



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

HEC

Mathématiques

2009

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé — HEC, Mathématiques, 2009

Partie I. Deux exemples

Exemple 1

1. a) Code adapté en Python. On garde en mémoire trois termes consécutifs et on les décale à chaque itération. Le paramètre n doit être un entier supérieur ou égal à 1.

Python

```
def suite(s1, s2, s3, n):  
    if n == 1:  
        return s1  
    elif n == 2:  
        return s2  
    elif n == 3:  
        return s3  
    else:  
        u = s1  
        v = s2  
        w = s3  
        for j in range(4, n + 1):  
            suivant = 1.5 * w - v + 0.25 * u  
            u = v  
            v = w  
            w = suivant  
        return w
```

Au début de l'itération de rang j , les variables u, v, w contiennent respectivement s_{j-3} , s_{j-2} et s_{j-1} . La variable `suivant` contient alors s_j . Après les affectations, la même propriété est prête pour le rang suivant. La borne supérieure de `range` étant exclusive, la boucle inclut le rang n et la valeur finale de `w` est s_n .

Le code a été exécuté pour les trois termes initiaux et pour les termes suivants; les résultats ont été comparés à l'expression de 1. b). Les calculs ordinaires avec des

nombre décimal sont des calculs numériques, distincts de la démonstration exacte ci-dessous.

1. b) Posons $r = 1/\sqrt{2}$, $\theta = \pi/4$ et $u_n = r^n \sin(n\theta)$. La formule d'addition permet d'obtenir :

$$\sin((n+2)\theta) + \sin(n\theta) = 2 \cos \theta \sin((n+1)\theta).$$

En effet, on applique les formules d'addition aux angles $(n+1)\theta + \theta$ et $(n+1)\theta - \theta$, puis on additionne. Comme $2r \cos \theta = 1$ et $r^2 = 1/2$, on en déduit :

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

En appliquant cette relation aux indices n et $n+1$:

$$\frac{3}{2}u_{n+2} - u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n = \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = u_{n+3}.$$

La suite $v_n = 2^{-n}$ vérifie également la récurrence d'ordre 3, car :

$$\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Par linéarité, la suite :

$$t_n = \frac{4}{5} 2^{-n} + \frac{6}{5} r^n \sin(n\pi/4)$$

vérifie donc la récurrence de s . Ses trois premiers termes sont :

$$t_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1, \quad t_2 = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}, \quad t_3 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

Une récurrence d'ordre 3 et trois valeurs initiales fixées déterminent tous les termes suivants de manière unique. Ainsi, $t_n = s_n$ pour tout $n \geq 1$.

Comme $\frac{4}{5} 2^{-n} = 1/(5 \times 2^{n-2})$ et $\frac{6}{5} 2^{-n/2} = 3/(5 \times 2^{(n-2)/2})$, on obtient exactement la formule demandée.

1. c) On utilise l'expression de 1. b) et la majoration $|\sin(n\pi/4)| \leq 1$:

$$|s_n| \leq \frac{4}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{6}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Les deux raisons géométriques sont strictement comprises entre 0 et 1, donc le membre de droite tend vers 0. Par encadrement, $s_n \rightarrow 0$.

1. d) Question adaptée au programme actuel : on étudie uniquement la factorisation réelle.

Un calcul direct donne $P(1/2) = 0$. La division par $X - 1/2$, ou la vérification du produit, donne :

$$P(X) = \left(X - \frac{1}{2}\right) \left(X^2 - X + \frac{1}{2}\right).$$

Pour tout réel t :

$$t^2 - t + \frac{1}{2} = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0.$$

Le facteur quadratique n'a donc aucune racine réelle. Par conséquent, $1/2$ est l'unique racine réelle de P .

1. e) Question adaptée au programme actuel : la représentation recherchée utilise uniquement des suites réelles trigonométriques.

Les suites $r^n \sin(n\theta)$ et $r^n \cos(n\theta)$, avec $r = 1/\sqrt{2}$ et $\theta = \pi/4$, vérifient toutes deux la récurrence d'ordre 2 $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n/2$. Pour le cosinus, on démontre l'identité nécessaire en additionnant les formules de $\cos((n+1)\theta + \theta)$ et $\cos((n+1)\theta - \theta)$. Le calcul de 1. b) montre ensuite qu'elles vérifient la récurrence d'ordre 3.

La suite 2^{-n} la vérifie aussi. Une combinaison de ces trois suites satisfait donc la relation demandée. Les valeurs aux indices 1, 2 et 3 imposent :

$$\frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 1, \quad \frac{A}{4} + \frac{C}{2} = \frac{4}{5}, \quad \frac{A}{8} + \frac{-B+C}{4} = \frac{2}{5}.$$

En multipliant respectivement par 2, 4 et 8 :

$$A + B + C = 2, \quad A + 2C = \frac{16}{5}, \quad A - 2B + 2C = \frac{16}{5}.$$

Les deux dernières équations donnent $B = 0$. Les autres donnent $A + C = 2$ et $A + 2C = 16/5$, donc :

$$A = \frac{4}{5}, \quad B = 0, \quad C = \frac{6}{5}.$$

La suite ainsi construite a la bonne récurrence et les trois bonnes valeurs initiales ; elle est donc égale à s . Les facteurs géométriques tendent vers 0 et les fonctions trigonométriques sont bornées, d'où à nouveau $s_n \rightarrow 0$.

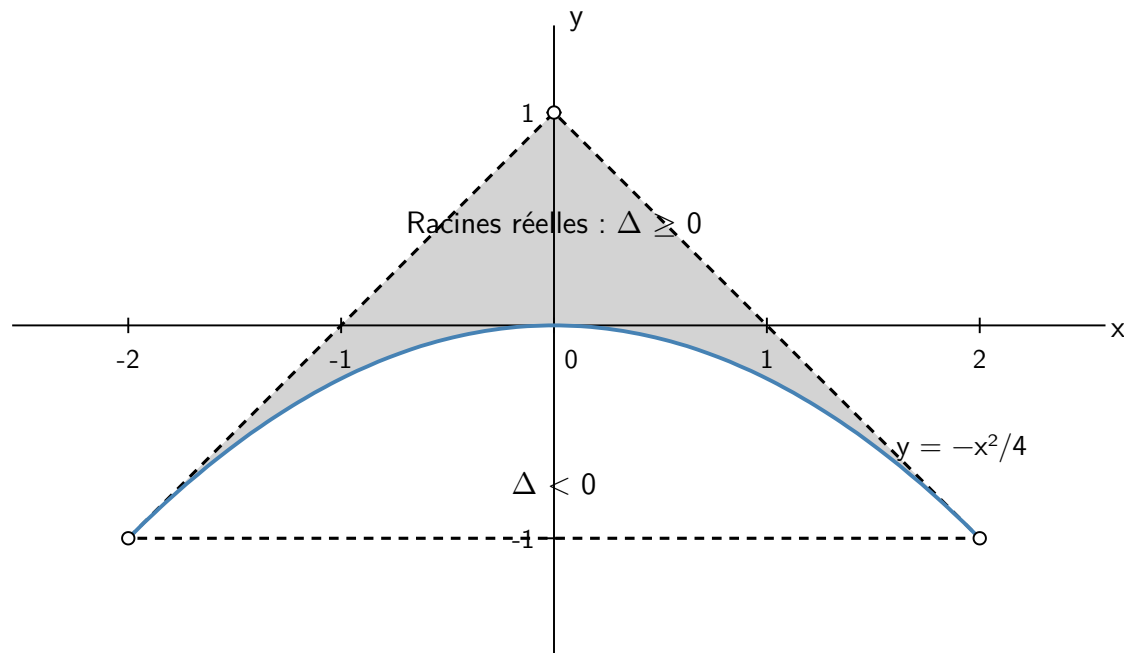
Exemple 2

2. a) Les conditions $|y| < 1$ et $|x| < 1 - y$ se réécrivent :

