



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2017

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, mathématiques, 2017

On conserve les notations du sujet adapté. Tous les scalaires et tous les polynômes sont réels. Les produits vides valent 1.

Partie I — Quelques propriétés des polynômes de Bernstein

1.a) Développons les trois polynômes dans $(1, X, X^2)$:

$$B_{2,0} = 1 - 2X + X^2, \quad B_{2,1} = 2X - 2X^2, \quad B_{2,2} = X^2.$$

Leurs coordonnées forment les colonnes de la matrice recherchée :

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.b) La matrice K_2 est triangulaire inférieure et ses coefficients diagonaux 1, 2, 1 sont tous non nuls. Elle est donc inversible. Ses colonnes forment une base de $\mathbb{R}^3$, et les trois polynômes correspondants forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Aucun calcul de déterminant n'est nécessaire.

1.c) Pour $A_0 = 1$, les trois valeurs utilisées sont 1 ; pour $A_1 = X$, elles sont 0, 1/2, 1 ; pour $A_2 = X^2$, elles sont 0, 1/4, 1. Ainsi,

$$T_2(A_0) = B_{2,0} + B_{2,1} + B_{2,2} = 1,$$

$$T_2(A_1) = \frac{1}{2}B_{2,1} + B_{2,2} = X,$$

$$T_2(A_2) = \frac{1}{4}B_{2,1} + B_{2,2} = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2.$$

La matrice est donc

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Elle est triangulaire, donc ses valeurs propres sont 1 et $1/2$. Pour déterminer les espaces propres, écrivons $P = a + bX + cX^2$. L'équation $T_2(P) = P$ impose $c = 0$, d'où

$$E_1(T_2) = \text{Vect}(1, X).$$

L'équation $T_2(P) = \frac{1}{2}P$ donne $a = 0$ et $b = -c$, donc

$$E_{1/2}(T_2) = \text{Vect}(X^2 - X).$$

Les dimensions des deux espaces propres sont 2 et 1, ce qui fournit notamment une base propre $(1, X, X^2 - X)$.

2.a) Méthode 1 — Premier coefficient non nul

Supposons

$$\sum_{k=0}^n c_k B_{n,k} = 0.$$

S'il existe un coefficient non nul, soit j le plus petit indice tel que $c_j \neq 0$. Le polynôme $B_{n,j}$ a pour terme de plus bas degré $\binom{n}{j}X^j$, alors que tous les $B_{n,k}$ avec $k > j$ sont divisibles par X^{j+1} . Le coefficient de X^j dans la combinaison est donc $c_j \binom{n}{j}$, non nul, contradiction. La famille est libre. Elle possède $n + 1$ éléments dans un espace de dimension $n + 1$, donc est une base.

Méthode 2 — Changement de variable réel

Pour $x \in (0, 1)$, diviser une relation

$$\sum c_k B_{n,k}(x) = 0$$

par $(1-x)^n > 0$ donne

$$\sum_{k=0}^n c_k \binom{n}{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k = 0.$$

L'application $x \mapsto x/(1-x)$ prend toutes les valeurs de $(0, +\infty)$: pour $t > 0$, choisir $x = t/(1+t)$. Le polynôme

$$R(t) = \sum c_k \binom{n}{k} t^k$$

s'annule donc en une infinité de points. Un polynôme non nul de degré au plus n a au plus n racines ; ainsi $R = 0$, et $c_k = 0$ pour tout k . La famille est libre, donc est une base.

La première méthode exploite les degrés les plus bas ; la seconde transforme la relation en une relation entre monômes.

2.b) Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la définition donne directement

$T_n(aP + bQ) = aT_n(P) + bT_n(Q)$. Les $B_{n,k}$ appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$, donc T_n est un endomorphisme de cet espace.

Si $T_n(P) = 0$, la liberté de la famille de Bernstein impose $P(k/n) = 0$ pour $k = 0, \dots, n$. Ces $n+1$ points sont distincts ; comme $\deg P \leq n$, $P = 0$. Le noyau de T_n est donc nul. Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif : T_n est un automorphisme.

2.c) La formule du binôme donne

$$T_n(A_0)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1.$$

Pour $A_1 = X$, le terme $k = 0$ est nul et l'identité $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ donne

$$\begin{aligned} T_n(A_1)(X) &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= X \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} X^j (1-X)^{n-1-j} = X. \end{aligned}$$

Ces égalités restent valables pour $n = 1$.

2.d) Posons $Q_k = T_n(A_k)$. On utilise l'identité particulière admise dans le sujet :

$$Q_{k+1} = \frac{1}{n} X(1-X)Q'_k + XQ_k \quad (0 \leq k \leq n-1).$$

La question 2.c donne $Q_0 = 1$, de degré 0 et de coefficient dominant $\alpha_0 = 1$. Supposons Q_k de degré k et de coefficient dominant $\alpha_k > 0$. Le degré de Q_{k+1} est au plus $k+1$. Son coefficient de X^{k+1} vaut

$$\alpha_k - \frac{k}{n} \alpha_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \alpha_k.$$

Pour $k \leq n-1$, ce coefficient est strictement positif. Ainsi Q_{k+1} a exactement degré $k+1$ et son coefficient dominant est positif. Par récurrence, $\deg T_n(A_k) = k$ pour tout $0 \leq k \leq n$.

2.e) La récurrence précédente donne

$$\alpha_0 = 1, \quad \alpha_{k+1} = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \alpha_k.$$

Donc, pour $0 \leq k \leq n$,

$$\alpha_k = \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

La formule donne 1 pour $k = 0$ et $k = 1$. Pour $n \geq 2$, on a

$$1 = \alpha_0 = \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > 0.$$

Dans la base $(1, X, \dots, X^n)$, la matrice de T_n est triangulaire supérieure, puisque $T_n(X^k)$ a degré k . Sa diagonale est $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$: ce sont ses valeurs propres.

