



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques

2011

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I — Préliminaires

1. Structure de $C(U)$

L'endomorphisme nul commute avec tout élément de U , donc $0 \in C(U)$. Si $v, w \in C(U)$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors, pour tout $t \in U$,

$$t \circ (av + bw) = a(t \circ v) + b(t \circ w) = a(v \circ t) + b(w \circ t) = (av + bw) \circ t.$$

Ainsi $av + bw \in C(U)$: $C(U)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E)$. Comme $\dim L(E) = n^2$, il est de dimension finie.

De plus, id_E commute avec tous les endomorphismes, donc appartient à $C(U)$. Puisque $n \geq 1$, $E \neq \{0\}$ et $\text{id}_E \neq 0$. Par conséquent $\dim C(U) \geq 1$.

2. Inclusion des polynômes en u

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'associativité de la composition donne $u \circ u^k = u^{k+1} = u^k \circ u$. Ainsi chaque puissance u^k appartient à $C(u)$.

Pour

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

la linéarité de la composition donne

$$u \circ P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^{k+1} = P(u) \circ u.$$

Donc $P(u) \in C(u)$ et $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. On relève aussi que $\mathbb{R}[u]$ est un sous-espace vectoriel : $aP(u) + bQ(u) = (aP + bQ)(u)$.

3. Stabilité d'un espace propre

Fixons $x \in E_\lambda(u)$, donc $u(x) = \lambda x$. Comme $v \in C(u)$,

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x).$$

Ainsi $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = E_\lambda(u)$. On a bien $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$.

Partie II — Étude d'un exemple

4.a. Suite constante

Fixons $x \in]-1, 1[$. Pour la suite $a_n = 1$, on a $|a_n x^n| = |x|^n$. La série géométrique de raison $|x| < 1$ converge, donc la suite constante égale à 1 appartient à A .

En zéro, on adopte la convention usuelle $x^0 = 1$, y compris lorsque $x = 0$; la série ne possède alors que son premier terme éventuellement non nul.

4.b. Coefficients dominés par une puissance

On suppose $a_n = o(n^s)$ pour un certain réel s . Cette propriété concerne $n \rightarrow +\infty$; aucune expression 0^s n'est nécessaire. On fixe $x \in]-1, 1[$ et on pose $r = |x|$.

Si $r = 0$, la série des valeurs absolues se réduit à $|a_0|$ et converge. Supposons $0 < r < 1$.

Méthode 1 — Comparaison à une série géométrique

Il existe N tel que $n \geq N$ implique $|a_n| \leq n^s$. Choisissons ρ tel que $r < \rho < 1$. Par croissance comparée entre une puissance et une exponentielle,

$$n^s \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \rightarrow 0.$$

En effet, $r/\rho = e^{-c}$ pour $c = \ln(\rho/r) > 0$. Pour n suffisamment grand, $n^s r^n \leq \rho^n$, donc $|a_n x^n| \leq \rho^n$. La série géométrique

$$\sum \rho^n$$

converge; par comparaison,

$$\sum |a_n x^n|$$

converge. Ainsi $(a_n) \in A$.

Méthode 2 — Comparaison à une série de Riemann

Pour n suffisamment grand, $|a_n| \leq n^s$ comme précédemment. Or la croissance comparée donne $n^{s+2}r^n \rightarrow 0$. Il existe donc N' tel que, pour $n \geq N'$, $n^{s+2}r^n \leq 1$, d'où

$$|a_n x^n| \leq n^s r^n \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série de Riemann d'exposant 2 converge, donc la comparaison établit à nouveau $(a_n) \in A$. Les deux méthodes montrent qu'un facteur géométrique de raison strictement inférieure à 1 l'emporte sur toute croissance polynomiale; elles ne nécessitent aucun critère général de rapport de termes.

4.c. Appartenance des trois suites

On a $\alpha_n = 2^{-n} = o(1)$, $\beta_n = (-1)^n = o(n)$ et $\gamma_n = n(-1)^n = o(n^2)$. Ces assertions résultent respectivement de $2^{-n} \rightarrow 0$, $|\beta_n|/n = 1/n \rightarrow 0$ et $|\gamma_n|/n^2 = 1/n \rightarrow 0$.

La question 4.b s'applique avec $s = 0$, $s = 1$ et $s = 2$. Ainsi α, β, γ appartiennent toutes à A .

5.a. Structure de H

Commençons par observer que A est un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. La suite nulle appartient à A . Si $a, b \in A$ et $c, d \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$|(ca_n + db_n)x^n| \leq |c||a_n x^n| + |d||b_n x^n|.$$

Les deux séries de droite convergent; la comparaison montre que $ca + db \in A$.