$$-1 < y < 1, \quad y - 1 < x < 1 - y.$$

L'ensemble est l'intérieur du triangle de sommets $(-2, -1)$, $(2, -1)$ et $(0, 1)$. Aucun côté ni sommet n'appartient à $\mathcal{D}$, car les inégalités sont strictes.

Le graphique commun aux questions 2. a) et 2. b) est donné ci-dessous. Les trois côtés exclus sont en pointillés. La graduation des deux axes correspond à la même unité.



Côtés exclus ; parabole incluse à l'intérieur du triangle.

2. b) Le polynôme quadratique $P(X) = X^2 - xX - y$ possède des racines réelles si et seulement si son discriminant est positif ou nul :

$$\Delta = x^2 + 4y \geq 0 \iff y \geq -\frac{x^2}{4}.$$

Dans $\mathcal{D}$, la partie recherchée est donc située sur ou au-dessus de la parabole $y = -x^2/4$. La parabole est incluse lorsque ses points appartiennent à $\mathcal{D}$; ses deux extrémités $(-2, -1)$ et $(2, -1)$ sont exclues. Sous la parabole, P n'a pas de racine réelle.

Pour $|x| < 2$, la différence entre le côté supérieur du triangle et la parabole vaut :

$$1 - |x| + \frac{x^2}{4} = \frac{(|x| - 2)^2}{4} > 0.$$

La zone grisée du graphique représente donc bien la partie de $\mathcal{D}$ où $\Delta \geq 0$.

3. Question adaptée au programme actuel : dans le cas $\Delta < 0$, la condition de taille est formulée avec le réel $r = \sqrt{-y}$.

Commençons par l'équivalence entre ii) et iii), valable dans tous les cas. On a :

$$P(-1) = 1 + x - y, \quad P(1) = 1 - x - y.$$

Les deux inégalités strictes $P(-1) > 0$ et $P(1) > 0$ équivalent à $-(1-y) < x < 1-y$, soit $|x| < 1-y$. Avec $|y| < 1$, cela donne exactement iii).

Supposons maintenant $\Delta \geq 0$ et ordonnons les racines $r_1 \leq r_2$. Leur produit vaut $-y$.

Si $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, alors $P(1) = (1-r_1)(1-r_2) > 0$, $P(-1) = (-1-r_1)(-1-r_2) > 0$ et $|y| = |r_1 r_2| < 1$. Ainsi i) implique ii).

Réciproquement, $P(1) > 0$ impose que les deux racines soient soit strictement inférieures à 1, soit strictement supérieures à 1. La seconde possibilité est incompatible avec $|r_1 r_2| < 1$. Les deux racines sont donc strictement inférieures à 1.

De même, $P(-1) > 0$ impose qu'elles soient soit strictement supérieures à -1 , soit strictement inférieures à -1 . Cette dernière possibilité contredit encore $|r_1 r_2| < 1$. Elles sont donc strictement comprises entre -1 et 1 . L'argument inclut le cas d'une racine double.

Enfin, supposons $\Delta < 0$. Alors $y = -r^2$ avec $r > 0$, et $|x| < 2r$. Puisque $2r \leq 1 + r^2$, on a $|x| < 1 + r^2 = 1 - y$, donc $P(-1) > 0$ et $P(1) > 0$ automatiquement.

Dans ce cas, ii) équivaut à $|y| = r^2 < 1$, soit $r < 1$, ce qui est exactement i). Les trois conditions sont donc équivalentes dans tous les cas.

4. a) Pour toute variable du processus :

$$\gamma_0 = \text{Cov}(Y_t, Y_t) = V(Y_t).$$

C'est la variance commune des Y_t , strictement positive par hypothèse. Les quotients définissant ρ_k sont donc bien définis et $\rho_0 = 1$.

4. b) Par symétrie de la covariance et indépendance de sa valeur vis-à-vis de l'origine temporelle :

$$\gamma_{-k} = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+k}) = \text{Cov}(Y_{t+k}, Y_t) = \gamma_k.$$

Cette égalité vaut pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

4. c) Toutes les variables ont un moment d'ordre 2, donc les covariances existent et leur

bilinéarité s'applique. La relation définissant Y_t donne :

$$\text{Cov}(W_t, Y_t) = a_1 \text{Cov}(W_t, Y_{t-1}) + a_2 \text{Cov}(W_t, Y_{t-2}) + V(W_t).$$

Les deux premiers termes sont nuls par l'hypothèse d'orthogonalité au passé ; le dernier vaut σ^2 . Ainsi $\text{Cov}(W_t, Y_t) = \sigma^2$.

5. a) Prenons la covariance de la relation de récurrence avec Y_{t-1} . L'orthogonalité au passé, la stationnarité des covariances et 4. b) donnent :

$$\gamma_1 = a_1 \gamma_0 + a_2 \gamma_1.$$

Comme $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$, $a_2 < 1$, donc $1 - a_2 > 0$. Ainsi :

$$\gamma_1 = \frac{a_1}{1 - a_2} \gamma_0, \quad \rho_1 = \frac{a_1}{1 - a_2}.$$

En prenant la covariance avec Y_{t-2} :

$$\gamma_2 = a_1 \gamma_1 + a_2 \gamma_0.$$

Par conséquent :

$$\rho_2 = a_1 \rho_1 + a_2 = \frac{a_1^2}{1 - a_2} + a_2, \quad \gamma_2 = \left(\frac{a_1^2}{1 - a_2} + a_2 \right) \gamma_0.$$

5. b) L'appartenance à $\mathcal{D}$ donne $|a_1| < 1 - a_2$ et $1 - a_2 > 0$, donc $|\rho_1| = |a_1|/(1 - a_2) < 1$.