La valeur propre 1 possède au moins les deux vecteurs propres indépendants $1, X$. Les $n - 1$ autres valeurs propres $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont distinctes et possèdent chacune un espace propre de dimension au moins 1. La somme directe de tous ces espaces propres a donc dimension au moins $2 + (n - 1) = n + 1$, soit toute la dimension de l'espace. Par conséquent, T_n est diagonalisable. En particulier, son espace propre pour 1 a exactement dimension 2 et les autres ont dimension 1.

Si $n = 1$, la question 2.c montre que T_1 fixe la base $(1, X)$, donc T_1 est l'identité et est également diagonalisable. La valeur propre double 1 ne doit pas être ignorée dans l'argument.

3.a) La loi binomiale donne $E(Z_n) = nz$ et $V(Z_n) = nz(1 - z)$. Ainsi,

$$E(\bar{Z}_n) = z, \quad V(\bar{Z}_n) = \frac{z(1 - z)}{n}.$$

Pour $\delta > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$P(|\bar{Z}_n - z| > \delta) \leq \frac{z(1 - z)}{n\delta^2} \rightarrow 0.$$

C'est la définition de la convergence en probabilité vers z . Pour $z = 0$ ou $z = 1$, la variance est nulle et $\bar{Z}_n = z$ presque sûrement : la conclusion reste valable. Aucune indépendance entre les différentes variables Z_n n'est nécessaire.

3.b) La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[0, 1]$. Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint son maximum. Il existe donc $M = \max_{[0,1]} |f|$, fini et positif ou nul.

3.c) Puisque $0 \leq \bar{Z}_n \leq 1$, on a toujours $|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq 2M$. Sur U_n , le membre de droite proposé vaut $2M$; sur son contraire, il vaut ε , et la définition de $\bar{U}_n$ donne justement $|f(\bar{Z}_n) - f(z)| \leq \varepsilon$. L'inégalité est donc vraie sur les deux événements qui forment un système complet.

3.d) Pour $\varepsilon > 0$, la continuité de f en z fournit $\delta > 0$ tel que, pour $t \in [0, 1]$, $|t - z| < \delta$ implique $|f(t) - f(z)| \leq \varepsilon$. Donc

$$U_n \subset \{|\bar{Z}_n - z| \geq \delta\} \subset \{|\bar{Z}_n - z| > \delta/2\}.$$

La question 3.a implique $P(U_n) \rightarrow 0$. Les variables $f(\bar{Z}_n)$ sont bornées par M ; leur espérance existe. En prenant les espérances dans la question 3.c, puis en utilisant la valeur absolue d'une espérance,

$$|E(f(\bar{Z}_n)) - f(z)| \leq E(|f(\bar{Z}_n) - f(z)|) \leq 2MP(U_n) + \varepsilon.$$

Pour conclure explicitement, soit $\eta > 0$ et choisissons $\varepsilon = \eta/2$. Si $M > 0$, pour n assez grand, $2MP(U_n) \leq \eta/2$, donc le membre de gauche est au plus η . Si $M = 0$, $f = 0$ et la conclusion est immédiate. On a donc $E(f(\bar{Z}_n)) \rightarrow f(z)$.

Par la formule de transfert pour la variable finie Z_n ,

$$E(f(\bar{Z}_n)) = \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} z^k (1-z)^{n-k} = f_n(z).$$

La convention $0^0 = 1$ rend cette écriture valable aux extrémités $z = 0, 1$. Ainsi $f_n(z) \rightarrow f(z)$ pour chaque $z \in [0, 1]$. Aucun échange entre une limite et une espérance n'a été supposé : la convergence de ces espérances a été démontrée par l'inégalité précédente.

4.a) Code adapté en Python. La commande NumPy dédiée fournit directement la réalisation demandée :

Python

```
import numpy as np

def binom(n, z):
    Z = np.random.binomial(n, z)
    return Z
```

Les paramètres sont le nombre d'essais n et la probabilité de succès $z \in [0, 1]$. La valeur renvoyée est un entier de 0 à n . Le code a été exécuté, y compris pour les paramètres limites $z = 0, 1$.

4.b) Code adapté en Python. Le code complet à exécuter est

Python

```
import numpy as np

def binom(n, z):
    return np.random.binomial(n, z)

def f(x):
    if x == 0:
        return 0.0
    return -x * np.log(x)

z = 0.4
n = 100
N = 1000
S = 0.0
for k in range(N):
    S = S + f(binom(n, z) / n)
print(S / N)
```

La condition $x == 0$ évite de calculer $\ln 0$. Le prolongement est continu en 0, car $x \ln x \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. La fonction est donc continue et bornée sur $[0, 1]$; les valeurs simulées ont espérance et variance finies.

Pour $n = 100$ fixé, chaque terme est une réalisation de $f(Z_{100}/100)$, avec $Z_{100} \sim \mathcal{B}(100, 0,4)$. Les appels successifs réalisent des tirages indépendants. La moyenne affichée est une approximation par Monte-Carlo de

$$\mathbb{E} \left(f \left(\frac{Z_{100}}{100} \right) \right) = f_{100}(0,4).$$

La loi faible des grands nombres justifie cette approximation lorsque le nombre de tirages N augmente. La question 3.d fournit une seconde approximation : lorsque n augmente, $f_n(0,4) \rightarrow f(0,4)$. Les deux méthodes sont donc la simulation par Monte-Carlo d'une espérance et l'approximation par les polynômes de Bernstein. Augmenter N réduit l'erreur de simulation pour n fixé ; augmenter n réduit l'erreur d'approximation de Bernstein.

Le calcul de la somme finie donne numériquement $f_{100}(0,4) \simeq 0,363498$, tandis que $f(0,4) = -0,4 \ln(0,4) \simeq 0,366516$. Le programme a été exécuté ; sa sortie est aléatoire et n'est pas tenue d'être égale à l'une de ces deux valeurs. Une simulation ne prouve pas la convergence.

Partie II — Les polynômes d'interpolation de Lagrange

5.a) L'application Φ est linéaire, puisque chaque évaluation $P \mapsto P(x_i)$ l'est. Si $\Phi(P) = 0$, P possède les $n + 1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_n$. Comme $\deg P \leq n$, il est nul. Ainsi Φ est injective. Les espaces de départ et d'arrivée ont tous deux dimension $n + 1$; par le théorème du rang, Φ est également surjective. C'est donc un isomorphisme.