La fonction nulle appartient à H . Si

$$f(x) = \sum a_n x^n$$

et

$$g(x) = \sum b_n x^n$$

avec $a, b \in A$, la linéarité des séries convergentes à x fixé donne

$$cf(x) + dg(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (ca_n + db_n)x^n.$$

Les nouveaux coefficients appartiennent à A , donc $cf + dg \in H$. Ainsi H est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications de $] - 1, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

5.b. Développements de φ , ψ et δ

Pour $|x| < 1$, on a également $|x/2| < 1$. La formule de somme d'une série géométrique donne

$$\varphi(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

La formule usuelle de la série géométrique dérivée, valable pour $|r| < 1$, est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)r^n = 1/(1-r)^2.$$

Avec $r = -x$, elle donne

$$\delta(x) = \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)(-1)^n x^n.$$

Les coefficients sont respectivement $\alpha/2$, β et $\beta + \gamma$. Ils appartiennent à A par 4.c et la stabilité établie en 5.a. Ainsi $\varphi, \psi, \delta \in H$.

On a utilisé les formules de sommes géométriques autorisées, sans dériver une série de fonctions par un théorème général.

6.a. Suites géométriques de B

La suite nulle appartient à B . Toute suite géométrique non nulle s'écrit $a_n = cq^n$ avec $c \neq 0$; si $q = 0$, cela signifie $a_0 = c$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$.

La relation de récurrence au rang 0 impose

$$c(2q^3 + 3q^2 - 1) = 0,$$

donc $2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$. Or

$$2q^3 + 3q^2 - 1 = (q+1)^2(2q-1).$$

Les seules raisons possibles sont $q = -1$ et $q = 1/2$. Réciproquement, pour chacune de ces raisons et tout $n \geq 0$,

$$2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = cq^n(2q^3 + 3q^2 - 1) = 0.$$

Les suites correspondantes sont des multiples de β ou de α , donc appartiennent à A par 4.c. Elles appartiennent donc à B .

Ainsi les suites géométriques de B sont exactement les suites $a_n = c(-1)^n$ ou $a_n = c2^{-n}$, avec $c \in \mathbb{R}$. La suite nulle est incluse en prenant $c = 0$.

6.b. La suite γ

Pour tout $n \geq 0$,

$$2\gamma_{n+3} + 3\gamma_{n+2} - \gamma_n = (-1)^n(-2(n+3) + 3(n+2) - n) = 0.$$

Comme $\gamma \in A$ par 4.c, elle appartient à B .

6.c. Structure de E et fonctions particulières

Les conditions $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0$ sont linéaires en la suite a . Puisque A est un espace vectoriel, la suite nulle satisfait ces conditions et toute combinaison linéaire de deux suites qui les satisfont les satisfait encore. Ainsi B est un sous-espace vectoriel de A .

Comme en 5.a, la linéarité des séries convergentes montre que les fonctions représentées par des coefficients de B forment un sous-espace E de H .

Par 6.a, $\alpha/2$ et β appartiennent à B . Par 6.b et la stabilité de B , $\beta + \gamma \in B$. Les développements de 5.b montrent alors que $\varphi, \psi, \delta \in E$.

7.a. Identité obtenue par la récurrence

On fixe $x \in]-1, 1[$. Toutes les séries de coefficients utilisées sont absolument convergentes à ce point. On peut les multiplier par des constantes, décaler un nombre fini d'indices et les additionner, en procédant à partir de leurs sommes partielles.

En isolant les coefficients de degrés 0, 1 et 2 dans $(x^3 - 3x - 2)f(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} (x^3 - 3x - 2)f(x) &= -2a_0 - (3a_0 + 2a_1)x - (3a_1 + 2a_2)x^2 \\ &+ \sum_{m=3}^{+\infty} (a_{m-3} - 3a_{m-1} - 2a_m)x^m. \end{aligned}$$

Pour $m \geq 3$, la relation définissant B , au rang $m - 3$, donne $a_{m-3} - 3a_{m-1} - 2a_m = 0$. La dernière série est donc nulle. En regroupant les trois termes restants,

$$f(x)(x^3 - 3x - 2) + a_0(2 + 3x) + a_1(2x + 3x^2) + 2a_2x^2 = 0.$$

L'égalité vaut aussi en zéro, où elle se vérifie directement avec $f(0) = a_0$.

7.b. Forme rationnelle

On factorise le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$$x^3 - 3x - 2 = (x - 2)(x + 1)^2.$$

Sur $] -1, 1[$, $x - 2 \neq 0$ et $x + 1 \neq 0$; le dénominateur n'est donc jamais nul. En posant

$$Q(X) = -a_0(2 + 3X) - a_1(2X + 3X^2) - 2a_2X^2,$$

on a $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et 7.a donne

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad f(x) = \frac{Q(x)}{x^3 - 3x - 2}.$$

7.c. Décomposition sur les trois fonctions

On établit ici directement la décomposition rationnelle nécessaire. Notons

$D(X) = (X - 2)(X + 1)^2$ et considérons les polynômes

$$Q_\varphi(X) = -(X + 1)^2, \quad Q_\psi(X) = (X - 2)(X + 1), \quad Q_\delta(X) = X - 2.$$

Pour $x \in] -1, 1[$, ils vérifient $Q_\varphi(x)/D(x) = \varphi(x)$, $Q_\psi(x)/D(x) = \psi(x)$ et $Q_\delta(x)/D(x) = \delta(x)$.