Posons $b = a_1 \rho_1 + a_2 \rho_2$. Les expressions de 5. a) donnent :

$$b = a_2^2 + \frac{a_1^2(1 + a_2)}{1 - a_2}.$$

Comme $-1 < a_2 < 1$, les deux termes sont positifs ou nuls : $b \geq 0$. De plus :

$$1 - b = (1 - a_2^2) \left(1 - \frac{a_1^2}{(1 - a_2)^2} \right) = (1 - a_2^2)(1 - \rho_1^2) > 0.$$

On conclut $0 \leq a_1\rho_1 + a_2\rho_2 < 1$ et $|\rho_1| < 1$.

5. c) Prenons la covariance avec Y_t dans la relation du processus. Par 4. c) :

$$\gamma_0 = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \sigma^2.$$

Donc $\gamma_0(1 - a_1\rho_1 - a_2\rho_2) = \sigma^2$. Le facteur entre parenthèses est strictement positif d'après 5. b), et :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1 - a_1\rho_1 - a_2\rho_2}.$$

En remplaçant ρ_1 et ρ_2 , on peut également écrire :

$$\gamma_0 = \frac{\sigma^2}{(1 - a_2^2)(1 - \rho_1^2)}.$$

6. a) Pour $k \geq 2$, la covariance avec Y_{t-k} donne :

$$\gamma_k = a_1\gamma_{k-1} + a_2\gamma_{k-2},$$

car $\text{Cov}(W_t, Y_{t-k}) = 0$. En divisant par $\gamma_0 > 0$, on obtient :

$$\rho_{k+2} = a_1\rho_{k+1} + a_2\rho_k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

C'est la récurrence d'ordre 2 demandée, avec $\rho_0 = 1$.

6. b) Question adaptée au programme actuel : le troisième cas est traité par une expression trigonométrique entièrement réelle.

Pour la nécessité, on exploite les hypothèses du processus. Cette étape est essentielle : une suite récurrente quelconque pourrait ne pas contenir certains modes de sa récurrence.

La covariance de deux variables de même variance γ_0 a une valeur absolue inférieure ou égale à γ_0 , par Cauchy-Schwarz. Donc $|\rho_1| \leq 1$.

Si $\rho_1 = \varepsilon$ avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, alors :

$$V(Y_t - \varepsilon Y_{t-1}) = 2\gamma_0 - 2\varepsilon\gamma_1 = 0.$$

Comme cette différence est centrée, elle est nulle presque sûrement. On aurait donc $Y_t = \varepsilon Y_{t-1}$ presque sûrement. Cela imposerait $\text{Cov}(W_t, Y_t) = \varepsilon \text{Cov}(W_t, Y_{t-1}) = 0$, contrairement à 4. c), puisque $\sigma^2 > 0$. Ainsi $|\rho_1| < 1$.

Les identités de covariance utilisées en 5. a) restent valables sans supposer $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$; elles donnent :

$$a_1 = (1 - a_2)\rho_1, \quad \rho_2 = a_1\rho_1 + a_2.$$

De même, 4. c) donne $\sigma^2/\gamma_0 = 1 - a_1\rho_1 - a_2\rho_2$. En remplaçant a_1 et ρ_2 , il vient :

$$\frac{\sigma^2}{\gamma_0} = (1 - a_2^2)(1 - \rho_1^2).$$

Le membre de gauche et le second facteur sont strictement positifs; donc $|a_2| < 1$. Puis $|a_1| = (1 - a_2)|\rho_1| < 1 - a_2$. Ainsi $(a_1, a_2) \in \mathcal{D}$.

La question 3 montre que la condition de taille demandée est nécessaire. On vient même de l'établir pour tout processus satisfaisant les hypothèses, indépendamment d'une hypothèse de convergence de ρ_k .

Montrons maintenant que cette condition entraîne $\rho_k \rightarrow 0$, en distinguant les cas demandés.

Premier cas : deux racines réelles de valeurs absolues différentes. Elles sont distinctes. Il existe des réels A, B tels que $\rho_k = Ar_1^k + Br_2^k$ pour $k \geq 0$. On choisit A, B avec $A + B = \rho_0 = 1$ et $Ar_1 + Br_2 = \rho_1$; le système est résoluble car $r_1 \neq r_2$. Chaque terme géométrique satisfait la récurrence puisque $r_j^2 = a_1r_j + a_2$, et l'unicité de la suite à deux valeurs initiales prouve la formule. Si l'une des racines est nulle, on convient que son terme au rang 0 vaut 1 et qu'il vaut 0 aux rangs suivants.

Comme $|r_1| < 1$ et $|r_2| < 1$, les deux suites géométriques tendent vers 0; donc $\rho_k \rightarrow 0$.

Deuxième cas : deux racines réelles de même valeur absolue. Si elles sont distinctes, elles sont opposées et le raisonnement précédent reste valable; chacune a une valeur absolue strictement inférieure à 1.

Si elles sont confondues en un réel $r \neq 0$, alors $a_1 = 2r$, $a_2 = -r^2$. La suite $\rho_k = (A + Bk)r^k$ satisfait la récurrence : les fonctions géométrique et géométrique multipliée par le rang la vérifient par substitution directe. Les valeurs initiales imposent

$A = 1$ et $B = \rho_1/r - 1$, et l'unicité de la récurrence donne cette expression. Pour $|r| < 1$, $r^k \rightarrow 0$ et $k|r|^k \rightarrow 0$ par croissance comparée, donc $\rho_k \rightarrow 0$.

Si la racine double vaut 0, on a $a_1 = a_2 = 0$; la relation donne $\rho_k = 0$ pour tout $k \geq 2$, donc la convergence est encore acquise.

Troisième cas : $\Delta < 0$. Alors $r = \sqrt{-a_2} > 0$ et $|a_1| < 2r$. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante de 1 à -1 sur $[0, \pi]$; il existe donc un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta = a_1/(2r)$. On a $\sin \theta > 0$.

Les identités trigonométriques démontrées par les formules d'addition donnent, pour $u_k = r^k \cos(k\theta)$ et pour $v_k = r^k \sin(k\theta)$:

$$u_{k+2} = 2r \cos \theta u_{k+1} - r^2 u_k = a_1 u_{k+1} + a_2 u_k,$$

avec la même relation pour v . En choisissant :

$$A = 1, \quad B = \frac{\rho_1/r - \cos \theta}{\sin \theta},$$

on obtient les bonnes valeurs initiales, donc :

$$\rho_k = r^k (A \cos(k\theta) + B \sin(k\theta)).$$

La condition demandée est $r < 1$. Alors $|\rho_k| \leq r^k (|A| + |B|) \rightarrow 0$.

La nécessité et la suffisance sont donc établies dans les trois cas, uniquement avec des suites et coefficients réels.

Partie II. Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Dans cette partie et les suivantes, les suites, les espaces vectoriels et les polynômes sont réels. Les propriétés des polynômes générateurs de suites seront établies directement, sans invoquer de théorie générale supplémentaire sur les endomorphismes.