5.b) Définissons

$$R_i(X) = \prod_{k \neq i} (X - x_k) / (x_i - x_k).$$

Tous les dénominateurs sont non nuls. Ce polynôme a degré n , vaut 1 en x_i et 0 en chacun des autres x_j . Ainsi $\Phi(R_i) = e_i$. L'unicité de l'antécédent de e_i par l'isomorphisme Φ donne $L_i = R_i$, ce qui établit la formule.

5.c) L'application Ψ est bilinéaire et symétrique, par les propriétés des évaluations et du

produit réel. De plus,

$$\Psi(P, P) = \sum_{k=0}^n P(x_k)^2 \geq 0.$$

Si cette somme est nulle, tous les $P(x_k)$ sont nuls ; l'injectivité de Φ donne $P = 0$.

Réciproquement, $\Psi(0, 0) = 0$. La positivité est donc définie : Ψ est un produit scalaire.

Comme $L_i(x_k)$ vaut 1 si $i = k$ et 0 sinon,

$$\Psi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(x_k)L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

La famille est orthonormée, donc libre. Ses $n + 1$ éléments en font une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

5.d) Question adaptée au programme actuel : la convention de passage est explicitée dans le sujet : les colonnes de A sont les coordonnées de $1, X, \dots, X^n$ dans la base $(L_0, \dots, L_n)$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, les valeurs aux nœuds montrent que

$$P = \sum_{i=0}^n P(x_i)L_i.$$

En effet, les deux membres ont les mêmes valeurs en tous les x_i et leur différence, de degré au plus n , est donc nulle. En prenant $P = X^j$, on obtient

$$X^j = \sum_{i=0}^n x_i^j L_i.$$

Ainsi, en numérotant les indices de 0 à n ,

$$A_{i,j} = x_i^j, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

Son inversibilité résulte de l'existence des deux bases, sans recours à une formule de déterminant. Dans le sens opposé, la matrice dont les colonnes sont les coefficients des L_i dans la base canonique est A^{-1} . Cette précision distingue les deux conventions parfois utilisées pour une matrice de changement de coordonnées.

5.e) Méthode 1 — Utilisation de l'isomorphisme

Le vecteur $(f(x_0), \dots, f(x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ possède un unique antécédent P_f par Φ . C'est exactement le polynôme d'interpolation demandé. Les coordonnées dans la base de Lagrange sont les valeurs aux nœuds, donc

$$P_f = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i.$$

Méthode 2 — Construction et unicité par les racines

Définissons directement

$$P = \sum f(x_i) L_i.$$

Il a degré au plus n et, en évaluant en x_j , on obtient $P(x_j) = f(x_j)$. Il satisfait donc les contraintes. Si un autre polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ les satisfait, $P - Q$ possède les $n + 1$ racines distinctes x_i , donc $P - Q = 0$. Ainsi $P = P_f$ est unique.

La première méthode organise le résultat comme la résolution d'un système linéaire bijectif; la seconde fournit directement une formule calculable. La continuité de f n'est pas nécessaire pour ces seules contraintes d'interpolation, mais elle fait partie des hypothèses du sujet.

6.a) Les deux polynômes Q_f, P_f prennent les mêmes valeurs en $x_0, \dots, x_n$, donc $Q_f - P_f$ est divisible par chaque $X - x_i$. Les racines étant distinctes, leur produit w divise cette différence. On a $\deg(Q_f - P_f) \leq n + 1 = \deg w$, donc le quotient est une constante δ , éventuellement nulle. Ainsi $Q_f - P_f = \delta w$.

Comme $\bar{x}$ n'est pas un nœud, $w(\bar{x}) \neq 0$, et on peut aussi déterminer cette constante :

$$\delta = \frac{f(\bar{x}) - P_f(\bar{x})}{w(\bar{x})}.$$

Cette égalité sera reliée à une dérivée de f dans la question 6.c.

6.b) Le polynôme Q_f interpole f en tous les points x_i ainsi qu'en $\bar{x}$, donc $h = f - Q_f$ s'annule en ces $n + 2$ points distincts. La fonction h est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$.

Rangeons les $n + 2$ zéros dans l'ordre croissant. Sur chaque segment entre deux zéros consécutifs, le théorème de Rolle s'applique : la fonction est continue sur ce segment et dérivable sur son intérieur. Il fournit au moins $n + 1$ zéros distincts de h' entre les premiers zéros. On recommence avec h' , puis h'' , jusqu'à $h^{(n+1)}$. Après $n + 1$ applications, on obtient au moins un zéro θ de $h^{(n+1)}$ strictement entre le plus petit et le plus grand des zéros initiaux, donc dans (a, b) .

6.c) La question 6.a donne $Q_f = P_f + \delta w$. Le degré de P_f est au plus n , tandis que w est unitaire de degré $n + 1$. Ainsi $Q_f^{(n+1)} = \delta(n + 1)!$. À la valeur θ fournie par la question 6.b,

$$0 = h^{(n+1)}(\theta) = f^{(n+1)}(\theta) - \delta(n + 1)!.$$

Donc $\delta = f^{(n+1)}(\theta)/(n + 1)!$. En évaluant $Q_f - P_f = \delta w$ en $\bar{x}$ et en utilisant $Q_f(\bar{x}) = f(\bar{x})$, on obtient la formule d'erreur demandée.

6.d) La dérivée $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[a, b]$, donc sa valeur absolue y est bornée et atteint un maximum fini. Si t n'est pas un nœud, la question 6.c appliquée à $\bar{x} = t$ donne

$$|f(t) - P_f(t)| \leq \frac{|w(t)|}{(n + 1)!} \sup_{[a, b]} |f^{(n+1)}|.$$

Si t est un nœud, $f(t) = P_f(t)$ et $w(t) = 0$, donc l'inégalité est aussi vraie. Elle est ainsi valable sur tout le segment.