Montrons qu'ils forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Si $aQ_\varphi + bQ_\psi + cQ_\delta = 0$, l'évaluation en $X = 2$ donne $-9a = 0$, donc $a = 0$. L'évaluation en $X = -1$ donne ensuite $-3c = 0$, donc $c = 0$. Il reste $bQ_\psi = 0$; comme $Q_\psi \neq 0$, $b = 0$.

La famille est libre et possède trois éléments dans l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ de dimension 3 ; c'est une base. On peut donc écrire $Q = aQ_\varphi + bQ_\psi + cQ_\delta$. En divisant par $D(x) \neq 0$ sur l'intervalle, on obtient $f = a\varphi + b\psi + c\delta$.

Cette preuve construit la décomposition avec les outils des polynômes, sans supposer un théorème général de décomposition des fractions rationnelles.

7.d. Base de E

La question 6.c donne $\text{Vect}(\varphi, \psi, \delta) \subset E$, et 7.c donne l'inclusion réciproque. Ainsi cette famille engendre E .

Supposons $a\varphi + b\psi + c\delta = 0$ comme fonctions sur $] -1, 1[$. En multipliant par $D(x)$, le polynôme $aQ_\varphi + bQ_\psi + cQ_\delta$ s'annule en tout point de cet intervalle. Un polynôme non nul ne pouvant avoir une infinité de racines distinctes, ce polynôme est nul. La liberté prouvée en 7.c donne $a = b = c = 0$.

La famille $\mathcal{C} = (\varphi, \psi, \delta)$ est donc une base de E et $\dim E = 3$.

8.a. Stabilité par décalage des coefficients

Posons $b_n = a_{n+1}$. Pour $x \in] -1, 1[$ non nul,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n x^n| = \frac{1}{|x|} \sum_{m=1}^{+\infty} |a_m x^m| < +\infty.$$

Cette égalité se justifie d'abord sur les sommes partielles puis par passage à la limite.

Pour $x = 0$, la série ne possède que le terme $|b_0| = |a_1|$. Ainsi $b \in A$.

De plus, pour tout $n \geq 0$,

$$2b_{n+3} + 3b_{n+2} - b_n = 2a_{n+4} + 3a_{n+3} - a_{n+1} = 0,$$

par la relation de B au rang $n + 1$. Donc $b \in B$.

8.b. Endomorphisme bien défini

L'unicité de la suite de coefficients est admise dans le sujet pour chaque fonction de H .

Comme $E \subset H$, la définition de $u(f)$ dépend uniquement de f , et non d'un choix de représentation. La question 8.a assure que $u(f) \in E$.

Si $f, g \in E$ ont pour coefficients a_n, c_n , alors $sf + tg$ a pour coefficients $sa_n + tc_n$, par linéarité des séries et unicité. Son image par u a pour coefficients $sa_{n+1} + tc_{n+1}$, donc

$$u(sf + tg) = su(f) + tu(g).$$

L'application $u : E \rightarrow E$ est linéaire ; c'est un endomorphisme.

On peut aussi noter, pour $x \neq 0$, $u(f)(x) = (f(x) - a_0)/x$, tandis que $u(f)(0) = a_1$. La définition par coefficients traite donc zéro sans division par zéro.

8.c. Itérés et polynôme annulateur

Une récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ montre que

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in]-1, 1[, \quad u^k(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+k} x^n.$$

Pour $k = 0$, c'est la représentation de f . Si la formule est vraie au rang k , ses coefficients appartiennent à B par décalages successifs et 8.a permet un nouveau décalage. On obtient la formule au rang $k + 1$.

La combinaison $2u^3(f) + 3u^2(f) - f$ a donc pour coefficients $2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n$, tous nuls. Ainsi $2u^3 + 3u^2 - \text{id}_E = 0$.

On peut prendre

$$\pi(X) = 2X^3 + 3X^2 - 1 = (X + 1)^2(2X - 1),$$

qui est bien un polynôme réel de degré 3 vérifiant $\pi(u) = 0$.

8.d. Matrice et puissances

Les coefficients de φ sont $2^{-(n+1)}$; leur décalage les multiplie par $1/2$, donc $u(\varphi) = \varphi/2$.

Pour ψ , le décalage de $(-1)^n$ donne $u(\psi) = -\psi$.

