) \geq G(k_1) \sum_{p=k_1}^{k_2} P(N = p).$$

La question 19. (b) donne la borne inférieure annoncée.

Pour la borne supérieure, on partage la série entre $p \leq k_2$ et $p > k_2$. Sur le premier ensemble, $G(p) \leq G(k_2)$; sur le second, $G(p) \leq 1$. D'où :

$$P(D_n) \leq G(k_2)P(N \leq k_2) + P(N > k_2) \leq G(k_2) + P(N > k_2).$$

Comme $k_2 > \lambda + a$, $[N > k_2] \subset [|N - \lambda| \geq a]$, et cette dernière probabilité est au plus λ/a^2 . On obtient donc :

$$G(k_1) \left(1 - \frac{\lambda}{a^2}\right) \leq P(D_n) \leq G(k_2) + \frac{\lambda}{a^2}.$$

20. (a)

La suite (c_n) converge, donc elle est bornée. Posons :

$$\lambda_n = n(\ln(n) + c_n), \quad a_n = n^{2/3}, \quad r_n = \frac{\ln(n) + c_n}{n^{1/3}}, \quad \delta_n = \frac{1}{n^{1/3}} + \frac{1}{n}.$$

Pour n suffisamment grand, $\ln(n) + c_n > 0$ et $\lambda_n > 1$. En outre :

$$\frac{a_n}{\lambda_n} = \frac{1}{n^{1/3}(\ln(n) + c_n)} \rightarrow 0,$$

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{a_n} = \frac{\sqrt{\ln(n) + c_n}}{n^{1/6}} \rightarrow 0.$$

Ces limites résultent des croissances comparées du logarithme et des puissances. Ainsi $\sqrt{\lambda_n} < a_n < \lambda_n$ pour tout n assez grand : les hypothèses de 19 sont satisfaites. On a aussi $\lambda_n/a_n^2 = r_n \rightarrow 0$, donc $1 - r_n > 0$ à partir d'un certain rang.

La formule de 18 devient :

$$P(D_n) = (1 - e^{-\lambda_n/n})^n = \left(1 - \frac{e^{-c_n}}{n}\right)^n.$$

Avec $k_1 = \lfloor \lambda_n - a_n \rfloor$ et $k_2 = \lfloor \lambda_n + a_n \rfloor + 1$, les bornes de la partie entière donnent :

$$k_1 \geq \lambda_n - a_n - 1, \quad k_2 \leq \lambda_n + a_n + 1.$$

Par croissance de la fonction de répartition :

$$P(V_n \leq c_n - \delta_n) = P(C_n \leq \lambda_n - a_n - 1) \leq P(C_n \leq k_1),$$

$$P(C_n \leq k_2) \leq P(C_n \leq \lambda_n + a_n + 1) = P(V_n \leq c_n + \delta_n).$$

On insère ces deux comparaisons dans 19. (c). Pour la borne inférieure, on peut multiplier par $1 - r_n$ sans renverser l'inégalité, car ce facteur est positif. Il vient :

$$P(V_n \leq c_n - \delta_n)(1 - r_n) \leq \left(1 - \frac{e^{-c_n}}{n}\right)^n \leq P(V_n \leq c_n + \delta_n) + r_n.$$

C'est exactement l'encadrement demandé.

20. (b)

On démontre la convergence des fonctions de répartition en un point réel x fixé. Cette preuve est indépendante du couplage de la partie II.

Commençons par une limite numérique utile. Si $c_n \rightarrow x$, alors $b_n = e^{-c_n} \rightarrow e^{-x}$ et (b_n) est bornée. Pour n assez grand, $0 < b_n/n \leq 1/2$. Le développement limité $\ln(1 - t) = -t + O(t^2)$ en 0 donne :

$$n \ln(1 - b_n/n) = -b_n + O(b_n^2/n) \rightarrow -e^{-x}.$$

La borne du reste s'applique uniformément à ces arguments, car ils tendent vers 0. Par continuité de l'exponentielle :

$$\left(1 - \frac{e^{-c_n}}{n}\right)^n \rightarrow e^{-e^{-x}} = F(x).$$

Reprenons $\delta_n = n^{-1/3} + 1/n \rightarrow 0$.

Pour minorer $F_{V_n}(x)$, appliquons la borne supérieure de 20. (a) à la suite $c_n^- = x - \delta_n$, qui converge vers x . On obtient :

$$\left(1 - \frac{e^{-c_n^-}}{n}\right)^n \leq F_{V_n}(x) + \frac{\ln(n) + c_n^-}{n^{1/3}}.$$

Le terme d'erreur tend vers 0. Il en résulte $\liminf_{n \rightarrow \infty} F_{V_n}(x) \geq F(x)$.

Pour majorer $F_{V_n}(x)$, appliquons la borne inférieure de 20. (a) à $c_n^+ = x + \delta_n$. Il vient :

$$F_{V_n}(x) \left(1 - \frac{\ln(n) + c_n^+}{n^{1/3}}\right) \leq \left(1 - \frac{e^{-c_n^+}}{n}\right)^n.$$

Le facteur entre parenthèses est positif pour n assez grand et tend vers 1. On divise par ce facteur, puis on passe à la limite supérieure : $\limsup_{n \rightarrow \infty} F_{V_n}(x) \leq F(x)$.

Les deux bornes prouvent $F_{V_n}(x) \rightarrow F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $F(x) = e^{-e^{-x}}$ étant la fonction de répartition continue de la loi de Gumbel, on retrouve la convergence en loi de V_n vers cette loi.

Relevé des adaptations

- Préambule et introduction du modèle de Poisson avant 17 : explicitation des tirages indépendants uniformes et de l'indépendance de N vis-à-vis des types, hypothèses nécessaires au modèle probabiliste utilisé.
- 1. (b) : précision de la convention géométrique pour le paramètre 1, conformément à $X_1 = 1$.
- 2. (e), 11. (a), 11. (b), 11. (c) : code adapté en Python ; ajout de la syntaxe de saisie et des paramètres nécessaires à l'histogramme normalisé.

- 11. (c) : la figure composée de trois histogrammes est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les petites hauteurs et les bornes de classes sont des lectures approchées à la résolution de l'image ; la courbe de Gumbel est calculée à partir de sa formule. Les trois panneaux et les vingt classes par panneau sont conservés.
- 16. (c), 16. (d) : correction des majorations à seuil réel par prise en compte de la partie entière et ajout du facteur $e^{1/n}$; les bornes sans ce facteur ne sont pas vraies pour tous les seuils réels.
- 17. (a) : correction de « loi conditionnelle du couple » en « loi conditionnelle de la variable », seule formulation compatible avec une loi binomiale univariée.