



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC — 2017

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I. Une démonstration probabiliste de la formule de Stirling

1. (a)

Le changement de variable affine imposé $u = n(1 - x)$ donne $x = 1 - u/n$ et $dx = -du/n$. Quand x parcourt $[0, 1]$, u parcourt $[n, 0]$. On a :

$$h_n(x) = \left(\frac{u}{n} e^{1-u/n}\right)^n = \frac{e^n}{n^n} u^n e^{-u}.$$

Les fonctions sont continues sur les segments d'intégration. En inversant les bornes :

$$I_n = \frac{e^n}{n^{n+1}} \int_0^n u^n e^{-u} du.$$

1. (b)

Méthode 1 — Étude du signe par dérivation.

On pose $q(x) = x + \ln(1 - x) + x^2/2$ sur $[0, 1[$. Cette fonction est continue et dérivable, avec :

$$q'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + x = -\frac{x^2}{1-x} \leq 0.$$

Comme $q(0) = 0$, $q(x) \leq 0$ pour $0 \leq x < 1$. Cela donne $x + \ln(1 - x) \leq -x^2/2$.

Méthode 2 — Intégration d'une inégalité.

Pour $0 \leq t < 1$, $1/(1 - t) = 1 + t + t^2/(1 - t) \geq 1 + t$. En intégrant de 0 à $x < 1$:

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \geq x + \frac{x^2}{2}.$$

On retrouve la même inégalité. La première méthode étudie une différence ; la seconde utilise directement la primitive du logarithme et fournit un contrôle intégral.

1. (c)

Pour $x \in [0, 1[, 1$. (b) entraîne :

$$0 \leq h_n(x) = \exp(n(x + \ln(1-x))) \leq e^{-nx^2/2}.$$

En $x = 1$, $h_n(1) = 0$ et la majoration reste vraie. Par croissance de l'intégrale puis par positivité :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-nx^2/2} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2/2} dx.$$

Avec le changement de variable affine $u = \sqrt{nx}$, cette dernière intégrale vaut

$n^{-1/2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$. La densité de la normale centrée réduite est $u \mapsto e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$; sa parité et sa normalisation donnent :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ainsi $0 \leq I_n \leq \sqrt{\pi/(2n)}$.

2. (a)

Pour $0 < x < 1$, on prend le logarithme de la définition de h_n^* , qui est strictement positive. On obtient :

$$n(x + \ln(1 - x)) = -\frac{nx^2}{2}H(x), \quad H(x) = -\frac{2(x + \ln(1 - x))}{x^2}.$$

Le développement limité usuel $\ln(1 - x) = -x - x^2/2 + o(x^2)$ donne :

$$H(x) = 1 + o(1) \quad \text{lorsque } x \rightarrow 0^+.$$

En posant $H(0) = 1$, on obtient un prolongement continu en 0.

2. (b)

La fonction g est de classe C^2 sur $]0, 1[$. Ses dérivées sont :

$$g'(x) = -\ln(1 - x) - x, \quad g''(x) = \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x} > 0.$$

Ainsi g est strictement convexe, donc convexe, sur $]0, 1[$.

La même expression définit un prolongement de g en 0, avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$.

Comme $g'' > 0$ sur $]0, 1[$, g' est strictement croissante et $g'(x) > 0$ pour $x > 0$. La fonction g est donc strictement croissante à partir de $g(0) = 0$, d'où $g(x) > 0$ pour $0 < x < 1$.

2. (c)

On dérive l'expression de H obtenue en 2. (a) :

$$H'(x) = \frac{2}{x(1 - x)} + \frac{4(x + \ln(1 - x))}{x^3} = \frac{4g(x)}{x^3(1 - x)}.$$

Le numérateur est strictement positif par 2. (b), et le dénominateur aussi. Donc H est strictement croissante sur $]0, 1[$. Son prolongement continu en 0 conserve cette stricte croissance : pour $x > 0$, $H(x) > H(x/2) \geq H(0) = 1$.

Quand $x \rightarrow 1^-$, $x + \ln(1-x) \rightarrow -\infty$ et $x^2 \rightarrow 1$, donc $H(x) \rightarrow +\infty$. La continuité, la stricte croissance et les valeurs aux extrémités montrent, par le théorème de la bijection, que H réalise une bijection de $[0, 1[$ sur $[1, +\infty[$.

3. (a)

On peut choisir :

$$u_n = \frac{1}{2n^{1/4}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, $0 < u_n \leq 1/2 < 1$. De plus, $u_n \rightarrow 0$ et $u_n \sqrt{n} = n^{1/4}/2 \rightarrow +\infty$. Cette suite satisfait toutes les conditions, y compris au rang 1.

3. (b)

Le prolongement de H est continu en 0 et $u_n \rightarrow 0$. Donc :

$$v_n = H(u_n) \rightarrow H(0) = 1.$$

En outre, $v_n \geq 1$ pour tout n .

3. (c)

La fonction h_n est positive ou nulle sur $[0, 1]$, donc $I_n \geq \int_0^{u_n} h_n(x) dx$.

Pour $0 < x \leq u_n$, la croissance de H donne $H(x) \leq H(u_n) = v_n$. En multipliant par le réel négatif $-nx^2/2$ puis en prenant l'exponentielle :

$$h_n(x) = e^{-nx^2 H(x)/2} \geq e^{-nv_n x^2/2}.$$

L'égalité en $x = 0$ vaut également, les deux membres étant égaux à 1. On intègre puis on pose $u = x\sqrt{nv_n}$, changement de variable affine licite puisque $v_n > 0$:

$$\int_0^{u_n} h_n(x) dx \geq \int_0^{u_n} e^{-nv_n x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{nv_n}} \int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} e^{-u^2/2} du.$$

On obtient l'encadrement annoncé.