Pour δ , les coefficients décalés sont $(n+2)(-1)^{n+1} = -(n+1)(-1)^n - (-1)^n$. Ainsi $u(\delta) = -\psi - \delta$. La matrice, dont les colonnes sont ces coordonnées, est

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Méthode 1 — Itérés sur les coefficients

La formule de 8.c donne $u^k(\varphi) = 2^{-k}\varphi$ et $u^k(\psi) = (-1)^k\psi$. Pour δ , ses coefficients après k décalages sont

$$(n+k+1)(-1)^{n+k} = (-1)^k((n+1)(-1)^n + k(-1)^n),$$

donc $u^k(\delta) = (-1)^k\delta + k(-1)^k\psi$. On obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad T^k = \begin{pmatrix} 2^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & k(-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0$, la formule donne bien l'identité.

Méthode 2 — Binôme pour des matrices qui commutent

Le bloc inférieur de T est $J = -I_2 + N$, avec $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0$. Les matrices $-I_2$

et N commutent. Pour $k \geq 1$, la formule du binôme donne

$$J^k = (-1)^k I_2 + k(-1)^{k-1} N = \begin{pmatrix} (-1)^k & k(-1)^{k-1} \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Le premier bloc vaut $(1/2)^k$ et $T^0 = I_3$, d'où la même formule. La première approche utilise la définition de u ; la seconde fournit une méthode réutilisable pour les puissances de matrices comportant une partie de carré nul.

9.a. Valeurs et espaces propres

La matrice T est triangulaire ; ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, soit $1/2$ et -1 . Calculons les espaces propres par le système $TX = \rho X$, avec $X = (a, b, c)^T$:

$$(1/2 - \rho)a = 0, \quad (-1 - \rho)b - c = 0, \quad (-1 - \rho)c = 0.$$

Pour $\rho = 1/2$, la dernière équation donne $c = 0$, puis la deuxième $b = 0$; a est libre. Ainsi $E_{1/2}(u) = \text{Vect}(\varphi)$.

Pour $\rho = -1$, la première équation donne $a = 0$ et la deuxième donne $c = 0$; b est libre. Ainsi $E_{-1}(u) = \text{Vect}(\psi)$.

On a donc $\text{Sp}(u) = \{1/2, -1\}$ et les deux espaces propres sont de dimension 1.

9.b. Diagonalisation

La somme des dimensions des espaces propres vaut $1 + 1 = 2$, alors que $\dim E = 3$. Le critère de diagonalisation par les dimensions des espaces propres n'est pas satisfait. Ainsi u n'est pas diagonalisable.

En particulier, δ complète les deux vecteurs propres en une base, mais n'est pas elle-même un vecteur propre : $u(\delta) = -\psi - \delta$.

10.a. Action de v sur les vecteurs propres

Puisque $v \in C(u)$, la question 3 implique que v stabilise chaque espace propre de u . Ces espaces sont les droites $\text{Vect}(\varphi)$ et $\text{Vect}(\psi)$ par 9.a.

Il existe donc des réels λ, μ tels que $v(\varphi) = \lambda\varphi$ et $v(\psi) = \mu\psi$.

10.b. Image de δ

Posons $w = u + \text{id}_E$. Comme v commute avec u , il commute avec w puis avec w^2 : $w^2v = vw^2$.

Les formules de 8.d donnent $w(\varphi) = 3\varphi/2$, $w(\psi) = 0$ et $w(\delta) = -\psi$. Par conséquent

$$w^2(\varphi) = \frac{9}{4}\varphi, \quad w^2(\psi) = 0, \quad w^2(\delta) = 0.$$

Dans la base $\mathcal{C}$, on en déduit directement $\text{Ker}(w^2) = \text{Vect}(\psi, \delta)$. Puisque $w^2(\delta) = 0$,

$$w^2(v(\delta)) = v(w^2(\delta)) = 0.$$

Ainsi $v(\delta)$ appartient à ce noyau ; il existe $\eta, \omega \in \mathbb{R}$ tels que $v(\delta) = \eta\psi + \omega\delta$. La stabilité du noyau a été démontrée directement à partir de la commutation.

10.c. Égalité des coefficients diagonaux

Calculons les deux compositions sur δ . D'une part,

$$u(v(\delta)) = u(\eta\psi + \omega\delta) = -(\eta + \omega)\psi - \omega\delta.$$

D'autre part,

$$v(u(\delta)) = v(-\psi - \delta) = -(\mu + \eta)\psi - \omega\delta.$$

Ces deux expressions sont égales car $v \in C(u)$. La liberté de (ψ, δ) entraîne $\eta + \omega = \mu + \eta$, donc $\omega = \mu$.

10.d. Réciproque matricielle

Supposons

$$V = M_{\mathcal{C}}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Le produit avec la matrice T de 8.d donne

$$TV = \begin{pmatrix} \lambda/2 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & -\eta - \mu \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix} = VT.$$

L'égalité des produits matriciels dans une même base équivaut à $u \circ v = v \circ u$. Ainsi $v \in C(u)$.

