



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2009

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les parties II, III et IV sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Deux exemples

Exemple 1

1. On considère la suite réelle $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $s_1 = 1$, $s_2 = \frac{4}{5}$, $s_3 = \frac{2}{5}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$s_{n+3} = \frac{3}{2}s_{n+2} - s_{n+1} + \frac{1}{4}s_n.$$

1. a) Écrire une fonction Python d'en-tête `def suite(s1, s2, s3, n):` qui, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, renvoie le n -ième terme de la suite définie par les trois valeurs initiales fournies et la relation précédente.

1. b) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$s_n = \frac{1}{5 \times 2^{n-2}} + \frac{3}{5 \times 2^{(n-2)/2}} \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right).$$

1. c) Déterminer la limite de la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. d) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + X - \frac{1}{4}$ admet une unique racine réelle, valant $\frac{1}{2}$. Factoriser P sur $\mathbb{R}$ en un facteur de degré 1 et un facteur de degré 2, et montrer que ce dernier n'a pas de racine réelle.

1. e) Déterminer trois réels A , B et C tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = A \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(B \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + C \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Justifier cette expression en vérifiant la récurrence et les trois valeurs initiales. Retrouver la limite de la suite.

Exemple 2

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $P(X) = X^2 - xX - y$. On note $\Delta = x^2 + 4y$.

Si $\Delta \geq 0$, on note r_1 et r_2 les racines réelles de P , distinctes ou confondues. Si $\Delta < 0$, on pose $r = \sqrt{-y}$; on a alors $y < 0$ et $r > 0$.

2. a) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$ des points de coordonnées (x, y) défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < 1 \text{ et } |x| < 1 - y\}.$$

2. b) Distinguer sur le graphique la partie de $\mathcal{D}$ dans laquelle les racines de P sont réelles.

3. En étudiant séparément les cas $\Delta \geq 0$ et $\Delta < 0$, établir l'équivalence des trois conditions suivantes :

- i) Si $\Delta \geq 0$, $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$; si $\Delta < 0$, $r < 1$.
- ii) $P(-1) > 0$, $P(1) > 0$ et $|y| < 1$.
- iii) $|y| < 1$ et $|x| < 1 - y$.

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On note $E(A)$ et $V(A)$ respectivement l'espérance et la variance d'une variable aléatoire $A \in \mathcal{E}$. Si $A, B \in \mathcal{E}$, leur covariance est notée $\text{Cov}(A, B)$.

On appelle processus aléatoire $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une famille de variables aléatoires de $\mathcal{E}$ indexée par $\mathbb{Z}$.

Soit $W = (W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus aléatoire constitué de variables aléatoires mutuellement indépendantes, vérifiant, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $E(W_t) = 0$ et $V(W_t) = \sigma^2$, où $\sigma > 0$ est fixé.

Soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. On considère un processus $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ formé de variables centrées, de même variance strictement positive et telles que, pour tout $t \in \mathbb{Z}$:

$$Y_t = a_1 Y_{t-1} + a_2 Y_{t-2} + W_t.$$

On suppose que :

- pour tout $(t, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $\text{Cov}(W_t, Y_{t-k}) = 0$;
- pour tout $(t, k) \in \mathbb{Z}^2$, $\text{Cov}(Y_t, Y_{t-k})$ ne dépend que de k .

On pose, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\gamma_k = \text{Cov}(Y_t, Y_{t-k}), \quad \rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

- a) Que représente γ_0 pour le processus Y ?
- b) Établir, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'égalité $\gamma_{-k} = \gamma_k$.
- c) Montrer, pour tout $t \in \mathbb{Z}$, l'égalité $\text{Cov}(W_t, Y_t) = \sigma^2$.
- On suppose dans cette question que le couple (a_1, a_2) appartient à l'ensemble $\mathcal{D}$ défini en 2. a).
 - Exprimer γ_1 et γ_2 en fonction de γ_0, a_1 et a_2 . En déduire l'expression de ρ_1 et ρ_2 en fonction de a_1 et a_2 .
 - Établir les deux inégalités $a_1\rho_1 + a_2\rho_2 \geq 0$ et $|\rho_1| < 1$, ainsi que l'encadrement $0 \leq a_1\rho_1 + a_2\rho_2 < 1$.
 - Exprimer γ_0 en fonction de $\sigma^2, a_1, a_2, \rho_1$ et ρ_2 .
- a) Montrer que la suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
 - Posons $\Delta = a_1^2 + 4a_2$. Si $\Delta \geq 0$, notons r_1, r_2 les racines réelles de $P(X) = X^2 - a_1X - a_2$. Si $\Delta < 0$, posons $r = \sqrt{-a_2}$ et définissons $\theta \in]0, \pi[$ par $\cos \theta = a_1/(2r)$.