Partie III — Exemple d'interpolation et phénomène de Runge

7.a) Le polynôme $x \mapsto x^2 + \rho^2$ est de classe C^∞ et est strictement positif sur $\mathbb{R}$ puisque $\rho > 0$. La fonction inverse est de classe C^∞ sur $(0, +\infty)$; par composition, $f_\rho(x) = 1/(x^2 + \rho^2)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

7.b) La fonction f_ρ est paire : $f_\rho(-x) = f_\rho(x)$. En dérivant cette identité n fois par la règle de la chaîne, on obtient

$$(-1)^n f_\rho^{(n)}(-x) = f_\rho^{(n)}(x).$$

Une justification par récurrence consiste à dériver chaque fois l'identité à l'ordre précédent; les dérivées existent à tous les ordres d'après 7.a. La prise des valeurs absolues donne l'égalité demandée.

7.c) Si $|x| < \rho$, le réel $q = -x^2/\rho^2$ vérifie $|q| < 1$. La série géométrique converge absolument et sa somme vaut $1/(1 - q)$. Donc

$$\frac{1}{x^2 + \rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{1 + x^2/\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{x^2}{\rho^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} x^{2k}.$$

On a uniquement utilisé la somme d'une série géométrique en un point fixé, sans invoquer de théorie générale sur les séries de fonctions.

Identités utilisées dans la question 8

Question adaptée au programme actuel. Résultat admis dans cette version adaptée : pour $\rho > 0$, $|x| < \rho$ et tout entier $r \geq 1$,

$$f_\rho^{(r)}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \geq r}} \frac{(-1)^k}{\rho^{2k+2}} \frac{(2k)!}{(2k-r)!} x^{2k-r},$$

$$v^{(r)}(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \geq r}} \frac{1}{\rho^{2k}} \frac{(2k)!}{(2k-r)!} x^{2k-r},$$

avec convergence absolue de ces deux séries. On utilise ces identités particulières uniquement pour la comparaison des dérivées en 8.c. Aucun échange général entre une dérivée et une somme infinie n'est supposé.

8.a) En mettant au même dénominateur, on a

$$\frac{p}{\rho-x} + \frac{q}{\rho+x} = \frac{\rho(p+q) + (p-q)x}{\rho^2 - x^2}.$$

L'égalité à $\rho^2/(\rho^2 - x^2)$ pour tout x de l'intervalle équivaut à $p - q = 0$ et $\rho(p+q) = \rho^2$.

Comme $\rho > 0$, on obtient $p = q = \rho/2$. Donc

$$v(x) = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{\rho-x} + \frac{1}{\rho+x} \right).$$

Par dérivations successives de ces fonctions rationnelles, pour $r \geq 0$,

$$v^{(r)}(x) = \frac{\rho r!}{2} \left(\frac{1}{(\rho-x)^{r+1}} + \frac{(-1)^r}{(\rho+x)^{r+1}} \right).$$

Les dénominateurs restent strictement positifs sur $(-\rho, \rho)$.

8.b) Méthode 1 — Parité

La fonction v est paire, puisque son expression ne dépend que de x^2 . Le même raisonnement par dérivation que dans 7.b donne $v^{(n)}(-x) = (-1)^n v^{(n)}(x)$. Ainsi $|v^{(n)}(-x)| = |v^{(n)}(x)|$.

Méthode 2 — Formule explicite des dérivées

Dans la formule de 8.a, remplacer x par $-x$ échange les deux dénominateurs. On obtient

$$v^{(n)}(-x) = \frac{\rho n!}{2} \left(\frac{1}{(\rho+x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(\rho-x)^{n+1}} \right) = (-1)^n v^{(n)}(x).$$

La prise des valeurs absolues donne de nouveau l'égalité. La première méthode est réutilisable pour toute fonction paire suffisamment dérivable ; la seconde contrôle directement les signes dans la décomposition rationnelle.

8.c) Pour $0 \leq x < \rho$, tous les termes de la série admise pour $v^{(n)}(x)$ sont positifs ou nuls. En utilisant la convergence absolue de celle de $f_\rho^{(n)}(x)$, l'inégalité triangulaire sur les sommes partielles puis le passage à la limite donnent

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 2k \geq n}} \frac{1}{\rho^{2k+2}} \frac{(2k)!}{(2k-n)!} x^{2k-n} = \frac{1}{\rho^2} v^{(n)}(x).$$

Sur cet intervalle, $v^{(n)}(x) \geq 0$, donc c'est la majoration par $|v^{(n)}(x)|$. Elle vaut aussi pour $x = 0$ avec la convention du sujet ; pour n impair, tous les termes y sont nuls.

Si $-\rho < x < 0$, on applique l'inégalité en $|x|$, puis les égalités de valeurs absolues des questions 7.b et 8.b. On obtient donc, pour tout $|x| < \rho$,

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho^2} |v^{(n)}(x)|.$$

8.d) Si $\rho > 1$ et $x \in [-1, 1]$, alors $|x| < \rho$ et $\rho - x \geq \rho - 1 > 0$, $\rho + x \geq \rho - 1 > 0$. La formule de 8.a et l'inégalité triangulaire donnent

$$|v^{(n)}(x)| \leq \frac{\rho n!}{2} \left(\frac{1}{(\rho - x)^{n+1}} + \frac{1}{(\rho + x)^{n+1}} \right) \leq \frac{\rho n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

En multipliant par $1/\rho^2$ et en utilisant 8.c, on conclut à

$$|f_\rho^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{\rho} \frac{n!}{(\rho - 1)^{n+1}}.$$

9.a) Posons $h = 2/n$. Comme $x \in (x_{k,n}, x_{k+1,n})$, on peut écrire $x = x_{k,n} + \theta h$, avec $0 < \theta < 1$.

Pour $0 \leq j \leq k$, on a $|x - x_{j,n}| = h(k - j + \theta) \leq h(k - j + 1)$. En multipliant ces $k + 1$

inégalités,

$$\prod_{j=0}^k |x - x_{j,n}| \leq h^{k+1} (k+1)!.$$

Pour $k+1 \leq j \leq n$, $|x - x_{j,n}| = h(j - k - \theta) \leq h(j - k)$, donc

$$\prod_{j=k+1}^n |x - x_{j,n}| \leq h^{n-k} (n - k)!.$$

Le produit des deux majorations donne $|w_n(x)| \leq (2/n)^{n+1} (k+1)! (n-k)!$.