7. Méthode 1 — Critère de sous-espace

La suite nulle vérifie la récurrence, donc $\mathcal{S}_p$ est non vide. Soit $s, t \in \mathcal{S}_p$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pour

tout $n \geq 1$:

$$(\alpha s + \beta t)_{n+p} = \alpha s_{n+p} + \beta t_{n+p} = \sum_{j=1}^p a_j (\alpha s_{n+p-j} + \beta t_{n+p-j}).$$

La suite $\alpha s + \beta t$ vérifie donc la même récurrence. Ainsi $\mathcal{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Méthode 2 — Noyau d'une application linéaire

Définissons sur l'espace des suites réelles l'application :

$$L(s) = \left(s_{n+p} - \sum_{j=1}^p a_j s_{n+p-j} \right)_{n \geq 1}.$$

Chaque coordonnée est linéaire en s , donc L est linéaire. L'ensemble des suites satisfaisant la récurrence est exactement $\text{Ker } L$, qui est un sous-espace vectoriel.

La première méthode est une vérification directe ; la seconde permet de reconnaître plus généralement les solutions d'une relation linéaire homogène.

8. L'application Φ est linéaire puisque chaque coordonnée initiale l'est.

Si $\Phi(s) = 0$, les p premiers termes de s sont nuls. La récurrence donne successivement $s_{p+1} = 0$, puis $s_{p+2} = 0$, et ainsi de suite. Une récurrence sur le rang montre que s est la suite nulle : Φ est injective.

Pour tout p -uplet réel $(b_1, \dots, b_p)$, on définit $s_1 = b_1, \dots, s_p = b_p$, puis chaque terme suivant au moyen de la relation donnée. Cette construction définit une suite unique appartenant à $\mathcal{S}_p$, dont l'image par Φ est le p -uplet choisi : Φ est surjective.

Ainsi, Φ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_p$ sur $\mathbb{R}^p$, et $\dim \mathcal{S}_p = p$.

9. a) L'image réciproque d'une base par un isomorphisme est une base. La famille $(v^{(1)}, \dots, v^{(p)})$ est donc une base de $\mathcal{S}_p$.

Pour $s \in \mathcal{S}_p$, on a

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^p s_i e_i.$$

En appliquant Φ^{-1} :

$$s = \sum_{i=1}^p s_i v^{(i)}.$$

Les coordonnées de s dans la base demandée sont donc $(s_1, \dots, s_p)$.

9. b) La définition de $v^{(i)}$ donne, pour $1 \leq i, j \leq p$:

$$v_j^{(i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases}$$

Au rang $n = 1$, la récurrence donne :

$$v_{p+1}^{(i)} = \sum_{l=1}^p a_l v_{p+1-l}^{(i)}.$$

Un seul terme peut être non nul : celui où $p + 1 - l = i$, soit $l = p - i + 1$. Ainsi,

$$v_{p+1}^{(i)} = a_{p-i+1}.$$

10. a) Si $s \in \mathcal{S}_p$ et $t = \delta(s)$, alors, pour tout $n \geq 1$:

$$t_{n+p} = s_{n+p+1} = \sum_{j=1}^p a_j s_{n+p+1-j} = \sum_{j=1}^p a_j t_{n+p-j}.$$

Donc $\delta(s) \in \mathcal{S}_p$. Par ailleurs, décaler les coordonnées commute avec les combinaisons linéaires : δ est linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathcal{S}_p$.

10. b) D'après 9. a), les coordonnées de $\delta(s)$ dans la base sont :

$$(s_2, s_3, \dots, s_p, s_{p+1}) = (s_2, s_3, \dots, s_p, a_p s_1 + a_{p-1} s_2 + \dots + a_1 s_p).$$

Pour $p \geq 2$, la matrice est donc :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_p & a_{p-1} & \dots & a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Pour $p = 1$, la récurrence est $s_{n+1} = a_1 s_n$ et la matrice se réduit à (a_1) .

11. a) Question adaptée au programme actuel : les valeurs propres et racines considérées sont réelles.

Méthode 1 — Suites propres

Si $s \neq 0$ vérifie $\delta(s) = \lambda s$, alors $s_{n+1} = \lambda s_n$, donc $s_n = s_1 \lambda^{n-1}$. Nécessairement $s_1 \neq 0$, sinon toute la suite serait nulle.

En appliquant la récurrence au rang 1 et en divisant par s_1 , il vient :

$$\lambda^p = a_1 \lambda^{p-1} + \dots + a_p.$$

Ainsi $P(\lambda) = 0$. Comme $P(0) = -a_p \neq 0$, on a aussi $\lambda \neq 0$.

Réciproquement, si $P(\lambda) = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \neq 0$ et la suite $s_n = \lambda^{n-1}$ satisfait la récurrence, en multipliant l'égalité $P(\lambda) = 0$ par λ^{n-1} . Elle est non nulle et vérifie $\delta(s) = \lambda s$. Donc λ est valeur propre.

Méthode 2 — Système matriciel

Pour un vecteur $z = (z_1, \dots, z_p)$, les premières lignes de $\Delta z = \lambda z$ imposent $z_j = \lambda^{j-1} z_1$ pour $1 \leq j \leq p$. Si $z_1 = 0$, tout le vecteur est nul ; un vecteur propre doit donc avoir $z_1 \neq 0$.

La dernière ligne s'écrit alors :

$$a_p z_1 + a_{p-1} \lambda z_1 + \dots + a_1 \lambda^{p-1} z_1 = \lambda^p z_1.$$

Après division par z_1 , c'est $P(\lambda) = 0$. Inversement, si ce dernier résultat est vrai, le vecteur $(1, \lambda, \dots, \lambda^{p-1})$ satisfait toutes les lignes et est non nul. Pour $p = 1$, le système se réduit directement à $a_1 z_1 = \lambda z_1$.

Les deux méthodes donnent exactement les mêmes valeurs propres réelles. La première exploite le sens du décalage ; la seconde se réutilise directement avec la matrice compagnon, sans déterminant.

11. b) Pour une valeur propre λ , les suites propres sont exactement les suites

$s_n = c \lambda^{n-1}$, avec $c \in \mathbb{R}$. L'espace propre est donc une droite : sa dimension vaut 1.

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Si P possède m racines réelles distinctes, la somme des espaces propres a donc dimension m . L'endomorphisme δ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si cette somme a dimension p .

Par 11. a), cela équivaut à ce que P possède p racines réelles distinctes. Comme P est de degré p , il ne peut en posséder davantage. La condition nécessaire et suffisante est donc : P est un produit de p facteurs linéaires réels à racines deux à deux distinctes.

Cette conclusion vient des dimensions des espaces propres ; aucun critère de diagonalisation par un polynôme annulateur n'est invoqué.

11. c) Question adaptée au programme actuel : on suppose les p racines réelles et distinctes.

Pour chaque i , $\lambda_i \neq 0$ car $P(0) = -a_p \neq 0$. La suite $w^{(i)} = (\lambda_i^n)_{n \geq 1}$ appartient à $\mathcal{S}_p$ et est un vecteur propre non nul de δ associé à λ_i .