3. (d)

Comme $v_n \rightarrow 1$ et $u_n \sqrt{n} \rightarrow +\infty$, $u_n \sqrt{nv_n} \rightarrow +\infty$. La convergence de l'intégrale impropre normale donne :

$$\int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} e^{-u^2/2} du \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Les questions 1. (c) et 3. (c), après multiplication par $\sqrt{n}$, donnent :

$$\frac{1}{\sqrt{v_n}} \int_0^{u_n \sqrt{nv_n}} e^{-u^2/2} du \leq \sqrt{n} I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Les deux bornes tendent vers $\sqrt{\pi/2}$, donc le théorème d'encadrement entraîne :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Ce passage à la limite porte sur une intégrale à borne variable, via la définition d'une intégrale impropre ; aucun échange entre limite et intégrale n'est nécessaire.

4. (a)

Une somme de n exponentielles indépendantes de taux 1 suit la loi gamma de forme n et de taux 1. Donc S_n admet la densité :

$$f_{S_n}(s) = \begin{cases} \frac{s^{n-1}e^{-s}}{(n-1)!} & s > 0, \\ 0 & s \leq 0. \end{cases}$$

Chaque T_i a pour espérance 1 et pour variance 1, finies. Les variables sont indépendantes de même loi, donc le théorème limite central s'applique :

$$R_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$$

converge en loi vers une normale centrée réduite. Sa fonction de répartition limite Φ est continue en 0. Ainsi :

$$P(S_n \leq n) = P(R_n \leq 0) \longrightarrow \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

4. (b)

Méthode 1 — Inégalité de Markov.

La variable $U_n = T_{n+1}/\sqrt{n}$ est positive et intégrable, avec $E(U_n) = 1/\sqrt{n}$. Pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|U_n| \geq \varepsilon) = P(U_n \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}} \longrightarrow 0.$$

Donc U_n converge en probabilité vers 0.

Méthode 2 — Probabilité exponentielle exacte.

Comme $T_{n+1} \sim \mathcal{E}(1)$:

$$P(|U_n| \geq \varepsilon) = P(T_{n+1} \geq \varepsilon\sqrt{n}) = e^{-\varepsilon\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Cette seconde méthode utilise la loi connue et donne un contrôle plus précis ; Markov fonctionne aussi pour d'autres variables positives intégrables.

4. (c)

On prouve directement la limite à l'aide d'un encadrement de probabilités. On a :

$$\frac{S_{n+1} - n}{\sqrt{n}} = R_n + U_n.$$

Comme $U_n \geq 0$, $[R_n + U_n \leq 0] \subset [R_n \leq 0]$. Pour $\varepsilon > 0$,
 $[R_n \leq -\varepsilon] \cap [U_n \leq \varepsilon] \subset [R_n + U_n \leq 0]$. D'où :

$$P(R_n \leq -\varepsilon) - P(U_n > \varepsilon) \leq P(S_{n+1} \leq n) \leq P(R_n \leq 0).$$

Le théorème limite central donne la limite $\Phi(-\varepsilon)$ pour la première probabilité, et 4. (b) donne une limite nulle pour la seconde. Ainsi :

$$\Phi(-\varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P(S_{n+1} \leq n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} P(S_{n+1} \leq n) \leq \frac{1}{2}.$$

On fait ensuite tendre ε vers 0^+ . Par continuité de Φ , on obtient $P(S_{n+1} \leq n) \rightarrow 1/2$. L'indépendance entre R_n et U_n n'est pas requise pour cet encadrement.

5.

La densité gamma de S_{n+1} donne :

$$q_n = P(S_{n+1} \leq n) = \frac{1}{n!} \int_0^n u^n e^{-u} du.$$

La question 1. (a) devient donc $I_n = e^n n! q_n / n^{n+1}$. Comme $q_n > 0$, on peut isoler la factorielle :

$$n! = \frac{n^{n+1} e^{-n} I_n}{q_n}.$$

D'après 3. (d), $I_n \sim \sqrt{\pi/(2n)}$, et d'après 4. (c), $q_n \rightarrow 1/2$. Par les règles sur les produits et quotients d'équivalents non nuls :

$$n! \sim 2n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

La formule de Stirling est ainsi démontrée dans ce problème, sans être supposée connue. Elle pourra être utilisée en 15. (b), puisqu'elle vient d'être établie.

Partie II. Quelques propriétés de la loi de Cauchy

6. (a)

Pour $x \in \mathbb{R}$, posons $a = \arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$. La tangente est impaire, donc $\tan(-a) = -x$. Comme $-a$ appartient aussi à cet intervalle de bijection, l'unicité de l'antécédent donne :

$$\arctan(-x) = -a = -\arctan(x).$$

Ainsi $\arctan$ est impaire.

6. (b)

Méthode 1 — Taylor–Young.

La fonction arctan est de classe C^∞ au voisinage de 0, donc Taylor–Young à l’ordre 3 est applicable. En notant $a(x) = \arctan(x)$:

$$a(0) = 0, \quad a'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad a''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$a'''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^2}{(1+x^2)^3}.$$

Ainsi $a'(0) = 1$, $a''(0) = 0$ et $a'''(0) = -2$. Il en résulte :

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Méthode 2 — Primitive et reste explicitement majoré.

L’identité exacte $1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4/(1+t^2)$ donne :

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \int_0^x \frac{t^4}{1+t^2} dt.$$

Pour tout réel x , la valeur absolue de la dernière intégrale est au plus

$\int_0^{|x|} t^4 dt = |x|^5/5$, donc ce reste est $o(x^3)$. On retrouve le même développement.

La première méthode applique une formule du cours ; la seconde fournit en plus une majoration concrète du reste, sans intégrer formellement un développement limité.

6. (c)

Méthode 1 — Encadrement de l'intégrande.