10.e. Dimension du commutant

Les questions 10.a à 10.d montrent que les matrices du commutant sont exactement

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad (\lambda, \mu, \eta) \in \mathbb{R}^3.$$

Elles forment un espace engendré par les trois matrices

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont libres, car leurs coefficients indiqués imposent séparément la nullité des trois paramètres. L'application qui associe à un endomorphisme sa matrice est un isomorphisme ; donc $\dim C(u) = 3$.

10.f. Liberté de (id_E, u, u^2)

Supposons $a \text{id}_E + bu + cu^2 = 0$. Dans la base $\mathcal{C}$, la formule de 8.d pour $k = 2$ donne

$$T^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'égalité $aI_3 + bT + cT^2 = 0$ impose, en lisant le premier coefficient diagonal, le deuxième et le coefficient de ligne 2, colonne 3,

$$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = 0, \quad a - b + c = 0, \quad -b + 2c = 0.$$

La dernière équation donne $b = 2c$, la deuxième donne $a = c$, puis la première donne $9c/4 = 0$. Ainsi $c = b = a = 0$, ce qui prouve la liberté.

10.g. Comparaison de $C(u)$ et $\mathbb{R}[u]$

Méthode 1 — Inclusion et dimensions

Par 2, $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. La famille libre de 10.f appartient à $\mathbb{R}[u]$, donc $\dim \mathbb{R}[u] \geq 3$. Mais $\dim C(u) = 3$ par 10.e. On a donc égalité des deux sous-espaces :

$$C(u) = \mathbb{R}[u] = \text{Vect}(\text{id}_E, u, u^2).$$

Méthode 2 — Construction d'un polynôme pour chaque élément

Soit $v \in C(u)$, de paramètres λ, μ, η comme en 10.d. Posons

$$d = \frac{4}{9} \left(\lambda - \mu + \frac{3}{2}\eta \right), \quad P(X) = \mu - \eta(X + 1) + d(X + 1)^2.$$

Avec $W = T + I_3$, on a

$$W = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad W^2 = \begin{pmatrix} \frac{9}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient

$$P(T) = \mu I_3 - \eta W + dW^2 = \begin{pmatrix} \mu - \frac{3}{2}\eta + \frac{9}{4}d & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \eta \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = M_{\mathcal{C}}(v).$$

Ainsi $v = P(u) \in \mathbb{R}[u]$. Combinée à l'inclusion de 2, cette construction donne la même égalité. L'argument de dimension est plus court ; la construction fournit explicitement le polynôme représentant v .

Partie III — Centre de $L(E)$

11. Un endomorphisme dont tous les vecteurs non nuls sont propres

Choisissons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E . Chaque e_j est non nul, donc il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$ tel que $u(e_j) = \lambda_j e_j$.

Si $n = 1$, cela suffit : par linéarité, $u = \lambda_1 \text{id}_E$. Supposons $n \geq 2$. Pour $j \geq 2$, $e_1 + e_j \neq 0$, donc il existe ρ_j tel que

$$u(e_1 + e_j) = \rho_j(e_1 + e_j).$$

Mais la linéarité donne aussi $u(e_1 + e_j) = \lambda_1 e_1 + \lambda_j e_j$. La liberté de (e_1, e_j) impose $\lambda_1 = \rho_j = \lambda_j$.

Toutes les valeurs λ_j sont donc égales. Pour

$$x = \sum_j x_j e_j,$$

on obtient $u(x) = \lambda_1 x$. Ainsi u est l'homothétie $\lambda_1 \text{id}_E$.

12. Endomorphismes commutant avec tous les projecteurs

Fixons $v \in C(U)$ et un vecteur non nul e . La droite $F = \text{Vect}(e)$ possède un supplémentaire G par le théorème de la base incomplète. Soit p la projection sur F parallèlement à G ; c'est un projecteur, donc $p \in U$.

Comme $p(e) = e$ et v commute avec p ,

$$p(v(e)) = v(p(e)) = v(e).$$

Un vecteur fixé par ce projecteur appartient à son image F . Donc $v(e) \in \text{Vect}(e)$: il existe un réel λ_e tel que $v(e) = \lambda_e e$.

Le vecteur e étant arbitraire non nul, tous les vecteurs non nuls sont propres pour v . La question 11 donne $v = \lambda \text{id}_E$ pour un réel λ indépendant du vecteur.

Réciproquement, toute homothétie commute avec chaque endomorphisme, donc avec chaque projecteur. Par conséquent

$$C(U) = \{\lambda \text{id}_E : \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(\text{id}_E).$$

Cette conclusion vaut aussi en dimension 1, où le supplémentaire de $F = E$ est $\{0\}$.