Montrer que $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si la condition suivante est vérifiée : pour $\Delta \geq 0$, $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$; pour $\Delta < 0$, $r < 1$.

On distinguera les cas de deux racines réelles de valeurs absolues différentes, de deux racines réelles de même valeur absolue, puis le cas $\Delta < 0$. Dans ce dernier cas, on pourra vérifier une expression de la forme $\rho_k = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta))$ en utilisant les formules d'addition du sinus et du cosinus.

Partie II. Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Dans cette partie, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, avec $a_p \neq 0$. On note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}^*$, et $\mathcal{S}_p$ le sous-ensemble formé des suites $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_{n+p} = a_1 s_{n+p-1} + a_2 s_{n+p-2} + \dots + a_p s_n.$$

7. Montrer que $\mathcal{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
8. Soit $\Phi : \mathcal{S}_p \rightarrow \mathbb{R}^p$ l'application qui, à toute suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$, associe le p -uplet $(s_1, \dots, s_p)$. Montrer que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de $\mathcal{S}_p$.
9. On note $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et Φ^{-1} l'application réciproque de Φ . Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on considère la suite $v^{(i)} = (v_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v^{(i)} = \Phi^{-1}(e_i)$.
 9. a) Justifier que la famille $(v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$ constitue une base de $\mathcal{S}_p$. Préciser les coordonnées de toute suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathcal{S}_p$ dans cette base.
 9. b) Calculer, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $v_j^{(1)}, \dots, v_j^{(p)}$. Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $v_{p+1}^{(i)} = a_{p-i+1}$.
10. Soit δ l'application définie sur $\mathcal{S}_p$ par $\delta(s) = (s_{n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$.

10. a) Montrer que δ est un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.
10. b) Déterminer la matrice Δ de δ dans la base $(v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$.
11. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^p - a_1 X^{p-1} - \dots - a_{p-1} X - a_p$.
11. a) Montrer qu'un réel λ est une valeur propre de δ si et seulement si λ est une racine réelle de P .
11. b) Soit λ une valeur propre réelle de δ . Déterminer la dimension du sous-espace propre associé à λ , et en déduire une condition nécessaire et suffisante sur P pour que δ soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
11. c) On suppose que P admet p racines réelles distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Établir, pour toute suite $s \in \mathcal{S}_p$, l'existence d'un unique p -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$s_n = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i^n.$$

Partie III. Polynôme générateur minimal d'une suite récurrente linéaire

Le contexte et les notations de cette partie sont ceux du préambule de la partie II et de la question 10.

On considère une suite $s \in \mathcal{S}_p$. Un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ est dit générateur de s si $Q(\delta)(s) = 0_{\mathcal{S}_p}$. On note J l'ensemble des polynômes générateurs de s .

12. Montrer que J n'est pas réduit au polynôme nul.
13. Montrer que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

14. Montrer que, si $Q \in J$ et $A \in \mathbb{R}[X]$, alors $QA \in J$.
15. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des degrés des polynômes non nuls de J .
15. a) Justifier l'existence d'un polynôme $\Pi \in J$ dont le degré soit le plus petit élément de $\mathcal{N}$. On note d ce degré.
15. b) En utilisant la division euclidienne des polynômes, montrer que J est l'ensemble des polynômes de la forme ΠL , avec $L \in \mathbb{R}[X]$.
15. c) En déduire qu'il existe un unique polynôme de J , noté Π^* , de coefficient dominant égal à 1 et de degré d . On dit que Π^* est le polynôme générateur minimal de s et que d est le degré de la suite s .
16. Un exemple. Déterminer le polynôme générateur minimal et le degré de la suite réelle s récurrente linéaire d'ordre 3 définie par $s_1 = 0, s_2 = s_3 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, s_{n+3} = 2s_{n+1} + s_n$.
17. Soit s une suite récurrente linéaire de degré $d \geq 1$ et k un entier strictement supérieur à d . On note $H \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice définie par :

$$H = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_k \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_k & s_{k+1} & \cdots & s_{2k-1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on note U_j la j -ième colonne de H . On désigne par h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^k$ canoniquement associé à H et par u_j le vecteur de $\mathbb{R}^k$ associé à U_j .

17. a) Montrer que $(u_1, \dots, u_d)$ est une famille libre de $\text{Im}(h)$.
17. b) Établir que, pour tout $j \in \{d+1, \dots, k\}$, la famille $(u_1, \dots, u_d, u_j)$ est liée. En déduire le rang de h et la dimension de $\text{Ker}(h)$.
17. c) Montrer qu'un polynôme

$$Q(X) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j X^j \in \mathbb{R}[X]$$

appartient à J si et seulement si $(q_0, \dots, q_{k-1}) \in \text{Ker}(h)$.