Pour $t \geq 0$, $0 \leq 1/(1+t^2) \leq 1$. En intégrant sur $[0, x]$:

$$0 \leq \arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leq x.$$

Méthode 2 — Accroissements finis.

Pour $x > 0$, $\arctan$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$. Il existe $\xi \in]0, x[$ tel que $\arctan(x) = x/(1+\xi^2)$. Le facteur $1/(1+\xi^2)$ est compris entre 0 et 1, d'où l'encadrement. En $x = 0$, les deux bornes valent 0.

Les deux approches donnent le même résultat ; la comparaison intégrale se généralise facilement à d'autres primitives.

6. (d)

Méthode 1 — Dérivée d'une somme.

La fonction $b(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. On calcule :

$$b'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+1/x^2} = 0.$$

Elle est donc constante sur cet intervalle. Quand $x \rightarrow +\infty$, $\arctan(x) \rightarrow \pi/2$ et $\arctan(1/x) \rightarrow 0$. Ainsi $b(x) = \pi/2$ pour tout $x > 0$.

Méthode 2 — Identification de l'angle complémentaire.

Pour $a = \arctan(x)$, on a $0 < a < \pi/2$. Les formules d'addition du sinus et du cosinus donnent $\sin(\pi/2 - a) = \cos a$ et $\cos(\pi/2 - a) = \sin a$. Par conséquent :

$$\tan(\pi/2 - a) = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{x}.$$

L'angle $\pi/2 - a$ appartient à l'intervalle de bijection de la tangente ; donc $\arctan(1/x) = \pi/2 - a$, ce qui prouve l'identité. Cette approche relie la formule aux angles complémentaires, tandis que la première évite les calculs trigonométriques.

7. (a)

La fonction proposée est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Une primitive est $x \mapsto \arctan(x - \theta)/\pi$. Pour $a < b$:

$$\int_a^b \frac{dx}{\pi(1 + (x - \theta)^2)} = \frac{\arctan(b - \theta) - \arctan(a - \theta)}{\pi}.$$

Lorsque $a \rightarrow -\infty$ et $b \rightarrow +\infty$, les deux arctangentes tendent respectivement vers $-\pi/2$ et $\pi/2$. L'intégrale impropre converge et vaut 1. La fonction est donc une densité.

7. (b)

Pour qu'une variable à densité admette une espérance, l'intégrale de $|x|f_X(x)$ doit être finie. Or :

$$|x|f_X(x) = \frac{|x|}{\pi(1 + (x - \theta)^2)} \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} \frac{1}{\pi|x|}.$$

Les fonctions sont positives, et les intégrales de $1/|x|$ divergent aux deux infinis. Par comparaison d'intégrales positives équivalentes, $\int_{\mathbb{R}} |x|f_X(x) dx = +\infty$.

Ainsi X n'admet pas d'espérance. Même pour $\theta = 0$, une compensation entre deux intégrales divergentes ne définit pas une espérance.

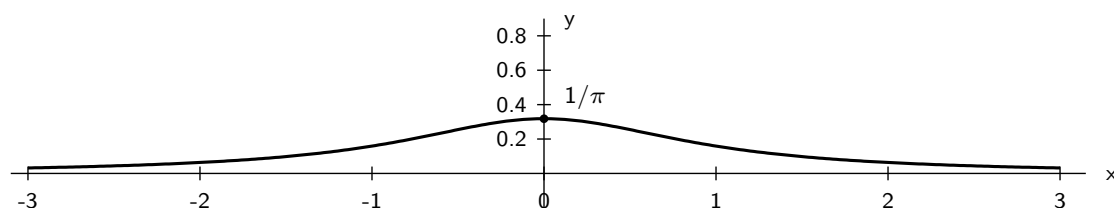
7. (c)

Pour $\theta = 0$, $f_X(x) = 1/(\pi(1 + x^2))$ est paire et strictement positive. Sa dérivée vaut :

$$f'_X(x) = -\frac{2x}{\pi(1 + x^2)^2}.$$

Elle est donc strictement croissante sur $] -\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle atteint son maximum $1/\pi$ en 0, avec une tangente horizontale, et tend vers 0 aux deux infinis. L'axe des abscisses est une asymptote horizontale.

Le tracé suivant utilise la même unité sur les deux axes ; la faible hauteur du sommet par rapport à l'étendue horizontale correspond donc à un repère orthonormal.



8. (a)

Par intégration de la densité sur $] -\infty, x]$:

$$F_X(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\arctan(x - \theta) - \arctan(a - \theta)}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x - \theta).$$

Cette formule vaut pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle montre en particulier que F_X est de classe C^∞ et strictement croissante, car $F'_X = f_X > 0$.

8. (b)

L'équation $F_X(x) = 1/2$ équivaut à $\arctan(x - \theta) = 0$. L'arctangente est injective et $\arctan(0) = 0$, donc sa seule solution est $x = \theta$.

La médiane théorique de X est donc θ , malgré l'absence d'espérance.

Partie III. La loi de la moyenne empirique

9. (a)

Pour $n \geq 1$ et x fixé, la fonction $\varphi_{n,x}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}$, car ses deux dénominateurs sont strictement positifs.

Méthode 1 — Comparaison directe.

On a $0 \leq \varphi_{n,x}(t) \leq 1/(1+t^2)$ pour tout réel t , puisque $1 + (x - nt)^2 \geq 1$. L'intégrale de la fonction majorante converge et vaut π , comme le montre la primitive $\arctan$. Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale de $\varphi_{n,x}$ converge sur les deux demi-droites et donc sur $\mathbb{R}$.

Méthode 2 — Équivalent aux deux infinis.

Aux deux infinis :

$$1 + t^2 \sim t^2, \quad 1 + (x - nt)^2 \sim n^2 t^2,$$

$$\varphi_{n,x}(t) \sim \frac{1}{n^2 t^4}.$$

Les intégrales de $1/t^4$ convergent à chaque infini. Par comparaison de fonctions positives équivalentes, l'intégrale de $\varphi_{n,x}$ converge sur $\mathbb{R}$.