13. Centre de tous les endomorphismes

Comme $U \subset L(E)$, un endomorphisme qui commute avec tous les éléments de $L(E)$ commute en particulier avec tous les projecteurs. Ainsi $C(L(E)) \subset C(U)$.

Par 12, ce dernier espace est celui des homothéties. Réciproquement, si $v = \lambda \text{id}_E$, pour tout $t \in L(E)$, $v \circ t = \lambda t = t \circ v$. Donc

$$C(L(E)) = \text{Vect}(\text{id}_E).$$

Partie IV — Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

On utilise désormais les notations de cette partie : $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distinctes,

$E_i = \text{Ker}(u - \lambda_i \text{id}_E)$ et $r_i = \dim E_i \geq 1$. Comme u est diagonalisable,

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p, \quad \sum_{i=1}^p r_i = n.$$

14. Stabilité des espaces propres

Fixons $v \in C(u)$, $i \in \{1, \dots, p\}$ et $x \in E_i$. Alors $u(x) = \lambda_i x$ et

$$u(v(x)) = v(u(x)) = \lambda_i v(x).$$

Donc $v(x) \in E_i$. Chaque espace propre est stable par v , comme déjà établi dans la question 3.

15. Réciproque par décomposition en espaces propres

Supposons que v stabilise tous les E_i . Pour $x_i \in E_i$, $v(x_i) \in E_i$, donc

$$u(v(x_i)) = \lambda_i v(x_i) = v(\lambda_i x_i) = v(u(x_i)).$$

Tout $x \in E$ s'écrit de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in E_i$. En additionnant les égalités précédentes et en utilisant la linéarité, on obtient $u(v(x)) = v(u(x))$ pour tout $x \in E$. Ainsi $v \in C(u)$.

La décomposition de tout E en espaces propres est ici essentielle ; cette réciproque n'est pas affirmée pour un endomorphisme quelconque.

16. Caractérisation matricielle

Choisissons une base b_i de chaque E_i et concaténons ces bases pour obtenir $b = (b_1, \dots, b_p)$, base de E adaptée à la somme directe.

D'après 14 et 15, $v \in C(u)$ si et seulement si v stabilise chaque E_i . Dans la base b , cela signifie que les coordonnées de l'image d'un vecteur de b_i sont nulles dans les autres blocs. Les matrices sont donc exactement les matrices diagonales par blocs

$$M_b(v) = \text{diag}(V_1, \dots, V_p), \quad V_i \in \mathcal{M}_{r_i}(\mathbb{R}).$$

Chaque bloc V_i est arbitraire : il représente la restriction de v à E_i . La notation diag désigne ici l'assemblage de ces blocs sur la diagonale, tous les blocs hors diagonale étant nuls.

17. Dimension de $C(u)$

Dans la description de 16, le bloc V_i possède r_i^2 coefficients indépendants. Pour justifier le dénombrement, on prend, dans chaque bloc, les matrices ayant un unique coefficient égal à 1 et tous les autres nuls. Placées dans leur bloc respectif et complétées par des zéros, ces matrices forment une famille libre et génératrice de l'espace de 16.

L'isomorphisme entre endomorphismes et matrices conserve la dimension. Ainsi

$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2.$$

18. Borne et cas d'égalité

Comme $r_i \geq 1$, $r_i^2 \geq r_i$. En sommant et en utilisant

$$\sum_i r_i = n,$$

$$\dim C(u) = \sum_{i=1}^p r_i^2 \geq \sum_{i=1}^p r_i = n.$$

Plus précisément,

$$\dim C(u) - n = \sum_{i=1}^p r_i(r_i - 1).$$

Chaque terme est positif ou nul ; la somme est nulle si et seulement si tous les r_i valent 1.

Cette condition équivaut à $p = n$, puisque

$$\sum_i r_i = n$$

et chaque $r_i \geq 1$.

Donc $\dim C(u) = n$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

19. Matrices des puissances et des polynômes

Sur E_i , l'endomorphisme u agit comme $\lambda_i \text{id}_{E_i}$. Dans la base adaptée,

$$M = M_b(u) = \text{diag}(\lambda_1 I_{r_1}, \dots, \lambda_p I_{r_p}).$$

Pour $k \geq 1$, la multiplication par blocs donne

$$M^k = \text{diag}(\lambda_1^k I_{r_1}, \dots, \lambda_p^k I_{r_p}).$$

Pour $k = 0$, $M^0 = I_n$, donc tous les blocs sont I_{r_i} ; cela ne nécessite pas de calculer 0^0 si une valeur propre est nulle.

Si

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

l'addition des matrices précédentes donne

$$P(M) = \text{diag}(P(\lambda_1) I_{r_1}, \dots, P(\lambda_p) I_{r_p}).$$

20. Un polynôme annulateur explicite

Pour

$$\pi(X) = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i),$$

on a $\pi(\lambda_i) = 0$ pour tout i . Par 19, la matrice $\pi(M)$ est donc nulle.