Pour la seconde inégalité, posons $a = k+1 \geq 1$ et $b = n - k \geq 1$, de sorte que $a + b = n + 1$. On a

$$\frac{n!}{a!} = \prod_{j=1}^{b-1} (a + j) \geq \prod_{j=1}^{b-1} (j + 1) = b!.$$

L'égalité avec des produits vides est valable si $b = 1$. Ainsi $a!b! \leq n!$, d'où la seconde borne.

9.b) Question adaptée au programme actuel : on établit l'estimation nécessaire à partir de développements limités et de séries convergentes, sans invoquer de formule asymptotique connue pour les factorielles.

Définissons, pour $n \geq 1$,

$$s_n = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n.$$

Le calcul de la différence donne

$$s_{n+1} - s_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

La fonction $t \mapsto \ln(1 + t)$ est de classe C^4 au voisinage de 0. La formule de Taylor avec une dérivée quatrième bornée sur un petit segment fournit

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4).$$

En substituant simplement $t = 1/n$ puis en multipliant par $n + 1/2$, on obtient

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

et donc

$$s_{n+1} - s_n = -\frac{1}{12n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Il existe ainsi une constante K_0 telle que $|s_{n+1} - s_n| \leq K_0/n^2$ pour n assez grand. La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge; la série des différences est absolument convergente. Par télescopage,

$$s_n = s_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (s_{j+1} - s_j)$$

converge vers un réel ℓ .

Posons $c_n = e^{s_n}$. Par continuité de l'exponentielle, $c_n \rightarrow C = e^\ell > 0$. La définition donne l'identité exacte

$$n! = c_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

La suite (c_n) étant convergente, elle est majorée par une constante $K > 0$. Pour un x qui n'est pas un nœud, 9.a donne alors

$$|w_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{2K}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{e}\right)^n = \frac{eK}{\sqrt{n}} \left(\frac{2}{e}\right)^{n+1}.$$

Choisissons n_0 assez grand pour que $eK/\sqrt{n} \leq 1$ pour tout $n \geq n_0$. On obtient la borne demandée. Aux nœuds, $w_n(x) = 0$, donc elle est également vraie. Ce choix de n_0 est indépendant de x ; la majoration est uniforme sur $[-1, 1]$.

La convergence positive de c_n sera aussi utilisée en 12.c. Aucune valeur du nombre C n'est nécessaire.

9.c) Pour $\rho > 1$, la question 6.d appliquée à f_ρ et la question 8.d à l'ordre $n + 1$ donnent

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| \leq \frac{|w_n(x)|}{(n+1)!} \frac{1}{\rho} \frac{(n+1)!}{(\rho-1)^{n+2}} = \frac{|w_n(x)|}{\rho(\rho-1)^{n+2}}.$$

Pour $n \geq n_0$, la question 9.b fournit

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho, n}(x)| \leq \frac{1}{\rho(\rho-1)} \left(\frac{2}{e(\rho-1)} \right)^{n+1}.$$

Si $\rho > 1 + 2/e$, la raison $2/[e(\rho-1)]$ est strictement comprise entre 0 et 1, donc le membre de droite tend vers 0. Cela établit la condition suffisante demandée, et même la convergence uniforme sur $[-1, 1]$, puisque la borne est indépendante de x . L'argument ne conclut pas au paramètre limite $\rho = 1 + 2/e$.

10.a) Pour $\rho > 0$, l'intégrande est continue sur $[-1, 1]$; par parité,

$$H(\rho) = \frac{1}{2} \int_0^1 \ln(t^2 + \rho^2) dt.$$

Une intégration par parties sur le segment $[0, 1]$, avec $u(t) = \ln(t^2 + \rho^2)$ et la primitive t de 1, donne

$$\int_0^1 \ln(t^2 + \rho^2) dt = \ln(1 + \rho^2) - \int_0^1 \frac{2t^2}{t^2 + \rho^2} dt.$$

On écrit $t^2/(t^2 + \rho^2) = 1 - \rho^2/(t^2 + \rho^2)$ et on utilise la primitive $\frac{1}{\rho} \arctan(t/\rho)$ de $1/(t^2 + \rho^2)$. On obtient

$$H(\rho) = \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) - 1 + \rho \arctan\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Lorsque $\rho \rightarrow 0^+$, le logarithme tend vers 0 et $0 < \rho \arctan(1/\rho) < \pi\rho/2 \rightarrow 0$. Donc $H(\rho) \rightarrow -1$. Le prolongement continu est défini par $H(0) = -1$.

10.b) Méthode 1 — Dérivée et limites

Sur $(0, +\infty)$, la formule précédente donne

$$H'(\rho) = \frac{\rho}{1+\rho^2} + \arctan(1/\rho) - \frac{\rho}{1+\rho^2} = \arctan(1/\rho) > 0.$$

Ainsi H est strictement croissante sur $(0, +\infty)$. Pour tout $\rho > 0$, $H(\rho) > -1 = H(0)$, puisque les deux termes ajoutés à -1 dans 10.a sont positifs. Le prolongement est donc strictement croissant sur $[0, +\infty)$.

À l'infini, $\frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) \rightarrow +\infty$ et $\rho \arctan(1/\rho) > 0$, donc $H(\rho) \rightarrow +\infty$. Par continuité et stricte monotonie, H est une bijection de $[0, +\infty)$ sur $[-1, +\infty)$.

Méthode 2 — Comparaison des intégrandes

Pour $0 < \rho_1 < \rho_2$, on a $\ln(t^2 + \rho_1^2) < \ln(t^2 + \rho_2^2)$ sur tout $[-1, 1]$. La différence est continue strictement positive, donc son intégrale est positive : $H(\rho_1) < H(\rho_2)$. La formule de 10.a donne de nouveau $H(\rho) > H(0)$ pour $\rho > 0$.