La première méthode évite le calcul asymptotique et donne aussi une majoration de l'intégrale par π . La seconde précise la vitesse de décroissance de l'intégrande.

9. (b)

Une primitive de $\psi_{n,x}$ est :

$$L(t) = \ln(1 + t^2) - \ln(1 + (x - nt)^2) = \ln\left(\frac{1 + t^2}{1 + (x - nt)^2}\right).$$

En effet, la dérivée du second logarithme est $2n(nt - x)/(1 + (x - nt)^2)$, ce qui donne le signe demandé après soustraction.

Quand $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$, le quotient dans le logarithme tend vers $1/n^2$. Donc $L(t)$ tend vers la même limite $-2 \ln n$ à chaque extrémité.

On intègre d'abord sur un segment $[a, b]$: $\int_a^b \psi_{n,x}(t) dt = L(b) - L(a)$. Les limites de la primitive à chaque infini sont finies, donc les deux intégrales impropres existent. Leur somme vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{n,x}(t) dt = (-2 \ln n) - (-2 \ln n) = 0.$$

Les deux fractions composant $\psi_{n,x}$ ne sont pas intégrées séparément aux infinis : chacune pourrait avoir une intégrale divergente.

9. (c)

Question adaptée au programme actuel. La décomposition admise dans le PDF comporte des divisions par $\sigma_{n,x}$, qui s'annule exactement pour $(n, x) = (1, 0)$. Elle est donc restreinte aux autres couples et ce cas particulier est traité directement.

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà fourni dans le sujet source pour les couples où il est défini : la décomposition en deux fractions avec les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indiqués dans l'énoncé. Elle sera utilisée pour calculer l'intégrale sans séparer des termes divergents.

Si $(n, x) \neq (1, 0)$, alors $\sigma_{n,x} > 0$ et $\gamma = -n^2\alpha$. On regroupe les termes linéaires en utilisant la fonction de 9. (b) :

$$\varphi_{n,x}(t) = \frac{\alpha}{2}\psi_{n,x}(t) + \frac{\beta}{1+t^2} + \frac{\delta - \alpha nx}{1+(x-nt)^2}.$$

Pour vérifier ce regroupement, le second terme de $\alpha\psi_{n,x}/2$ vaut $(-\alpha n^2 t + \alpha nx)/(1+(x-nt)^2)$; l'ajout du terme constant résiduel rétablit bien $(\gamma t + \delta)/(1+(x-nt)^2)$.

Les trois termes regroupés ont des intégrales convergentes : 9. (b) traite le premier, et les deux autres se calculent par l'arctangente, avec un changement de variable affine pour le dernier. Ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(t) dt = \pi\beta + \frac{\pi}{n}(\delta - \alpha nx).$$

On simplifie d'abord :

$$\delta - \alpha n x = \frac{n^2(x^2 + n^2 - 1)}{\sigma_{n,x}}.$$

Puis :

$$\beta + \frac{\delta - \alpha n x}{n} = \frac{1 + x^2 - n^2 + n(x^2 + n^2 - 1)}{\sigma_{n,x}}.$$

Le numérateur est $(n+1)x^2 + n^3 - n^2 - n + 1 = (n+1)(x^2 + (n-1)^2)$. Comme ce dernier facteur quadratique est non nul hors du cas exclu :

$$\beta + \frac{\delta - \alpha n x}{n} = \frac{n+1}{x^2 + (n+1)^2}.$$

On obtient donc la formule annoncée.

Pour $(n, x) = (1, 0)$, $\varphi_{1,0}(t) = 1/(1+t^2)^2$. Une primitive est :

$$Q(t) = \frac{1}{2} \left(\arctan(t) + \frac{t}{1+t^2} \right).$$

Sa dérivée vaut $\frac{1}{2}(1/(1+t^2) + (1-t^2)/(1+t^2)^2) = 1/(1+t^2)^2$. Ses limites sont $\pi/4$ et $-\pi/4$, donc l'intégrale vaut $\pi/2$, ce qui coïncide avec $(1+1)\pi/(0+(1+1)^2)$.

La relation est ainsi établie pour tous les couples (n, x) demandés.

10. (a)

Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$F_Y(y) = P(X - \theta \leq y) = F_X(y + \theta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y).$$

Ainsi $Y \sim \mathcal{C}_0$, de densité $f_Y(y) = 1/(\pi(1+y^2))$.

10. (b)

Les variables Y_1, Y_2 sont indépendantes et possèdent des densités continues bornées. La formule de convolution s'applique. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_{S_2}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(t)f_Y(x-t) dt = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{1,x}(t) dt.$$

La question 9. (c), y compris pour $x = 0$, donne :

$$f_{S_2}(x) = \frac{2}{\pi(x^2 + 4)}.$$

En intégrant cette densité, dont une primitive est $\arctan(x/2)/\pi$, on obtient :

$$F_{S_2}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x/2).$$

Comme $2 > 0$, $F_{\bar{Y}_2}(y) = F_{S_2}(2y) = 1/2 + \arctan(y)/\pi$. Donc $\bar{Y}_2 \sim \mathcal{C}_0$: la moyenne de deux observations possède ici la même loi qu'une seule.