Comme la matrice de $\pi(u)$ dans la base b est $\pi(M)$, on en déduit $\pi(u) = 0$. Ce résultat suit du calcul sur chaque espace propre.

21. Caractérisation des polynômes annulateurs

Par 19, la matrice de $P(u)$ est diagonale par blocs, le bloc i étant $P(\lambda_i)I_{r_i}$. Puisque $r_i \geq 1$, ce bloc est nul si et seulement si $P(\lambda_i) = 0$.

L'endomorphisme $P(u)$ est nul si et seulement si sa matrice est nulle, donc

$$P(u) = 0 \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, P(\lambda_i) = 0.$$

22. Liberté des premières puissances

Supposons

$$\sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k = 0$$

et posons

$$P(X) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k.$$

On a $P(u) = 0$, donc $P(\lambda_i) = 0$ pour les p valeurs distinctes λ_i , par 21.

Or un polynôme non nul de degré au plus $p - 1$ ne peut pas avoir p racines distinctes. Donc $P = 0$, ce qui impose $a_k = 0$ pour tout k .

La famille $(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$ est libre. Pour $p = 1$, elle se réduit à l'identité, qui est non nulle puisque $E \neq \{0\}$.

23. Réduction des puissances et dimension de $\mathbb{R}[u]$

Posons $V = \text{Vect}(\text{id}_E, u, \dots, u^{p-1})$.

Méthode 1 — Division euclidienne

Pour $k \in \mathbb{N}$, la division euclidienne de X^k par le polynôme π de $\mathbb{R}[X]$, de degré p , donne

$$X^k = Q_k(X)\pi(X) + R_k(X), \quad R_k \in \mathbb{R}_{p-1}[X].$$

L'évaluation des polynômes en u respecte la multiplication : pour deux polynômes, développer leur produit et utiliser $u^a u^b = u^{a+b}$ le montre directement. En évaluant la division et en utilisant $\pi(u) = 0$, on obtient

$$u^k = Q_k(u)\pi(u) + R_k(u) = R_k(u) \in V.$$

Méthode 2 — Récurrence à partir d'une relation annulatrice

Le polynôme π est unitaire : $\pi(X) = X^p + c_{p-1}X^{p-1} + \dots + c_0$. La relation $\pi(u) = 0$ donne

$$u^p = -\sum_{j=0}^{p-1} c_j u^j \in V.$$

Les puissances d'indices inférieurs à p appartiennent à V par définition. Supposons que toutes les puissances d'indices strictement inférieurs à k , avec $k \geq p$, appartiennent à V .

En multipliant la relation précédente par u^{k-p} ,

$$u^k = -\sum_{j=0}^{p-1} c_j u^{k-p+j}.$$

Chaque indice à droite est au plus $k-1$, donc l'hypothèse de récurrence donne $u^k \in V$. Ainsi toutes les puissances appartiennent à V . La division euclidienne fournit un reste pour chaque puissance ; la récurrence exprime une relation de calcul entre puissances successives.

Enfin, tout polynôme en u est une combinaison finie de puissances, donc $\mathbb{R}[u] \subset V$.
L'inclusion réciproque est immédiate puisque les générateurs de V sont des polynômes en u . Ainsi $\mathbb{R}[u] = V$. Par la liberté établie en 22,

$$\dim \mathbb{R}[u] = p.$$

24. Quand le commutant se réduit-il aux polynômes ?

On sait par 2 que $\mathbb{R}[u] \subset C(u)$. Si ces deux espaces sont égaux, leurs dimensions sont égales, donc par 17 et 23,

$$p = \sum_{i=1}^p r_i^2.$$

Comme chaque $r_i \geq 1$, chaque $r_i^2 \geq 1$. L'égalité impose $r_i = 1$ pour tout i . Ainsi

$$n = \sum_i r_i = p :$$

u admet n valeurs propres distinctes.

Réciproquement, si $p = n$, les dimensions r_i valent toutes 1. Alors $\dim C(u) = n$ par 18 et $\dim \mathbb{R}[u] = p = n$ par 23. Les deux sous-espaces étant emboîtés et de même dimension finie, ils sont égaux.

Donc $C(u) = \mathbb{R}[u]$ si et seulement si u admet n valeurs propres distinctes.

Partie V — Centre du commutant d'un endomorphisme diagonalisable

25. Première inclusion

L'endomorphisme u commute avec lui-même, donc $u \in C(u)$. Si $v \in C_2(u) = C(C(u))$, v commute avec tous les éléments de $C(u)$, en particulier avec u . Ainsi $v \in C(u)$ et

$$C_2(u) \subset C(u).$$

26. Les polynômes en u appartiennent au double commutant

Fixons $P \in \mathbb{R}[X]$ et $w \in C(u)$. On a $wu = uw$. Une récurrence sur k donne $wu^k = u^kw$: l'égalité est vraie pour $k = 0$, et

$$wu^{k+1} = (wu^k)u = u^kwu = u^{k+1}w.$$

Si

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k,$$

la linéarité donne $wP(u) = P(u)w$. Ainsi $P(u)$ commute avec tout $w \in C(u)$, donc $P(u) \in C_2(u)$.

