



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques

2011

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Le problème comporte cinq parties.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}[X]$ celui des polynômes à coefficients réels. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, on notera $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Si U est une partie non vide de $L(E)$, on appelle centre de U et on note $C(U)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de U , c'est-à-dire :

$$C(U) = \{v \in L(E) : \forall u \in U, u \circ v = v \circ u\}.$$

Si $u \in L(E)$ et $U = \{u\}$, $C(\{u\})$ est plus simplement noté $C(u)$ et est appelé aussi commutant de u . On a donc :

$$C(u) = \{v \in L(E) : u \circ v = v \circ u\}.$$

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ avec

$$P = a_d X^d + \dots + a_0 = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

on note $P(u)$ l'endomorphisme de E défini par

$$P(u) = a_d u^d + \dots + a_0 \text{id}_E = \sum_{k=0}^d a_k u^k.$$

En particulier, $1(u) = \text{id}_E$. Enfin, on note $\mathbb{R}[u] = \{P(u) : P \in \mathbb{R}[X]\}$. L'objectif du problème est de comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$ dans certains cas.

Partie I — Préliminaires

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel réel de dimension finie n , où $n \geq 1$. U est une partie non vide de $L(E)$ et $u \in L(E)$.

1. Montrer que $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ de dimension supérieure ou égale à 1.
2. Vérifier que $C(u)$ contient $\mathbb{R}[u]$.
3. Soit λ une valeur propre de u , $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E)$ l'espace propre associé et $v \in C(u)$. Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par v .

Partie II — Étude d'un exemple

Dans toute cette partie, on notera :

$$A = \left\{ (a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \forall x \in]-1, 1[, \sum_{n \geq 0} |a_n x^n| \text{ converge} \right\},$$

$$B = \{ (a_n)_{n \geq 0} \in A : \forall n \in \mathbb{N}, 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0 \},$$

$$H = \left\{ f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : (a_n)_{n \geq 0} \in A \right\},$$

$$E = \left\{ f : x \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n : (a_n)_{n \geq 0} \in B \right\},$$

$$\alpha_n = \frac{1}{2^n}, \quad \beta_n = (-1)^n, \quad \gamma_n = n(-1)^n,$$

$$\varphi : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{2-x}, \quad \psi : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{1+x}, \quad \delta : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{1}{(1+x)^2}.$$

On admet que, pour $f \in H$, il existe une unique suite $(a_n)_{n \geq 0} \in A$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

4. Quelques propriétés de A

4.a. Vérifier que la suite constante égale à 1 appartient à A .

4.b. Plus généralement, si $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est telle qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ vérifiant $a_n = o(n^s)$, montrer que $(a_n)_{n \geq 0} \in A$.

4.c. En déduire que les suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$, $(\beta_n)_{n \geq 0}$ et $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartiennent à A .

5. Premières propriétés de H

5.a. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de $] -1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

5.b. Montrer que les fonctions φ , ψ et δ appartiennent à H .

6. Premières propriétés de E

6.a. Déterminer les suites géométriques appartenant à B .

6.b. Vérifier que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ appartient à B .

6.c. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de H contenant les fonctions φ , ψ et δ .

7. Caractérisation des éléments de E

Soit $f \in E$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où $(a_n)_{n \geq 0} \in B$.

7.a. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0.$$

7.b. En déduire qu'il existe une fonction polynôme Q de degré inférieur ou égal à 2 telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \frac{Q(x)}{x^3 - 3x - 2}.$$

7.c. Montrer alors que f est combinaison linéaire des fonctions φ , ψ et δ .

7.d. Conclure que E est un espace de dimension finie dont $\mathcal{C} = (\varphi, \psi, \delta)$ est une base.

8. L'endomorphisme u

Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in B$ et $f \in E$ telles que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

8.a. Montrer que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, b_n = a_{n+1}$ appartient à B .

On note alors $u(f)$ l'application définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad [u(f)](x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

8.b. Vérifier que u est un endomorphisme de E .

8.c. Déterminer u^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire un polynôme $\pi \in \mathbb{R}[X]$, de degré 3, tel que $\pi(u) = 0$.

8.d. Déterminer la matrice T de u dans la base $\mathcal{C}$ et calculer T^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

9. Éléments propres de u

9.a. Quels sont les valeurs propres et sous-espaces propres de u ?

9.b. u est-il diagonalisable ?

10. Centre de u

Soit $v \in C(u)$, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $u \circ v = v \circ u$.

10.a. Montrer qu'il existe des réels λ et μ tels que $v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $v(\psi) = \mu\psi$.

10.b. Montrer qu'il existe aussi des réels η et ω tels que $v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta$.

10.c. Démontrer que $\mu = \omega$.

10.d. Réciproquement, si v est un endomorphisme de E pour lequel il existe des réels λ , μ et η tels que

$$M_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

vérifier que $v \in C(u)$.

10.e. Que vaut $\dim C(u)$?

10.f. Montrer que la famille (id_E, u, u^2) est libre dans $L(E)$.

10.g. Comparer $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$.

Partie III — Centre de $L(E)$

Dans cette partie, on suppose que E est un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in L(E)$.

11. On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u . Montrer que u est une homothétie.
12. Soit U la partie de $L(E)$ formée des projecteurs de E et $v \in C(U)$. On se donne un vecteur non nul $e \in E$ et un supplémentaire G de $F = \text{Vect}(e)$. En considérant la projection sur F parallèlement à G , montrer que v est une homothétie de E . En déduire $C(U)$.
13. Que vaut $C(L(E))$?

Partie IV — Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que u est un endomorphisme diagonalisable de E . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u , $E_1, \dots, E_p$ les espaces propres correspondants et, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $r_i = \dim E_i$.

14. Justifier que, pour tout $v \in C(u)$ et tout $i \in \{1, \dots, p\}$, E_i est stable par v .
15. Réciproquement, si $v \in L(E)$ est tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, E_i est stable par v , montrer que $v \in C(u)$.
16. Considérer une base b de E adaptée à l'écriture $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ et caractériser les endomorphismes de $C(u)$ par l'allure de leur matrice dans cette base.
17. En déduire que

$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2.$$

18. Montrer que $\dim C(u) \geq n$, puis que $\dim C(u) = n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.
19. Écrire la matrice M de u dans la base b . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer M^k , puis $P(M)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
20. On note

$$\pi(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i).$$

Que vaut $\pi(u)$?

21. Plus généralement, si $P \in \mathbb{R}[X]$, vérifier que $P(u) = 0$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $P(\lambda_i) = 0$.
22. En déduire que la famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre dans $L(E)$.
23. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k \in \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$. En déduire que $\dim \mathbb{R}[u] = p$.
24. Démontrer que $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie V — Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

On garde dans cette partie les mêmes notations et hypothèses que dans la partie IV. On veut déterminer $C(C(u))$, que l'on notera plus simplement $C_2(u)$.

25. Vérifier que $C_2(u) \subset C(u)$.
26. Montrer que $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.

27. Pour $v \in C_2(u)$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, on note v_i l'endomorphisme de E_i défini par $\forall x \in E_i, v_i(x) = v(x)$. Montrer que $v_i \in C(L(E_i))$. En déduire qu'il existe $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $v_i = \mu_i \text{id}_{E_i}$.
28. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré inférieur ou égal à $p - 1$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, Q(\lambda_i) = \mu_i$.
29. Démontrer que $C_2(u) = \mathbb{R}[u]$.