10. (c)

On démontre par récurrence que S_n admet la densité :

$$f_{S_n}(x) = \frac{n}{\pi(x^2 + n^2)}.$$

Pour $n = 1$, c'est la densité de Y . Supposons la formule vraie au rang n . Le lemme des coalitions appliqué à l'échantillon indépendant montre que S_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

Leurs densités sont continues et bornées ; la convolution donne :

$$f_{S_{n+1}}(x) = \frac{1}{\pi^2 n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1 + (t/n)^2)(1 + (x - t)^2)}.$$

On effectue le changement de variable affine $t = nu$, d'abord sur un segment puis aux limites des intégrales convergentes. Il vient :

$$f_{S_{n+1}}(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,x}(u) du = \frac{n+1}{\pi(x^2 + (n+1)^2)}.$$

La récurrence est établie. L'intégration de cette densité donne, pour tout $n \geq 1$:

$$F_{S_n}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x/n).$$

Finalement :

$$F_{\bar{Y}_n}(y) = F_{S_n}(ny) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(y).$$

Donc $\bar{Y}_n \sim \mathcal{C}_0$ pour tout $n \geq 1$. L'identité des lois est exacte, et non seulement asymptotique.

10. (d)

La loi faible des grands nombres du référentiel requiert notamment une espérance et une variance finies pour les variables indépendantes de même loi auxquelles on l'applique. Or Y est de loi $\mathcal{C}_0$ et n'admet pas d'espérance d'après 7. (b). Ces hypothèses ne sont pas satisfaites ; cette loi faible ne s'applique pas.

On peut également constater directement que la moyenne ne se concentre pas en 0 : pour $\varepsilon > 0$, 10. (c) donne, pour tout n :

$$P(|\bar{Y}_n| \geq \varepsilon) = 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon) > 0.$$

Cette probabilité reste constante en n , donc $\bar{Y}_n$ ne converge pas en probabilité vers 0.

11. (a)

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Chaque ligne de A représente un échantillon de taille n . On somme donc les coefficients ligne par ligne, puis on divise par n :

Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def cauchy(N, n):
    return np.random.standard_cauchy((N, n))