De plus, $t^2 + \rho^2 \geq \rho^2$, donc $H(\rho) \geq \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \ln(\rho^2) dt = \ln \rho \rightarrow +\infty$. Avec la continuité et $H(0) = -1$, le théorème de la bijection donne le même intervalle image. Cette approche compare les valeurs de l'intégrale sans dériver par rapport à son paramètre.

10.c) Le réel $\ln 2 - 1$ appartient à $(-1, +\infty)$, puisque $\ln 2 > 0$. La bijection de 10.b donne un unique $\rho_0 > 0$ tel que $H(\rho_0) = \ln 2 - 1$.

Pour montrer $\rho_0 < 1$, on compare $H(1)$ à cette valeur :

$$H(1) - (\ln 2 - 1) = \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln 2.$$

Or $\arctan 1 = \int_0^1 dt/(1+t^2) > 1/2$: l'intégrande est au moins $1/2$ et strictement

supérieur sur $[0, 1)$. De plus $\ln 2 < 1$, par exemple parce que $\ln 2 = \int_1^2 dt/t < 1$. Ainsi la différence est strictement positive. Par stricte croissance, $0 < \rho_0 < 1$. L'approximation donnée de $\ln 2$ permet aussi de vérifier cette comparaison numériquement.

10.d) Question adaptée au programme actuel : on utilise le produit réel positif $D_n(\rho)$.

Pour $\rho > 0$, chaque nombre $x_{k,n}^2 + \rho^2$ est strictement positif, donc chaque facteur de $D_n(\rho)$ est positif. Ainsi $D_n(\rho) > 0$ et son logarithme est défini. En posant $g_\rho(t) = \ln(t^2 + \rho^2)$,

$$\frac{1}{n} \ln D_n(\rho) = \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n g_\rho(x_{k,n}).$$

La fonction g_ρ est continue sur $[-1, 1]$. Les sommes de Riemann pour le découpage de pas $2/n$ donnent

$$\frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g_\rho(x_{k,n}) \longrightarrow \int_{-1}^1 g_\rho(t) dt.$$

Le terme supplémentaire $g_\rho(1)/(2n)$ tend vers 0. En multipliant la somme précédente par $1/4$, on conclut à

$$\frac{1}{n} \ln D_n(\rho) \longrightarrow \frac{1}{4} \int_{-1}^1 g_\rho(t) dt = H(\rho).$$

11.a) Code adapté en Python. La méthode est la dichotomie appliquée à la fonction

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x^2}{4} \right) + x \arctan(1/x)$$

sur $[0,25, 1]$. La formule de 10.a donne, pour $x > 0$,

$$G(x) = H(x) - (\ln 2 - 1).$$

La fonction G est continue et strictement croissante, avec $G'(x) = \arctan(1/x) > 0$. Elle possède donc au plus un zéro.

Le changement de signe aux bornes peut être vérifié exactement. On a $G(1) > 0$ par 10.c. Pour $x = 1/4$,

$$G(1/4) = \frac{1}{2} \ln(17/64) + \frac{1}{4} \arctan 4 < \frac{1}{2}(1 - \ln 3) < 0.$$

La première inégalité utilise $17/64 < 1/3$ et $\arctan 4 < \pi/2 < 2$. Pour la dernière, $e < 3$, donc $\ln 3 > 1$. On peut vérifier $e < 3$ avec la série exponentielle :

$$e = 1 + 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} 1/k! < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} 1/2^{k-1} = 3.$$

La borne $\pi < 4$ résulte aussi de $\pi/4 = \arctan 1 = \int_0^1 dt/(1+t^2) < 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires fournit donc un unique zéro $s_0 \in (0,25, 1)$, vérifiant

$$\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+s_0^2}{4} \right) + s_0 \arctan(1/s_0) = 0.$$

Le code converti conserve les trois tests successifs du programme initial. Ils recalculent le milieu après une éventuelle modification d'une borne : il peut donc y avoir plus d'une réduction de l'intervalle lors d'un passage dans la boucle. Si la valeur au milieu est positive, on abaisse la borne droite ; si elle est négative, on relève la borne gauche. Dans les deux cas, la racine reste dans l'intervalle. Si le troisième test détecte un zéro exact au milieu, la première affectation place la borne droite sur la racine, puis la seconde place la borne gauche entre son ancienne valeur et cette racine : l'encadrement reste valide.

À chaque passage, au moins une réduction de moitié a lieu ; la boucle se termine. À la fin, l'intervalle contient s_0 et a largeur au plus 0,001, donc le milieu affiché est à une distance au plus 0,0005 de s_0 , et a fortiori à 0,001 près.

Voici le code complet exécuté :

Python

```
import numpy as np

def G(x):
    return 0.5 * np.log((1 + x**2) / 4) + x * np.arctan(1 / x)

u = 0.25
```

```

v = 1.0
while v - u > 0.001:
    if G((u + v) / 2) > 0:
        v = (u + v) / 2
    if G((u + v) / 2) < 0:
        u = (u + v) / 2
    if G((u + v) / 2) == 0:
        v = (u + v) / 2
        u = (u + v) / 2
print((u + v) / 2)

```

Il affiche 0.5257568359375, avec l'encadrement final $u = 0,525390625$, $v = 0,526123046875$. Il s'agit d'une approximation numérique, distincte de l'équation exacte caractérisant la racine.

11.b) D'après $G(x) = H(x) - (\ln 2 - 1)$, l'équation $G(s_0) = 0$ est exactement $H(s_0) = \ln 2 - 1$. L'unicité démontrée en 10.c impose donc

$$s_0 = \rho_0.$$

La valeur affichée par le programme approche ce réel commun ; elle n'est pas une définition exacte de ρ_0 .

12.a) Pour chaque $0 \leq k \leq n$, la propriété d'interpolation donne

$$S_n(x_{k,n}) = 1 - (x_{k,n}^2 + \rho^2)f_\rho(x_{k,n}) = 0.$$

Les nœuds sont distincts. Chaque facteur $X - x_{k,n}$ divise donc S_n , et leur produit w_n le divise également. Cela vaut pour tout $n \geq 1$, sans hypothèse de parité.