Les p valeurs propres étant distinctes, les p suites $w^{(i)}$ sont libres. L'espace $\mathcal{S}_p$ ayant dimension p , elles en forment une base. Chaque $s \in \mathcal{S}_p$ possède donc une unique décomposition :

$$s = \sum_{i=1}^p \alpha_i w^{(i)}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Coordonnée par coordonnée, cela donne

$$s_n = \sum_{i=1}^p \alpha_i \lambda_i^n$$

pour tout $n \geq 1$, avec unicité des coefficients.

Partie III. Polynôme générateur minimal d'une suite récurrente linéaire

Pour un polynôme réel

$$Q(X) = \sum_j q_j X^j,$$

l'action sur une suite est concrètement :

$$(Q(\delta)s)_n = \sum_j q_j s_{n+j}.$$

Toutes ces sommes sont finies. Cette identité permettra de traiter les générateurs uniquement à l'aide de la récurrence, de la linéarité et de la division euclidienne.

12. Méthode 1 — Le polynôme de la récurrence

Le polynôme non nul $P(X) = X^p - a_1 X^{p-1} - \dots - a_p$ vérifie :

$$(P(\delta)s)_n = s_{n+p} - a_1 s_{n+p-1} - \dots - a_p s_n = 0$$

pour tout $n \geq 1$. Donc $P \in J$ et J n'est pas réduit au polynôme nul.

Méthode 2 — Dépendance linéaire en dimension finie

Les $p + 1$ suites $s, \delta(s), \dots, \delta^p(s)$ appartiennent à l'espace $\mathcal{S}_p$ de dimension p . Elles sont donc liées : il existe des réels $q_0, \dots, q_p$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^p q_j \delta^j(s) = 0.$$

Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{j=0}^p q_j X^j$$

est non nul et vérifie $Q(\delta)s = 0$, donc $Q \in J$.

La première méthode fournit un générateur explicite ; la seconde donne une preuve d'existence à partir de la seule dimension.

13. Le polynôme nul appartient à J . Si $Q, R \in J$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la linéarité donne :

$$(\alpha Q + \beta R)(\delta)s = \alpha Q(\delta)s + \beta R(\delta)s = 0.$$

Donc $\alpha Q + \beta R \in J$, ce qui établit que J est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

14. Les puissances de δ commutent entre elles ; le produit de deux polynômes en δ correspond donc au produit des polynômes. Si $Q \in J$:

$$(QA)(\delta)s = A(\delta)Q(\delta)s = A(\delta)0 = 0.$$

Ainsi $QA \in J$ pour tout $A \in \mathbb{R}[X]$.

15. a) Par 12, l'ensemble $\mathcal{N}$ est non vide et contient des entiers naturels. Pour voir directement l'existence de son minimum, choisissons un degré $m \in \mathcal{N}$. L'ensemble fini non vide $\mathcal{N} \cap \{0, \dots, m\}$ possède un plus petit élément d ; tout autre élément de $\mathcal{N}$ est supérieur à m , ou appartient à cet ensemble fini. Ainsi d est le minimum de $\mathcal{N}$.

Par définition de $\mathcal{N}$, il existe un polynôme non nul $\Pi \in J$ de degré d .

Si s est la suite nulle, alors $J = \mathbb{R}[X]$ et $d = 0$. Si $s \neq 0$, aucun polynôme constant non nul n'annule s , donc $d \geq 1$.

15. b) Soit $Q \in J$. La division euclidienne par le polynôme non nul Π donne :

$$Q = \Pi L + R, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < d.$$

Par 14, $\Pi L \in J$, et par 13, $R = Q - \Pi L \in J$. Si R était non nul, son degré serait strictement inférieur au plus petit degré non nul dans J , contradiction. Donc $R = 0$ et $Q = \Pi L$.

Réciproquement, tout multiple ΠL appartient à J par 14. Ainsi :

$$J = \{\Pi L : L \in \mathbb{R}[X]\}.$$

15. c) Soit $c \neq 0$ le coefficient dominant de Π . Le polynôme $\Pi^* = \Pi/c$ est dans J , de degré d et de coefficient dominant 1.

Si un autre polynôme $T \in J$ est unitaire de degré d , alors, d'après 15. b), $T = \Pi^* L$. Puisque les degrés du produit s'ajoutent pour les polynômes non nuls, L a degré 0. L'égalité des coefficients dominants impose $L = 1$. Donc $T = \Pi^*$.

Le polynôme générateur minimal est ainsi unique. Pour la suite nulle, il vaut 1 et son degré est 0.

16. Méthode 1 — Récurrence vérifiée et minimalité

La récurrence donnée correspond au générateur $P(X) = X^3 - 2X - 1$. On vérifie :

$$P(X) = (X + 1)(X^2 - X - 1).$$

Montrons que le facteur $Q(X) = X^2 - X - 1$ génère effectivement la suite. Posons $t_n = s_{n+2} - s_{n+1} - s_n$. Chaque décalage de s satisfait la récurrence d'ordre 3, donc leur combinaison t également.

Les termes suivants de s sont $s_4 = 2s_2 + s_1 = 2$ et $s_5 = 2s_3 + s_2 = 3$. On a alors :

$$t_1 = 1 - 1 - 0 = 0, \quad t_2 = 2 - 1 - 1 = 0, \quad t_3 = 3 - 2 - 1 = 0.$$

La récurrence impose donc $t_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi, $Q \in J$ et le degré minimal est au plus 2.

La suite n'est pas nulle, donc son degré n'est pas 0. S'il existait un générateur unitaire de degré 1, de la forme $X - b$, on aurait $s_{n+1} = bs_n$. Au rang 1, cela imposerait $s_2 = bs_1 = 0$, alors que $s_2 = 1$. C'est impossible.

Le degré vaut donc 2 et, par unicité :

$$\Pi^*(X) = X^2 - X - 1.$$

Méthode 2 — Décomposition en deux suites géométriques réelles

Posons $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ et $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$. Ce sont deux réels distincts, non nuls, satisfaisant $\alpha^2 = \alpha + 1$ et $\beta^2 = \beta + 1$. Le polynôme $P = (X + 1)(X^2 - X - 1)$ s'annule donc en ces deux réels.

La suite $t_n = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})/\sqrt{5}$ satisfait la récurrence d'ordre 3 : chaque suite géométrique la vérifie parce que sa raison est une racine de P . En outre, $t_1 = 0$, $t_2 = (\alpha - \beta)/\sqrt{5} = 1$ et $t_3 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)/\sqrt{5} = 1$. Par unicité des termes après trois valeurs initiales, $t = s$.

Pour tout générateur R de s , on a donc, pour chaque $n \geq 1$:

$$R(\alpha)\alpha^{n-1} - R(\beta)\beta^{n-1} = 0.$$

Aux indices 1 et 2, cela impose $R(\alpha) = R(\beta)$ et $\alpha R(\alpha) = \beta R(\beta)$. Puisque $\alpha \neq \beta$, les deux valeurs sont nulles. Tout générateur non nul a ainsi deux racines distinctes et un degré au moins égal à 2.