N = 12000
n = 200
A = cauchy(N, n)
MoyEmp = np.sum(A, axis=1) / n
x = np.linspace(-8, 8, 33)
poids = np.ones(N) / (0.5 * N)
plt.hist(MoyEmp, bins=x, weights=poids,
         facecolor="white", edgecolor="black")
plt.title("histogramme 1")
plt.show()
plt.hist(A[:, 0], bins=x, weights=poids,
         facecolor="white", edgecolor="black")
plt.title("histogramme 2")
plt.show()
```

Le tableau MoyEmp est de longueur $N = 12000$. Les moyennes des différentes lignes sont

indépendantes, puisqu'elles utilisent des ensembles disjoints de simulations indépendantes. La première colonne représente, elle aussi, 12000 observations indépendantes de loi $\mathcal{C}_0$.

Le code a été exécuté avec $N = 12000$ et $n = 200$; la forme de A était (12000, 200) et celle de MoyEmp était (12000,). Les deux graphiques ont été générés. Les poids assurent une normalisation par le nombre total d'observations et la largeur 0.5, même si certaines observations de Cauchy se trouvent hors de $[-8, 8]$.

11. (b)

Code adapté en Python pour les graphiques de la question précédente.

Les deux histogrammes présentent une allure proche, avec un sommet près de 0 et des queues de part et d'autre. Le premier représente 12000 moyennes de 200 observations de loi $\mathcal{C}_0$; le second représente 12000 observations individuelles de cette même loi.

D'après 10. (c), les deux quantités ont exactement la même loi. La proximité de leurs histogrammes illustre cette identité. La moyenne n'a donc pas ici un histogramme de plus en plus resserré autour de 0 lorsque la taille de l'échantillon augmente.

Les différences de hauteur entre les classes correspondent aux fluctuations des échantillons simulés. Un accord graphique ne remplace pas la démonstration de 10. (c).

Partie IV. La loi de la médiane empirique

On fixe $n \geq 1$ et on note $m = 2n + 1$, $M_n = \widehat{X}_{n+1}$ et $K_n = (n + 1) \binom{2n+1}{n}$. Les variables de l'échantillon sont indépendantes et ont une densité continue strictement positive. En particulier, la probabilité qu'une observation soit égale à un réel fixé est nulle.

12. (a)

Posons $a = F_X(x)$, $q = F_X(x + h) - F_X(x)$ et $b = 1 - F_X(x + h)$. Ces probabilités correspondent aux trois catégories $] - \infty, x]$, $]x, x + h]$ et $]x + h, +\infty[$.

Sur l'événement B , il y a exactement une observation dans la catégorie centrale, et elle est la médiane. Il faut donc exactement n observations dans la première catégorie et n

dans la troisième. Réciproquement, cette répartition des observations réalise B .

On choisit les n observations de la première catégorie de $\binom{2n+1}{n}$ façons. Parmi les $n+1$ indices restants, on choisit l'unique indice de la catégorie centrale de $n+1$ façons. Pour chaque choix, l'indépendance donne la probabilité $a^n qb^n$.

Les événements correspondant à ces choix sont disjoints. Leur somme donne :

$$P(B) = (n+1) \binom{2n+1}{n} F_X(x)^n (F_X(x+h) - F_X(x)) (1 - F_X(x+h))^n.$$

12. (b)

Comme $B \subset A$, $P(A) - P(B) = P(A \setminus B) \geq 0$. Sur A , il y a au moins une observation dans $]x, x+h]$. Si B ne se réalise pas, il y en a au moins deux. Ainsi :

$$A \setminus B \subset [Z \geq 2].$$

Pour que $Z \geq 2$, il faut qu'une paire distincte d'observations tombe dans l'intervalle. Donc :

$$[Z \geq 2] \subset \bigcup_{1 \leq i < j \leq m} ([x < X_i \leq x+h] \cap [x < X_j \leq x+h]).$$

La probabilité de chaque événement de paire vaut q^2 , par indépendance. La majoration d'une réunion finie par la somme des probabilités donne :

$$0 \leq P(A) - P(B) \leq \binom{m}{2} q^2.$$

On peut prendre $K = \binom{2n+1}{2}$, qui ne dépend ni de h ni même de x .

12. (c)

Méthode 1 — Accroissements de la fonction de répartition.

Notons G_n la fonction de répartition de M_n . Pour $h > 0$, $G_n(x+h) - G_n(x) = P(A)$. Avec $q_h = F_X(x+h) - F_X(x)$, les questions précédentes donnent :

$$P(B) = K_n F_X(x)^n q_h (1 - F_X(x+h))^n,$$

$$0 \leq G_n(x+h) - G_n(x) - P(B) \leq K q_h^2.$$

On divise par $h > 0$. Comme F_X est dérivable en x , $q_h/h \rightarrow f_X(x)$ et $q_h \rightarrow 0$, donc $q_h^2/h = (q_h/h)q_h \rightarrow 0$. On obtient la dérivée à droite :

$$G'_{n,+}(x) = K_n F_X(x)^n (1 - F_X(x))^n f_X(x).$$

Pour la dérivée à gauche, on applique les mêmes relations à l'intervalle $]x-h, x]$. Le même K convient par 12. (b), et :

$$\frac{F_X(x) - F_X(x-h)}{h} \rightarrow f_X(x), \quad F_X(x-h) \rightarrow F_X(x).$$

La dérivée à gauche existe et vaut la même expression. Ainsi G_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est continue et positive, puisque F_X et f_X sont continues. Comme G_n est une fonction de répartition, cela fournit la densité annoncée.

Méthode 2 — Comptage binomial et dérivation d'une somme finie.

L'événement $[M_n \leq x]$ signifie qu'au moins $n + 1$ observations sont inférieures ou égales à x . Le nombre de telles observations suit la binomiale $\mathcal{B}(m, F_X(x))$. Donc, en posant $u = F_X(x)$:

$$G_n(x) = \sum_{k=n+1}^m \binom{m}{k} u^k (1-u)^{m-k}.$$

La dérivée de ce polynôme par rapport à u se calcule terme à terme. Les identités $k \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k-1}$ et $(m-k) \binom{m}{k} = m \binom{m-1}{k}$ donnent :

$$\frac{dG_n}{du} = m \sum_{k=n+1}^m \binom{m-1}{k-1} u^{k-1} (1-u)^{m-k} - m \sum_{k=n+1}^{m-1} \binom{m-1}{k} u^k (1-u)^{m-k-1}.$$

Après le changement d'indice $j = k - 1$ dans la première somme, les termes d'indices $j = n + 1, \dots, m - 1$ se compensent. Il reste :

$$\frac{dG_n}{du} = m \binom{m-1}{n} u^n (1-u)^n.$$

Or $m \binom{m-1}{n} = (2n+1)! / (n!n!) = (n+1) \binom{2n+1}{n} = K_n$. En multipliant par $u' = f_X(x)$, on retrouve la densité demandée.

La première méthode suit les événements de 12. (a-b) ; la seconde donne directement une formule finie pour la fonction de répartition, utile aux questions de concentration.

13. (a)

Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $x - \theta > 0$ à partir d'un certain seuil. La formule de 8. (a) et l'identité de 6. (d) donnent :

$$1 - F_X(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x - \theta) \right) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{x - \theta}\right).$$

D'après 6. (b), $\arctan(t) \sim t$ en 0, donc :

$$1 - F_X(x) \sim \frac{1}{\pi(x - \theta)} \sim \frac{1}{\pi x}.$$

On a aussi $F_X(x) \rightarrow 1$ et $f_X(x) \sim 1/(\pi x^2)$. À n fixé, la densité de 12. (c) donne, par produit d'équivalents positifs :

$$f_{M_n}(x) \sim \frac{K_n}{\pi^{n+1} x^{n+2}}.$$

En multipliant par $x > 0$, on obtient :

$$x f_{M_n}(x) \sim \frac{K_n}{\pi^{n+1} x^{n+1}}.$$

C'est l'équivalent annoncé.

13. (b)

On a $n \geq 1$, donc $n + 1 > 1$. À $+\infty$, la question 13. (a) compare l'intégrande positif $|x| f_{M_n}(x)$ à une constante positive multipliée par $x^{-(n+1)}$, dont l'intégrale converge.

Il faut aussi traiter $-\infty$. L'imparité de l'arctangente donne :

$$F_X(2\theta - t) = 1 - F_X(t), \quad f_X(2\theta - t) = f_X(t).$$

En les insérant dans la formule de 12. (c), on obtient $f_{M_n}(2\theta - t) = f_{M_n}(t)$. Si $x \rightarrow -\infty$, le réel $t = 2\theta - x$ tend vers $+\infty$ et est équivalent à $|x|$. Donc :

$$|x|f_{M_n}(x) \sim \frac{K_n}{\pi^{n+1}|x|^{n+1}}.$$

La comparaison à $-\infty$ assure aussi la convergence. Sur tout segment, $|x|f_{M_n}(x)$ est continue, donc intégrable. On conclut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f_{M_n}(x) dx < +\infty.$$

Ainsi la médiane empirique possède une espérance pour tout $n \geq 1$, bien que les observations individuelles n'en aient pas.

13. (c)

La médiane empirique est une fonction de l'échantillon observé, et son calcul ne dépend pas du paramètre inconnu θ : c'est donc un estimateur de θ .

La variable $M_n - \theta$ est intégrable par 13. (b). Sa densité $u \mapsto f_{M_n}(\theta + u)$ est paire, d'après la symétrie établie dans cette même question. L'intégrande $uf_{M_n}(\theta + u)$ est donc impair et absolument intégrable.

On partage son intégrale en deux demi-droites. Le changement de variable affine $u = -v$ dans la partie négative donne l'opposé de la partie positive. Ainsi :

$$E(M_n - \theta) = 0, \quad E(M_n) = \theta.$$