On obtient $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$.

27. Restrictions aux espaces propres

Fixons $v \in C_2(u)$ et un indice i . Par 25, $v \in C(u)$; par 14, v stabilise E_i . Sa restriction $v_i : E_i \rightarrow E_i$ est donc bien un endomorphisme.

Soit $a \in L(E_i)$ arbitraire. À l'aide de la somme directe $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$, définissons un endomorphisme w de E par

$$w(x_1 + \dots + x_p) = a(x_i), \quad x_j \in E_j.$$

La décomposition étant unique, w est bien défini et linéaire. Il agit comme a sur E_i et comme zéro sur les autres espaces propres ; il stabilise donc chaque E_j . Par 15, $w \in C(u)$.

Puisque $v \in C_2(u)$, $vw = wv$. En restreignant cette égalité à E_i , on obtient $v_i a = a v_i$. L'endomorphisme a étant arbitraire, $v_i \in C(L(E_i))$.

L'espace E_i est réel de dimension finie $r_i \geq 1$. La conclusion de 13 s'applique à cet espace et donne

$$\exists \mu_i \in \mathbb{R}, \quad v_i = \mu_i \text{id}_{E_i}.$$

Ainsi chaque restriction de v à un espace propre est une homothétie, avec un coefficient qui peut dépendre de l'indice i .

28. Interpolation aux valeurs propres

Méthode 1 — Construction explicite

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, définissons

$$L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ j \neq i}} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque les valeurs propres sont distinctes. Chaque polynôme est de degré au plus $p - 1$ et vérifie $L_i(\lambda_i) = 1$, tandis que $L_i(\lambda_j) = 0$ pour $j \neq i$.

Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{i=1}^p \mu_i L_i(X)$$

est donc de degré au plus $p - 1$ et satisfait $Q(\lambda_i) = \mu_i$ pour tout i .

Si Q_1, Q_2 satisfont les mêmes conditions, $Q_1 - Q_2$ est de degré au plus $p - 1$ et possède les p racines distinctes λ_i . Il est nul, donc $Q_1 = Q_2$. Pour $p = 1$, le produit vide définissant L_1 vaut 1 et Q est simplement le polynôme constant μ_1 .

Méthode 2 — Isomorphisme d'évaluation

Considérons l'application linéaire

$$\mathcal{E} : \mathbb{R}_{p-1}[X] \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad P \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_p)).$$

Si $\mathcal{E}(P) = 0$, le polynôme P , de degré au plus $p - 1$, possède les p racines distinctes λ_i .
Donc $P = 0$; l'application est injective.

Ses espaces de départ et d'arrivée ont tous deux dimension p . Par le théorème du rang, une application linéaire injective entre ces espaces est bijective. Le vecteur $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ admet donc un unique antécédent Q , ce qui prouve existence et unicité.

La première méthode fournit le polynôme explicitement; la seconde met en évidence le rôle de la dimension et du nombre de racines. La formule d'interpolation a été établie ici, sans être supposée connue.

29. Identification du double commutant

On a déjà $\mathbb{R}[u] \subset C_2(u)$ par 26. Pour l'autre inclusion, fixons $v \in C_2(u)$ et choisissons le polynôme Q de 28 associé aux coefficients μ_i de 27.

Pour tout $x_i \in E_i$, la propriété de l'action d'un polynôme sur un vecteur propre donne

$$Q(u)(x_i) = Q(\lambda_i)x_i = \mu_i x_i = v(x_i).$$

Cette propriété découle aussi directement de $u^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$ puis de la linéarité. Tout $x \in E$ est somme de tels x_i ; en additionnant, on obtient $Q(u)(x) = v(x)$ pour tout $x \in E$. Ainsi $v = Q(u) \in \mathbb{R}[u]$.

Les deux inclusions donnent

$$C_2(u) = \mathbb{R}[u].$$

En outre, chaque élément du double commutant est représenté par un unique polynôme de degré au plus $p - 1$, et $\dim C_2(u) = p$ par 23. Cette conclusion est valable pour tout endomorphisme réel diagonalisable dans les hypothèses du sujet, même lorsque certains espaces propres ont dimension supérieure à 1.

Relevé des adaptations

Aucune question n'a nécessité de modification mathématique. L'unicité des coefficients dans H , admise dans le sujet original, est conservée. Les séries sont traitées comme des séries numériques à un réel fixé ; aucune théorie générale des séries entières n'est utilisée. Les décompositions rationnelles et l'interpolation nécessaires sont établies directement, et les éléments propres sont calculés sans déterminants.