Le polynôme $X^2 - X - 1$ annule chacune des deux suites géométriques, donc leur combinaison s ; il est unitaire de degré 2. Il est donc exactement le générateur minimal et le degré de la suite vaut 2.

La première méthode évite le calcul des racines ; la seconde montre pourquoi cette suite, bien que présentée avec une récurrence d'ordre 3, ne nécessite que deux composantes géométriques.

17. a) Notons $\Pi^*(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \dots + b_0$. Son action donne une récurrence d'ordre d satisfaite par s .

Pour tout polynôme Q , la suite $t = Q(\delta)s$ vérifie cette même récurrence, car les polynômes en δ commutent :

$$\Pi^*(\delta)t = Q(\delta)\Pi^*(\delta)s = 0.$$

Une telle suite t est nulle dès que ses d premiers termes sont nuls, par récurrence sur le rang.

Supposons

$$\sum_{j=1}^d c_j u_j = 0.$$

Les coordonnées de cette égalité sont :

$$\sum_{j=1}^d c_j s_{n+j-1} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq n \leq k.$$

Pour

$$Q(X) = \sum_{j=1}^d c_j X^{j-1},$$

les k premiers termes de $Q(\delta)s$ sont donc nuls. Comme $k > d$, ses d premiers termes sont nuls, puis toute la suite est nulle. Ainsi $Q \in J$.

Si un c_j était non nul, Q serait un générateur non nul de degré au plus $d - 1$, contradiction. Tous les c_j sont donc nuls. La famille $(u_1, \dots, u_d)$ est libre ; ses vecteurs sont bien dans l'image de h car $u_j = h(e_j)$.

17. b) La relation $\Pi^*(\delta)s = 0$ donne, coordonnée par coordonnée, pour toute colonne admissible :

$$u_{m+d} + b_{d-1}u_{m+d-1} + \dots + b_0u_m = 0 \quad \text{si } 1 \leq m \leq k - d.$$

En prenant $m = 1$, la colonne u_{d+1} appartient à l'espace engendré par $u_1, \dots, u_d$. En prenant successivement les indices suivants, une récurrence montre que chaque colonne u_j , pour $j > d$, appartient au même espace.

Ainsi $(u_1, \dots, u_d, u_j)$ est liée pour chaque $j > d$, et toutes les colonnes sont engendrées par les d premières. Celles-ci étant libres d'après 17. a), $\text{rg } h = d$. Le théorème du rang dans $\mathbb{R}^k$ donne :

$$\dim \text{Ker } h = k - d.$$

17. c) Pour $q = (q_0, \dots, q_{k-1})$, la n -ième coordonnée de Hq est :

$$(Hq)_n = \sum_{j=0}^{k-1} q_j s_{n+j} = (Q(\delta)s)_n \quad \text{pour } 1 \leq n \leq k.$$

Si $Q \in J$, toute la suite $Q(\delta)s$ est nulle et $Hq = 0$. Réciproquement, si $Hq = 0$, les k premiers termes de cette suite sont nuls. Comme elle satisfait la récurrence d'ordre d et $k > d$, elle est entièrement nulle. Donc $Q \in J$.

On a bien $Q \in J$ si et seulement si $q \in \text{Ker } h$.

17. d) Méthode 1 — Rang et noyau de la matrice de la question 17

Prenons $k = 4$, strictement supérieur au degré $d \leq 3$. Les sept termes fournis donnent :

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 & 19 \\ 7 & 5 & 19 & 29 \\ 5 & 19 & 29 & 67 \\ 19 & 29 & 67 & 125 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes satisfont $u_3 = 2u_1 + u_2$ et $u_4 = 2u_1 + 3u_2$, comme le vérifie chaque coordonnée. Les deux premières sont libres : si $cu_1 + eu_2 = 0$, les deux premières coordonnées donnent $-c + 7e = 0$ et $7c + 5e = 0$, puis $c = 7e$ et $54e = 0$. Ainsi $c = e = 0$.

La matrice a donc rang 2. D'après 17. b), son rang est le degré de la suite, donc $d = 2$. La relation $-2u_1 - u_2 + u_3 = 0$ montre que $(-2, -1, 1, 0)$ appartient au noyau de H . Par 17.

c), le polynôme $X^2 - X - 2$ est générateur. Il est unitaire et de degré d , donc c'est le générateur minimal.

Méthode 2 — Recherche directe d'une récurrence d'ordre deux

Le degré d de la suite est au plus 3. Le raisonnement de 17. a) montre que toute suite $Q(\delta)s$ satisfait une récurrence d'ordre d ; il suffit donc de vérifier ses trois premiers termes nuls pour établir qu'elle est nulle.

Cherchons $Q(X) = X^2 + bX + c$. Les deux premiers termes de $Q(\delta)s$ imposent :

$$5 + 7b - c = 0, \quad 19 + 5b + 7c = 0.$$

La première relation donne $c = 5 + 7b$. Dans la seconde :

$$19 + 5b + 7(5 + 7b) = 0 \iff 54 + 54b = 0.$$

Ainsi $b = -1$ et $c = -2$. Le troisième terme vérifie bien :

$$29 - 19 - 2 \times 5 = 0.$$

Donc $Q(X) = X^2 - X - 2$ est un générateur. Les termes suivants fournis sont cohérents : $67 - 29 - 2 \times 19 = 0$ et $125 - 67 - 2 \times 29 = 0$.

Un générateur de degré 1 imposerait $s_{n+1} = as_n$. Les deux premiers termes donneraient $a = -7$, puis $s_3 = -49$, contrairement à $s_3 = 5$. La suite est non nulle ; son degré n'est donc pas 0 non plus.

Son degré minimal vaut 2 et :

$$\Pi^*(X) = X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1).$$

La première méthode exploite les sept termes via la matrice ; la seconde cherche directement une relation courte et justifie qu'elle se propage à toute la suite.

Partie IV. Un algorithme de calcul d'un polynôme générateur

18. Si Q est générateur, tous les termes de $Q(\delta)s$ sont nuls, en particulier les k premiers : la relation $(\star)$ est vérifiée.

Réciproquement, supposons $(\star)$ vraie. Posons $t = Q(\delta)s$. Le polynôme générateur minimal Π^* a degré d , et :

$$\Pi^*(\delta)t = Q(\delta)\Pi^*(\delta)s = 0.$$

La suite t satisfait donc la récurrence d'ordre d associée à Π^* . Ses k premiers termes sont nuls par $(\star)$; puisque $k \geq d$, ses d premiers termes sont nuls. La récurrence impose alors que tous les termes soient nuls. Ainsi $Q \in J$.

L'équivalence reste vraie lorsque $k = d$, et lorsque Q est le polynôme nul.