La médiane empirique est donc un estimateur sans biais de θ .

13. (d)

L'espérance de M_n existe déjà. Une variance existe exactement lorsque son moment d'ordre 2 est fini. D'après 13. (a) :

$$x^2 f_{M_n}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{K_n}{\pi^{n+1} x^n}.$$

La symétrie donne le même comportement en $|x|^{-n}$ à $-\infty$. L'intégrande est continu sur les segments. Les intégrales de référence de type puissance montrent donc :

$$E(M_n^2) < +\infty \iff n > 1.$$

Comme n est un entier strictement positif, la condition nécessaire et suffisante est $n \geq 2$. Pour $n = 1$, l'intégrale diverge comme celle de $1/|x|$; l'existence de l'espérance ne suffit pas à garantir une variance.

14. (a)

Reprenons les deux égalités issues de 8. (a) : $F_X(2\theta - t) = 1 - F_X(t)$ et $f_X(2\theta - t) = f_X(t)$. Le produit $F_X(t)^n (1 - F_X(t))^n$ est invariant lorsque ses deux facteurs sont échangés. La densité de 12. (c) donne donc :

$$f_{M_n}(2\theta - t) = f_{M_n}(t).$$

Comme M_n possède une densité, la probabilité de chacune des égalités $M_n = \theta \pm \varepsilon$ est nulle. Les deux événements de queue sont disjoints pour $\varepsilon > 0$:

$$P(|M_n - \theta| \geq \varepsilon) = P(M_n \leq \theta - \varepsilon) + P(M_n \geq \theta + \varepsilon).$$

Dans la seconde intégrale, on pose $u = 2\theta - t$. Ce changement affine et la symétrie de la densité donnent :

$$\int_{\theta+\varepsilon}^{+\infty} f_{M_n}(t) dt = \int_{-\infty}^{\theta-\varepsilon} f_{M_n}(u) du.$$

Les deux probabilités sont égales, d'où $P(|M_n - \theta| \geq \varepsilon) = 2F_{M_n}(\theta - \varepsilon)$.

14. (b)

Fixons $\varepsilon > 0$ et posons $a = \theta - \varepsilon$ et $q = F_X(a)$. Comme F_X est strictement croissante et $F_X(\theta) = 1/2$, on a $0 < q < 1/2$.

Méthode 1 — Majoration de l'intégrale de la densité.

Pour $t \leq a$, $0 \leq F_X(t) \leq q < 1/2$. La fonction $u \mapsto u(1 - u)$ est croissante sur $[0, 1/2]$, donc $F_X(t)(1 - F_X(t)) \leq q(1 - q)$. La formule de 12. (c) donne :

$$F_{M_n}(a) \leq K_n[q(1 - q)]^n \int_{-\infty}^a f_X(t) dt = qK_n[q(1 - q)]^n.$$

Le binôme fournit

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1},$$

donc $K_n \leq (n + 1)2^{2n+1} = 2(n + 1)4^n$. Ainsi :

$$F_{M_n}(a) \leq 2q(n + 1)[4q(1 - q)]^n.$$

Or $r = 4q(1 - q)$ vérifie $0 < r < 1$. Par croissance comparée, $(n + 1)r^n \rightarrow 0$. La question

14. (a) entraîne alors $P(|M_n - \theta| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$.

Méthode 2 — Concentration d'un comptage binomial.

Soit

$$B_n = \sum_{i=1}^{2n+1} \mathbf{1}_{[X_i \leq a]}.$$

Les indicateurs sont indépendants de même loi de Bernoulli de paramètre q . Donc $B_n \sim \mathcal{B}(2n+1, q)$.

L'événement $[M_n \leq a]$ équivaut à $[B_n \geq n+1]$. Sur cet événement, $B_n/(2n+1) > 1/2$, donc :

$$\left| \frac{B_n}{2n+1} - q \right| \geq \frac{1}{2} - q > 0.$$

La moyenne de ce comptage a pour espérance q et pour variance $q(1-q)/(2n+1)$. Bienaymé–Tchebychev donne :

$$F_{M_n}(a) \leq \frac{q(1-q)}{(2n+1)(1/2-q)^2} \rightarrow 0.$$

Par 14. (a), on retrouve la convergence en probabilité de M_n vers θ .

La première méthode utilise la densité explicite de la médiane. La seconde s'appuie seulement sur un comptage borné ; elle ne nécessite aucun moment des observations de Cauchy elles-mêmes.

14. (c)

La fonction de répartition de la variable certaine θ vaut 0 pour $x < \theta$ et 1 pour $x \geq \theta$. Elle est continue en tous les points autres que θ .

Si $x < \theta$, alors $[M_n \leq x] \subset [|M_n - \theta| \geq \theta - x]$, donc $F_{M_n}(x) \rightarrow 0$ par 14. (b).

Si $x > \theta$, $[M_n > x] \subset [|M_n - \theta| \geq x - \theta]$, donc $1 - F_{M_n}(x) \rightarrow 0$ et $F_{M_n}(x) \rightarrow 1$.

On a ainsi la convergence des fonctions de répartition en chaque point de continuité de la fonction limite. La suite converge donc en loi vers la variable certaine θ . Aucune convergence au point de discontinuité $x = \theta$ n'est exigée.

15. (a)

Posons $m = 2n + 1$ et $b_n = \pi/(2\sqrt{m}) > 0$. L'égalité $W_{n+1} = (M_n - \theta)/b_n$ est une transformation affine croissante. Par dérivation de $P(W_{n+1} \leq x) = F_{M_n}(\theta + b_n x)$, sa densité est :

$$f_{W_{n+1}}(x) = b_n f_{M_n}(\theta + b_n x).$$

D'après 8. (a), $F_X(\theta + b_n x) = 1/2 + \arctan(b_n x)/\pi$, donc :

$$F_X(\theta + b_n x)(1 - F_X(\theta + b_n x)) = \frac{1}{4} - \frac{\arctan(b_n x)^2}{\pi^2}.$$

Par ailleurs, $f_X(\theta + b_n x) = 1/(\pi(1 + b_n^2 x^2))$ et $b_n/\pi = 1/(2\sqrt{m})$. En substituant dans la densité de 12. (c), on obtient :

$$f_{W_{n+1}}(x) = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi^2} \arctan\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}\right)^2 \right]^n \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)} \right)^{-1}.$$

La densité est continue sur $\mathbb{R}$. Le terme entre crochets est strictement positif, puisque la valeur absolue de l'arctangente est strictement inférieure à $\pi/2$.

15. (b)

On sépare trois facteurs. Pour x fixé, posons :

$$C_n = \frac{n+1}{2\sqrt{2n+1}} \binom{2n+1}{n} 4^{-n}, \quad q_n(x) = \frac{4}{\pi^2} \arctan\left(\frac{\pi x}{2\sqrt{2n+1}}\right)^2.$$

Alors :

$$f_{W_{n+1}}(x) = C_n (1 - q_n(x))^n \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{4(2n+1)}\right)^{-1}.$$

Commençons par le facteur combinatoire. L'identité $(n+1)\binom{2n+1}{n} = (2n+1)\binom{2n}{n}$ donne :

$$C_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{2} \binom{2n}{n} 4^{-n}.$$

La formule de Stirling démontrée en 5 permet de calculer :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Donc $C_n \sim \sqrt{2n+1}/(2\sqrt{\pi n}) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi}$.

Pour le facteur de puissance, si $x \neq 0$, l'équivalent $\arctan(t) \sim t$ en 0 donne :

$$q_n(x) \sim \frac{x^2}{2n+1}, \quad nq_n(x) \rightarrow \frac{x^2}{2}, \quad q_n(x) \rightarrow 0.$$

Pour n assez grand, $0 \leq q_n(x) < 1$. Le développement limité $\ln(1-u) = -u + O(u^2)$ donne :

$$n \ln(1 - q_n(x)) = -nq_n(x) + O(nq_n(x)^2) \rightarrow -\frac{x^2}{2},$$

car $nq_n(x)^2 = (nq_n(x))q_n(x) \rightarrow 0$. Ainsi $(1 - q_n(x))^n \rightarrow e^{-x^2/2}$. Pour $x = 0$, $q_n(0) = 0$ et ce facteur vaut exactement 1, ce qui donne la même limite.

Enfin, le dernier facteur tend vers 1. En multipliant les trois limites :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{W_{n+1}}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Résultat admis dans cette version adaptée, déjà admis dans le PDF : cette convergence des densités implique ici que W_{n+1} converge en loi vers une normale centrée réduite T . On utilise précisément cette convergence en 15. (c), sans invoquer un théorème général de passage de la limite sous une intégrale.

15. (c)

Pour $0 < \alpha \leq 1$, $t_\alpha = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \geq 0$. Par symétrie de la normale :

$$P(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 1 - \alpha.$$

La convergence en loi admise et la continuité de Φ aux deux bornes donnent :

$$P(|W_{n+1}| \leq t_\alpha) \rightarrow 1 - \alpha.$$

Chaque W_{n+1} possède une densité, donc il n'y a pas de différence entre les probabilités avec bornes ouvertes ou fermées. La définition de W_{n+1} transforme cet événement en :

$$|M_n - \theta| \leq \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}}.$$

L'intervalle aléatoire recherché est donc :

$$\left[\widehat{X}_{n+1} - \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}}, \widehat{X}_{n+1} + \frac{\pi t_\alpha}{2\sqrt{2n+1}} \right].$$

Il est centré sur la médiane observée et sa probabilité de contenir θ tend vers $1 - \alpha$. Pour $\alpha = 1, t_\alpha = 0$: l'intervalle se réduit à un point et son niveau est 0, ce qui correspond bien au cas limite demandé.

16.

Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel.

Chaque ligne représente un échantillon de taille impaire $2n + 1$. On trie les lignes, et la médiane est la valeur centrale. En Python, les indices commencent à 0 : la position centrale est donc l'indice n , et non $n + 1$.

Python