17. d) Un exemple. Soit s une suite récurrente linéaire de degré inférieur ou égal à 3, dont les premiers termes sont $-1, 7, 5, 19, 29, 67, 125$. Déterminer son polynôme générateur minimal.

Partie IV. Un algorithme de calcul d'un polynôme générateur

Soit $1 \leq d \leq k$ et s une suite réelle récurrente linéaire de degré d dont on connaît les $2k$ premiers termes. On pose :

$$S(X) = \sum_{i=0}^{2k-1} s_{2k-i} X^i.$$

On note $\mathbb{R}_k[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à k . Soit

$$Q(X) = \sum_{j=0}^k q_j X^j \in \mathbb{R}_k[X].$$

Le degré d'un polynôme T est noté $\deg(T)$; on convient que $\deg(0) = -\infty$.

18. On note $(\star)$ la relation suivante : pour tout $n \in \{1, \dots, k\}$,

$$\sum_{j=0}^k q_j s_{n+j} = 0.$$

Montrer que Q est un polynôme générateur de s si et seulement si $(\star)$ est vérifiée.

19. a) On pose, pour tout $n \in \{0, \dots, 3k-1\}$:

$$t_n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq 2k-1, \\ i+j=n}} q_j s_{2k-i}.$$

Établir l'égalité

$$QS = \sum_{n=0}^{3k-1} t_n X^n.$$

19. b) On suppose $(\star)$ vérifiée. Montrer que, pour tout $n \in \{k, \dots, 2k-1\}$, $t_n = 0$. En déduire l'existence de deux polynômes $A, B \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ vérifiant $QS = A + X^{2k}B$.

19. c) Réciproquement, on suppose qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tels que $QS = A + X^{2k}B$. Montrer que $(\star)$ est vérifiée.

20. Dans l'algorithme suivant, les variables A, B, C, D, E, F, R, S représentent des polynômes et k une constante entière. Le polynôme S et l'entier k sont ceux définis précédemment.

Un polynôme est représenté par une liste de coefficients dans l'ordre croissant des puissances ; par exemple $[1, 2, 3]$ représente $1 + 2X + 3X^2$. Les fonctions suivantes sont disponibles :

- `monome(m)` renvoie la liste représentant X^m ;
- `degre(T)` renvoie le degré de T , avec la valeur `-float("inf")` pour le polynôme nul;
- `division_euclidienne(A, B)` renvoie le couple quotient-reste (F, R) tel que $A = BF + R$, avec $R = 0$ ou $\deg(R) < \deg(B)$;
- `produit(D, F)` et `difference(C, T)` renvoient respectivement les coefficients de DF et de $C - T$.

Pour une implémentation exacte sur des coefficients rationnels, `Fraction(a, b)`, importée depuis `fractions`, représente la fraction a/b et permet les opérations arithmétiques exactes; `Fraction(a)` représente un entier fourni. Pour les listes, `len(T)` est leur longueur, `T.append(c)` ajoute un coefficient, `T[-1]` est le dernier coefficient et `T[:-1]` est la liste privée de ce dernier coefficient. L'expression `[0] * m` crée une liste de m coefficients nuls. Le couple renvoyé par une fonction peut être affecté simultanément par `F, R = division_euclidienne(A, B)`.

Le programme est :

Python

```
def algorithme(S, k):
    A = monome(2 * k)
    B = S
    C = [0]
    D = [1]
    while degre(B) >= k:
        F, R = division_euclidienne(A, B)
        E = difference(C, produit(D, F))
        C = D
        D = E
        A = B
        B = R
    return D, B
```

Si $U, V \in \mathbb{R}[X]$ vérifient $U = V + X^{2k}W$ pour un $W \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, on note $U \equiv V$.

20. a) Montrer que cet algorithme se termine, c'est-à-dire que l'on sort de la boucle.

20. b) Montrer qu'à l'initialisation :

$$\begin{aligned} \deg(C) &\leq 2k - \deg(A), & \deg(D) &\leq 2k - \deg(A), & \deg(B) &< \deg(A), & CS \\ &\equiv A, & DS &\equiv B. \end{aligned}$$

Montrer également qu'à l'initialisation $k \leq \deg(B)$.

20. c) On suppose qu'avant un passage dans la boucle les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \deg(C) &\leq 2k - \deg(A), & \deg(D) &\leq 2k - \deg(A), & \deg(B) &< \deg(A), & CS \\ &\equiv A, & DS &\equiv B, \end{aligned}$$

et que $k \leq \deg(B)$. Montrer que les cinq premières relations sont encore vérifiées après ce passage. Préciser pourquoi $k \leq \deg(B)$ reste vérifiée uniquement si un nouveau passage est effectué.

20. d) Montrer que, lorsque l'algorithme se termine, l'une des variables contient un polynôme générateur non nul de la suite s . Quelle est cette variable ?