19. a) Les polynômes considérés sont des sommes finies : on peut développer leur produit et regrouper les termes de même puissance sans problème de convergence :

$$QS = \left(\sum_{j=0}^k q_j X^j \right) \left(\sum_{i=0}^{2k-1} s_{2k-i} X^i \right) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{2k-1} q_j s_{2k-i} X^{i+j}.$$

Les puissances possibles vont de 0 à $3k - 1$. Le coefficient de X^n est exactement la somme des termes dont $i + j = n$, c'est-à-dire t_n . Ainsi :

$$QS = \sum_{n=0}^{3k-1} t_n X^n.$$

19. b) Si $k \leq n \leq 2k - 1$, chaque indice $j \in \{0, \dots, k\}$ donne un indice $i = n - j$ compris entre 0 et $2k - 1$. Dans cette plage, on peut donc écrire :

$$t_n = \sum_{j=0}^k q_j s_{2k-n+j}.$$

Posons $m = 2k - n$. Quand n parcourt $\{k, \dots, 2k - 1\}$, m parcourt $\{1, \dots, k\}$. La relation $(\star)$ donne donc $t_n = 0$ pour tous ces indices.

Il reste seulement les coefficients de degrés inférieurs à k et ceux de degrés supérieurs ou égaux à $2k$. En posant :

$$A(X) = \sum_{n=0}^{k-1} t_n X^n, \quad B(X) = \sum_{n=2k}^{3k-1} t_n X^{n-2k},$$

on a $A, B \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ et $QS = A + X^{2k}B$.

19. c) Si $QS = A + X^{2k}B$ avec $\deg A, \deg B \leq k - 1$, tous les coefficients du produit QS aux degrés $k, \dots, 2k - 1$ sont nuls.

D'après le calcul de 19. b), pour $m \in \{1, \dots, k\}$, le coefficient de degré $2k - m$ est :

$$t_{2k-m} = \sum_{j=0}^k q_j s_{m+j}.$$

Ces coefficients étant nuls, la relation $(\star)$ est vérifiée. Avec 18, cela caractérise les polynômes générateurs de degré au plus k .

20. a) Code adapté en Python. L'analyse porte d'abord sur les opérations polynomiales exactes de l'algorithme.

À chaque passage, $\deg B \geq k \geq 1$, donc B n'est pas nul et la division euclidienne est licite. Le nouveau B est le reste R , soit nul, soit de degré strictement inférieur à celui de l'ancien B .

Tant que la boucle continue, les degrés de B sont donc des entiers supérieurs ou égaux à k , strictement décroissants à chaque passage. Une telle décroissance ne peut se poursuivre indéfiniment. Si un reste est nul, sa convention de degré $-\infty$ fait également sortir de la boucle.

L'algorithme se termine donc après un nombre fini de passages.

20. b) Rectification locale de l'énoncé : l'inégalité $k \leq \deg B$ est une condition d'entrée dans la boucle, et non un invariant valable après le dernier passage. On vérifie séparément cette condition à l'initialisation.

La suite n'est pas nulle, car son degré est $d \geq 1$. Au moins un de ses d premiers termes est non nul : sinon la récurrence d'ordre d donnée par Π^* imposerait que toute la suite soit nulle.

Soit m le premier indice d'un terme non nul. Alors $1 \leq m \leq d \leq k$. Dans le polynôme S , le coefficient de plus haut degré non nul est s_m , associé à X^{2k-m} . Donc :

$$\deg S = 2k - m \geq 2k - d \geq k, \quad \deg S \leq 2k - 1.$$

À l'initialisation, $A = X^{2k}$, $B = S$, $C = 0$ et $D = 1$. On a :

$$\deg A = 2k, \quad k \leq \deg B < 2k, \quad \deg C = -\infty \leq 0, \quad \deg D = 0 = 2k - \deg A.$$

En outre, $CS = 0 = A + X^{2k}(-1)$, donc $CS \equiv A$, puisque le polynôme constant -1 est dans $\mathbb{R}_{k-1}[X]$. Et $DS = S = B$, donc $DS \equiv B$.

Toutes les relations de l'énoncé adapté sont ainsi vérifiées. On dispose même de la relation plus précise :

$$\deg C < \deg D = 2k - \deg A.$$

20. c) Rectification locale de l'énoncé : on propage les cinq relations qui restent valables à la sortie ; la borne $k \leq \deg B$ ne doit être exigée que pour entrer dans un nouveau passage.

Notons $a = \deg A$ et $b = \deg B$ avant le passage. La condition de boucle et les invariants donnent $k \leq b < a$. La division $A = BF + R$ fournit :

$$\deg F = a - b, \quad R = 0 \text{ ou } \deg R < b.$$

Après le passage, les nouvelles valeurs sont $A' = B$, $B' = R$, $C' = D$ et $D' = C - DF$.

Les bornes de degré donnent :

$$\deg C' = \deg D \leq 2k - a \leq 2k - b = 2k - \deg A',$$

$$\deg D' \leq \max\{\deg C, \deg D + \deg F\} \leq \max\{2k - a, 2k - a + a - b\} = 2k - b.$$

Ainsi $\deg D' \leq 2k - \deg A'$. On a aussi $\deg B' < \deg A'$, avec la convention $\deg 0 = -\infty$ si le reste est nul.

Pour les relations de congruence, écrivons les égalités explicites données par les invariants :

$$CS = A + X^{2k}U, \quad DS = B + X^{2k}V, \quad U, V \in \mathbb{R}_{k-1}[X].$$

Alors $C'S = DS = B + X^{2k}V = A' + X^{2k}V$, donc $C'S \equiv A'$.

D'autre part :

$$D'S = (C - DF)S = A - BF + X^{2k}(U - FV) = R + X^{2k}(U - FV).$$

Il faut contrôler le degré de $U - FV$, car la notation de congruence donnée dans le sujet exige un reste de degré au plus $k - 1$.

Comme $b \geq k$, $\deg D' \leq 2k - b \leq k$. De plus, $\deg S \leq 2k - 1$ et $\deg R < b \leq 2k - 1$. On a donc $\deg(D'S - R) \leq 3k - 1$. L'égalité $D'S - R = X^{2k}(U - FV)$ impose que $U - FV$ soit nul ou de degré au plus $k - 1$. Ainsi, $D'S \equiv B'$ au sens exact de la définition.

Les cinq relations sont donc préservées. La condition $k \leq \deg B'$ est vraie si un nouveau passage a lieu, et fausse au passage final puisque c'est précisément le test d'arrêt.

Pour préparer la question suivante, vérifions également que D reste non nul. La relation plus forte $\deg C < \deg D = 2k - a$ vaut initialement. Si elle vaut avant un passage, alors :

$$\deg(DF) = (2k - a) + (a - b) = 2k - b > 2k - a = \deg D > \deg C.$$

Le terme de plus haut degré de DF ne peut être annulé par C . Donc $D' = C - DF \neq 0$ et $\deg D' = 2k - b = 2k - \deg A'$. Par ailleurs,

$\deg C' = \deg D = 2k - a < 2k - b = \deg D'$. La relation plus forte est donc préservée à tous les passages et assure $D \neq 0$ à chaque étape.