12.b) Les nœuds sont symétriques : $-x_{k,n} = x_{n-k,n}$. Définissons $Q(X) = P_{f_\rho,n}(-X)$. Son degré est au plus n et, par parité de f_ρ ,

$$Q(x_{k,n}) = P_{f_\rho,n}(x_{n-k,n}) = f_\rho(x_{n-k,n}) = f_\rho(x_{k,n}).$$

Les polynômes Q et $P_{f_\rho,n}$ interpolent donc les mêmes valeurs aux mêmes $n + 1$ nœuds. L'unicité de 5.e donne $Q = P_{f_\rho,n}$. Ainsi $P_{f_\rho,n}$ est pair.

12.c) On a, pour $0 \leq k \leq n$,

$$y_n - x_{k,n} = 1 - \frac{1}{n} - \left(-1 + \frac{2k}{n}\right) = \frac{2n - 1 - 2k}{n}.$$

Le produit des valeurs absolues des numérateurs vaut $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$: les deux derniers facteurs du produit initial sont 1 et -1 , de sorte que l'unité apparaît deux fois sans changer la valeur. Ainsi,

$$|w_n(y_n)| = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n - 1)}{n^{n+1}} = \frac{(2n)!}{2^n n! n^{n+1}}.$$

La seconde égalité découle de la séparation des facteurs pairs et impairs de $(2n)!$; le produit des facteurs pairs vaut $2^n n!$. Cette expression est valable aussi pour $n = 1$, où $y_1 = 0$ et $|w_1(0)| = 1$.

Pour l'équivalent, on utilise le résultat établi en 9.b : $n! = c_n \sqrt{n} (n/e)^n$, avec $c_n \rightarrow C > 0$. En remplaçant exactement les deux factorielles,

$$|w_n(y_n)| = \frac{c_{2n} \sqrt{2n} (2n/e)^{2n}}{2^n c_n \sqrt{n} (n/e)^n n^{n+1}} = \frac{\sqrt{2} c_{2n}}{n c_n} \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Le quotient c_{2n}/c_n tend vers 1, puisque les deux suites tendent vers le même nombre strictement positif C . On conclut à

$$|w_n(y_n)| \sim \frac{\sqrt{2}}{n} \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Les constantes sont donc $\tau = \sqrt{2}$ et $\sigma = 2/e$. La comparaison des deux factorielles est entièrement justifiée par 9.b ; aucune formule extérieure n'a été invoquée.

12.d) Question adaptée au programme actuel ; rectification d'un résultat incorrect du PDF. Résultat admis dans cette version adaptée : pour chaque $\rho > 0$ fixé,

$$\ln D_n(\rho) - nH(\rho) \rightarrow \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2).$$

Le PDF donne à la place une limite nulle. Avec le produit sur les $n + 1$ nœuds, y compris les deux extrémités, cette valeur est fautive : le terme constant des extrémités doit être conservé.

Expliquons la constante corrigée par une estimation élémentaire. La fonction $g(t) = \ln(t^2 + \rho^2)$ est de classe C^2 sur $[-1, 1]$, donc $|g''|$ y est majorée par un nombre M_2 .

Posons $h = 2/n$ et

$$T_n = h \left(\frac{g(-1) + g(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} g(x_{k,n}) \right).$$

Sur chaque intervalle $[a, a + h]$ du découpage, Taylor à l'ordre 1 donne

$g(a + t) = g(a) + tg'(a) + r(t)$, avec $|r(t)| \leq M_2 t^2/2$. En intégrant, puis en comparant au trapèze $h(g(a) + g(a + h))/2$, les parties affines coïncident et l'erreur est majorée par

$$\frac{M_2 h^3}{6} + \frac{M_2 h^3}{4} = \frac{5M_2 h^3}{12}.$$

En sommant sur n intervalles, $T_n = \int_{-1}^1 g(t) dt + O(1/n^2)$. Par définition de T_n ,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n g(x_{k,n}) = \frac{T_n}{2h} + \frac{g(-1) + g(1)}{4} = nH(\rho) + \frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2) + O(1/n).$$

Cela confirme précisément la rectification, avec des outils d'intégration et de Taylor du programme.

Le résultat admis, ou cette estimation, permet d'exponentier une quantité qui tend vers une constante :

$$D_n(\rho) e^{-nH(\rho)} \longrightarrow \sqrt{1 + \rho^2} > 0.$$

Ainsi $D_n(\rho) \sim \sqrt{1 + \rho^2} e^{nH(\rho)}$. Avec 12.c, on obtient

$$\frac{|w_n(y_n)|}{D_n(\rho)} \sim \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{1 + \rho^2}} \left(\frac{2}{e} e^{-H(\rho)} \right)^n.$$

Ce terme constant modifie le coefficient de l'équivalent, mais pas le seuil de croissance exponentielle étudié en question 14.

Dans les questions 13 et 14, les entiers n sont impairs.

13.a) Question adaptée au programme actuel : on utilise une division de polynômes réels et le produit $D_n(\rho)$.

Écrivons $n = 2m + 1$. Les nœuds sont les couples de réels opposés $\pm a_j$, avec $a_j = (2j + 1)/n > 0$ pour $0 \leq j \leq m$. Donc

$$w_n(X) = \prod_{j=0}^m (X^2 - a_j^2).$$

Chaque facteur s'écrit $(X^2 + \rho^2) - (\rho^2 + a_j^2)$. En développant le produit, tous les termes qui contiennent au moins un facteur $X^2 + \rho^2$ lui sont divisibles, et le seul terme restant est

$$r_n = \prod_{j=0}^m (-\rho^2 - a_j^2) = (-1)^{m+1} \prod_{j=0}^m (\rho^2 + a_j^2).$$

C'est une constante, donc bien le reste de la division par $X^2 + \rho^2$. Chaque facteur $\rho^2 + a_j^2$ est positif : $r_n \neq 0$.