```
import numpy as np

def cauchy(N, n):
    return np.random.standard_cauchy((N, n))

A = cauchy(p, 2 * n + 1)
S = np.sort(A, axis=1)
MedianeEmp = S[:, n]
W = (2 * np.sqrt(2 * n + 1) / np.pi) * MedianeEmp
```

On suppose que $p \geq 10000$ et $n \geq 2$ ont été définis avant ce bloc. Le tri est croissant ; pour une taille impaire, la valeur centrale est identique à celle obtenue avec un tri décroissant. Comme $\theta = 0$, aucune soustraction du paramètre n'est nécessaire dans W .

Les tableaux `MedianeEmp` et `W` sont de longueur p . Le code a été exécuté avec $p = 10000$ et $n = 2$, puis avec $p = 10000$ et $n = 100$; les dimensions et la concordance des médianes avec un calcul direct ont été vérifiées. Cette simulation produit les variables demandées et ne constitue pas une preuve de leur convergence.

Relevé des adaptations

- 9, 9. (c) : restriction de la décomposition admise aux couples $(n, x) \neq (1, 0)$, car ses coefficients sont indéfinis pour $(1, 0)$; ce cas est intégré directement, et le résultat final reste valable pour tous les couples.
- 10 : précision locale que la notation S_n est réutilisée avec une nouvelle définition, afin de distinguer les sommes de Cauchy des sommes d'exponentielles de la partie I.
- 11. (a), 11. (b), 16 : code adapté en Python, avec explication des commandes supplémentaires, des axes de sommation, de la normalisation des histogrammes et du tri; conservation des blancs à compléter dans le sujet.
- 11. (b) : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées. Les deux panneaux, leurs titres, leurs graduations et leurs trente-deux classes de largeur 0.5 sont conservés.