20. d) À l'arrêt, on a $\deg B < k$. La boucle a effectué au moins un passage puisque $\deg S \geq k$ à l'initialisation. Après le dernier passage, A est l'ancien B , dont le degré était au moins k . Ainsi $\deg A \geq k$.

L'invariant donne alors $\deg D \leq 2k - \deg A \leq k$. On sait aussi, par le contrôle final de 20. c), que $D \neq 0$. Enfin, $DS \equiv B$ signifie qu'il existe $W \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ tel que :

$$DS = B + X^{2k}W.$$

Le polynôme B a degré inférieur à k et D a degré au plus k . La question 19. c), appliquée à $Q = D$, puis la question 18, montrent que D est un polynôme générateur de s .

La variable demandée est donc D . L'algorithme renvoie également B , qui sert de reste dans l'identité polynomiale.

Implémentation complète des opérations et de l'algorithme

Les listes ci-dessous représentent les coefficients dans l'ordre croissant des puissances. La normalisation retire les coefficients nuls de fin de liste ; le polynôme nul est représenté par une liste à un seul coefficient nul. Les coefficients des exemples sont rationnels : l'utilisation de `Fraction` permet de les manipuler exactement, sans décider de la nullité d'un reste à l'aide d'un seuil numérique.

Python

```
from fractions import Fraction

def normaliser(P):
    T = []
    for c in P:
        T.append(Fraction(c))
    while len(T) > 1 and T[-1] == 0:
        T = T[:-1]
    return T
```

```
def degre(P):
    T = normaliser(P)
    if len(T) == 1 and T[0] == 0:
        return -float("inf")
    return len(T) - 1

def monome(m):
    T = [Fraction(0)] * (m + 1)
    T[m] = Fraction(1)
    return T

def difference(A, B):
    A = normaliser(A)
    B = normaliser(B)
    T = [Fraction(0)] * max(len(A), len(B))
    for j in range(len(A)):
        T[j] = T[j] + A[j]
    for j in range(len(B)):
        T[j] = T[j] - B[j]
    return normaliser(T)

def produit(A, B):
    A = normaliser(A)
    B = normaliser(B)
    T = [Fraction(0)] * (len(A) + len(B) - 1)
    for i in range(len(A)):
        for j in range(len(B)):
            T[i + j] = T[i + j] + A[i] * B[j]
    return normaliser(T)
```

```
def division_euclidienne(A, B):  
    R = normaliser(A)  
    B = normaliser(B)  
    # Le diviseur B doit etre non nul.  
    if degre(R) < degre(B):  
        return [Fraction(0)], R  
    F = [Fraction(0)] * (degre(R) - degre(B) + 1)  
    while degre(R) >= degre(B):  
        m = degre(R) - degre(B)  
        c = R[-1] / B[-1]  
        F[m] = F[m] + c  
        T = [Fraction(0)] * (m + len(B))  
        for j in range(len(B)):  
            T[m + j] = c * B[j]  
        R = difference(R, T)  
    return normaliser(F), R
```

```
def algorithme(S, k):  
    A = monome(2 * k)  
    B = normaliser(S)  
    C = [Fraction(0)]  
    D = [Fraction(1)]  
    while degre(B) >= k:  
        F, R = division_euclidienne(A, B)  
        E = difference(C, produit(D, F))  
        C = D  
        D = E  
        A = B  
        B = R  
    return D, B
```

Dans la division, m est la différence des degrés et c le quotient des coefficients dominants. Le polynôme T représente $cX^m B$; sa soustraction annule le terme dominant du reste. À chaque tour de cette boucle interne, le degré diminue strictement, comme dans la division euclidienne démontrée en cours. Dans le programme principal, l'ordre des affectations conserve le quotient et le reste calculés avant de remplacer les variables.

Le programme accepte des listes non vides à coefficients rationnels, éventuellement avec des zéros finaux. Pour représenter une fraction exacte, on fournit par exemple `Fraction(1, 3)` plutôt qu'une valeur décimale approchée. Une valeur décimale Python est convertie en la fraction correspondant à sa représentation effective; cette conversion ne reconstitue pas un réel arbitraire. Les démonstrations de l'algorithme s'appliquent à tous les coefficients réels, tandis que cette exécution exacte concerne les entrées rationnelles.

Le code a été exécuté avec les suites des questions 16 et 17. d), avec des suites géométriques et avec une récurrence de degré 3. Les divisions ont été contrôlées par l'égalité exacte $A = BF + R$ et les degrés des restes. Les polynômes obtenus, après division par leur coefficient dominant, coïncident notamment avec $X^2 - X - 1$ pour la question 16 et $X^2 - X - 2$ pour la question 17. d). Ces contrôles complètent la démonstration; ils ne la remplacent pas.

Relevé des adaptations

- 1. a) Code adapté en Python : conversion de la fonction de calcul d'un terme, en conservant les trois paramètres initiaux, la récurrence et l'indexation à partir de 1.
- 1. d) La recherche de racines non réelles est remplacée par la factorisation réelle et l'étude du facteur quadratique, qui n'a pas de racine réelle.
- 1. e) La décomposition initiale est remplacée par une combinaison réelle de suites géométriques, sinus et cosinus; la récurrence et les valeurs initiales sont vérifiées directement.
- 2–3) Le préambule distingue le cas des racines réelles et le cas où $\Delta < 0$. Dans ce

dernier cas, la condition de taille est reformulée avec $r = \sqrt{-y}$; l'équivalence décrivant $\mathcal{D}$ est conservée et démontrée.

- 6. b) Le cas $\Delta < 0$ est traité par une représentation trigonométrique réelle, vérifiée par les formules d'addition. La nécessité de la condition est justifiée avec les hypothèses de covariance du processus, afin de ne pas l'affirmer pour une suite récurrente quelconque.
- 7–20) Les coefficients, suites, polynômes et espaces vectoriels sont réels. Les propriétés des générateurs de suites sont établies élémentairement, sans invoquer de résultat général sur un polynôme minimal d'endomorphisme.
- 11. a)–c) Les valeurs propres et racines sont réelles ; la diagonalisation est demandée sur $\mathbb{R}$, et la question 11. c) suppose p racines réelles distinctes.
- 20) L'algorithme est écrit en Python avec des opérations polynomiales dont le rôle est précisé. La convention $\deg(0) = -\infty$ est explicitée pour traiter les restes nuls et la variable C initialement nulle.
- 20. b)–c) La borne $k \leq \deg B$ est séparée des invariants : elle vaut à l'initialisation et à l'entrée d'un passage, mais cesse de valoir à l'arrêt. L'inégalité stricte $\deg B < \deg A$, effectivement vérifiée, facilite le contrôle des degrés.
- 20. d) Le caractère non nul du générateur obtenu est explicité et démontré, pour éviter une conclusion vide fondée sur le polynôme nul.