Les facteurs de $D_n(\rho)$ se regroupent par couples de nœuds opposés : chaque couple fournit $\sqrt{a_j^2 + \rho^2} \sqrt{a_j^2 + \rho^2} = a_j^2 + \rho^2$. Ainsi

$$r_n = (-1)^{(n+1)/2} D_n(\rho).$$

Par 12.b, le polynôme $P_{f_\rho, n}$ est pair. Comme n est impair, son degré est au plus $n - 1$, donc $S_n = 1 - (X^2 + \rho^2)P_{f_\rho, n}$ a degré au plus $n + 1$. La question 12.a donne la divisibilité par w_n , qui a degré $n + 1$. Il existe donc une constante c telle que $S_n = cw_n$.

Le reste de la division de S_n par $X^2 + \rho^2$ vaut 1 par sa définition ; celui de cw_n vaut cr_n . Donc $cr_n = 1$. Comme $r_n \neq 0$, on obtient

$$S_n(X) = \frac{w_n(X)}{r_n}.$$

Cette preuve établit l'identité sans introduire aucun scalaire non réel.

13.b) Question adaptée au programme actuel : le dénominateur de l'identité d'erreur est le produit réel $D_n(\rho)$. Pour tout réel x , le dénominateur $x^2 + \rho^2$ est strictement positif.

Par la définition de S_n et le résultat de 13.a,

$$f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x) = \frac{1 - (x^2 + \rho^2)P_{f_\rho,n}(x)}{x^2 + \rho^2} = f_\rho(x) \frac{w_n(x)}{r_n}.$$

Comme $f_\rho(x) > 0$ et $|r_n| = D_n(\rho)$,

$$|f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| = f_\rho(x) \frac{|w_n(x)|}{D_n(\rho)}.$$

L'identité vaut en particulier sur $[-1, 1]$, y compris aux nœuds où les deux côtés sont nuls.

14.a) On suppose $0 < \rho < \rho_0$ et on fait tendre n vers l'infini le long des entiers impairs. Puisque H est strictement croissante,

$$H(\rho) < H(\rho_0) = \ln 2 - 1.$$

Ainsi le réel $b_\rho = (2/e)e^{-H(\rho)} = \exp(\ln 2 - 1 - H(\rho))$ est strictement supérieur à 1.

Comme $y_n \rightarrow 1$ et que f_ρ est continue, $f_\rho(y_n) \rightarrow 1/(1 + \rho^2) > 0$. En combinant 12.d et 13.b,

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \sim \frac{\sqrt{2}}{n(1 + \rho^2)^{3/2}} b_\rho^n.$$

Pour $b_\rho > 1$, les croissances comparées donnent $b_\rho^n/n \rightarrow +\infty$. L'équivalent ayant un coefficient strictement positif, on conclut à

$$|f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)| \rightarrow +\infty.$$

La condition stricte $\rho < \rho_0$ est essentielle à cette conclusion ; le raisonnement ne traite pas le seuil $\rho = \rho_0$.

14.b) Pour chaque $n \geq 1$, $y_n = 1 - 1/n$ appartient à $[-1, 1]$. La fonction $|f_\rho - P_{f_\rho,n}|$ est continue sur ce segment, donc son supremum est fini et atteint. On a

$$\sup_{x \in [-1, 1]} |f_\rho(x) - P_{f_\rho,n}(x)| \geq |f_\rho(y_n) - P_{f_\rho,n}(y_n)|.$$

Le membre de droite tend vers $+\infty$ par 14.a ; le supremum fait donc de même le long des entiers impairs. C'est le phénomène de Runge demandé : pour ces petits paramètres, l'interpolation aux nœuds régulièrement espacés ne converge pas uniformément et son erreur maximale diverge sur cette sous-suite.

Les points y_n dépendent de n ; cette preuve porte sur le supremum de l'erreur, et ne fournit pas à elle seule une divergence en un point fixe du segment. De même, les conclusions des questions 13 et 14 respectent la restriction aux degrés impairs du sujet.

Relevé des adaptations

- Questions 4.a, 4.b et 11 : Code adapté en Python. Les paramètres, le nombre de tirages et le comportement des trois tests successifs de la dichotomie sont conservés. La syntaxe de `np.arctan` est précisée dans le sujet. Les codes complets du corrigé ont été exécutés.
- Question 5.d : la convention de matrice de passage est explicitée afin de distinguer la matrice dont les colonnes sont les monômes exprimés dans la base de Lagrange de sa matrice inverse.
- Question 8 : le théorème général initial sur la dérivation d'une somme de puissances est remplacé par les deux identités de dérivées particulières nécessaires à 8.c, admises avec convergence absolue. Les quatre sous-questions et leur objectif sont conservés.
- Questions 9.b et 12.c : la formule asymptotique de factorielles rappelée dans le préambule initial est supprimée. Une indication en 9.b guide une preuve par Taylor, comparaison à une série de Riemann et télescopage ; le résultat établi suffit aussi à déterminer exactement l'équivalent en 12.c.
- Questions 10.d, 12.d et 13.a–13.b : les évaluations supprimées sont remplacées par le produit réel positif $D_n(\rho)$. Pour les degrés impairs, la division par $X^2 + \rho^2$ fournit une constante réelle r_n , de valeur absolue $D_n(\rho)$; elle permet de retrouver la même identité réelle d'erreur.

- Question 12.d : rectification d'une erreur déterminante du PDF. Pour le produit sur tous les nœuds, la limite de $\ln D_n(\rho) - nH(\rho)$ est $\frac{1}{2} \ln(1 + \rho^2)$ et non 0. L'équivalent suivant reçoit donc le facteur $1/\sqrt{1 + \rho^2}$. Une estimation élémentaire de la somme des trapèzes confirme la constante corrigée ; le seuil ρ_0 reste identique.
- Questions 13–14 : la restriction déjà présente aux entiers impairs est rendue explicite dans les limites pour éviter de conclure au-delà de l'ensemble des indices traité.

Aucun passage utile du PDF ne reste illisible et aucun point mathématique ne reste à vérifier.