



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESSEC

Mathématiques 1

2009

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 1. On identifiera les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ avec leurs matrices dans la base canonique et les vecteurs avec leurs matrices colonnes dans cette base.

Partie I

1°) Matrice à diagonale strictement dominante.

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$|a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|.$$

On dit alors que A est à diagonale strictement dominante.

a) On suppose qu'il existe $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $|x_1| \geq |x_i|$ pour tout i . Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

b) On suppose qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. Aboutir à une contradiction.

c) En déduire que A est inversible.

2°) Application : encadrement de Gershgorin pour les valeurs propres réelles.

Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$r_i = \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$$

et on définit les intervalles

$$D_i = \{\lambda \in \mathbb{R} : |\lambda - a_{i,i}| \leq r_i\} = [a_{i,i} - r_i, a_{i,i} + r_i], \quad D = \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

- a) Montrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de A est inclus dans D .
- b) Algorithme pour $n = 3$: écrire une fonction Python permettant à l'utilisateur de saisir les neuf coefficients d'une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, puis une fonction prenant cette matrice en argument et renvoyant deux tableaux contenant les centres $a_{i,i}$ et les rayons r_i des trois intervalles de Gershgorin.

On pourra utiliser `numpy.zeros` pour créer les tableaux. La commande Python `input(message)` affiche le message et renvoie la saisie sous forme de chaîne ; `float(chaine)` convertit une chaîne représentant un nombre réel en nombre flottant.

- c) Exemple : on se donne la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Justifier sans calculs que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- (ii) À l'aide de l'encadrement de Gershgorin, situer les valeurs propres de A .
- (iii) Diagonaliser explicitement A .

3°) La propriété $(\mathcal{P})$.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'elle vérifie la propriété suivante :

$$a_{i,i} > 0 \quad \text{pour tout } i, \quad a_{i,j} \leq 0 \quad \text{pour } i \neq j, \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} > 0 \quad \text{pour tout } i.$$

- a) Montrer que A est à diagonale strictement dominante et en déduire qu'elle est inversible.
- b) Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que AX ait toutes ses coordonnées positives ou nulles. Montrer que $x_i \geq 0$ pour tout i . On pourra considérer une coordonnée minimale $x_{i_0} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i$.
- c) On note $A^{-1} = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Pour $j \in \{1, \dots, n\}$, que vaut ${}^t(A(b_{1,j}, \dots, b_{n,j}))$?
- d) En déduire que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

e) Exemple : on reprend $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère, pour $\alpha > 0$,

$$A_\alpha = A + \alpha I_3. \text{ Établir que } A_\alpha \text{ vérifie } (\mathcal{P}) \text{ et calculer } A_\alpha^{-1}.$$

Partie II — Convergence de suites de matrices

Soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, avec $X_k = {}^t(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$. On dit que (X_k) converge vers $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ si chaque suite réelle $(x_i^{(k)})_k$ converge vers x_i .

De même, pour une suite de matrices $M_k = (m_{i,j}^{(k)}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que (M_k) converge vers $M = (m_{i,j})$ si chaque suite réelle $(m_{i,j}^{(k)})_k$ converge vers $m_{i,j}$.

1°) Généralités.

a) Pour $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, on définit $m(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Montrer que (X_k) converge vers X si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} m(X_k - X) = 0$.

b) Pour $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$s(M) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |m_{i,j}|.$$

Montrer que (M_k) converge vers M si et seulement si $\lim_{k \rightarrow +\infty} s(M_k - M) = 0$.

c) Montrer que, pour tous $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$, $m(MX) \leq s(M)m(X)$.

d) En déduire que, si (M_k) converge vers M , alors, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $(M_k X)$ converge vers MX .

e) Réciproquement, si $(M_k X)$ converge vers MX pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, montrer que (M_k) converge vers M .

f) Montrer que, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $s(MN) \leq s(M)s(N)$.

g) Établir que, pour tous $Y, Z \in \mathbb{R}^n$, $m(Y + Z) \leq m(Y) + m(Z)$. En déduire que $|m(Y) - m(Z)| \leq m(Y - Z)$.

2°) Convergence de la suite des inverses.

On considère une suite $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices toutes inversibles, convergeant vers une matrice M inversible.

a) Soit $X \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$m(M_k^{-1}X - M^{-1}X) \leq s(M^{-1})s(M - M_k)m(M_k^{-1}X),$$

puis établir que

$$m(M_k^{-1}X)[1 - s(M^{-1})s(M - M_k)] \leq m(M^{-1}X).$$

b) En déduire l'existence d'un entier k_0 tel que, pour tout $k > k_0$,

$$m(M_k^{-1}X) \leq 2m(M^{-1}X).$$

c) Montrer que $(M_k^{-1}X)$ converge vers $M^{-1}X$.

d) Conclure que (M_k^{-1}) converge vers M^{-1} .

3°) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et (M_k) une suite convergeant vers M . On suppose que toutes les matrices M_k vérifient $(\mathcal{P})$. Montrer que tous les coefficients de M^{-1} sont positifs ou nuls.

4°) À partir de maintenant, $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne la matrice définie par

$$a_{i,i} = 2 \quad (1 \leq i \leq n), \quad a_{i,i+1} = -1 \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad a_{i,i-1} = -1 \quad (2 \leq i \leq n),$$

et les autres coefficients sont nuls. Ainsi, pour $n \geq 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

et, pour $n = 1$, $A = (2)$.

a) Pour $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, calculer $\langle AX, X \rangle$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique. Exprimer ce produit sous la forme d'une somme de carrés. En déduire que A est inversible.

- b)** Établir que, pour tout $\alpha > 0$, la matrice $A_\alpha = A + \alpha I_n$ vérifie $(\mathcal{P})$.
- c)** Construire une suite de matrices vérifiant toutes $(\mathcal{P})$ et convergeant vers A .
- d)** En déduire que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs ou nuls.

Partie III — Résolution du système $(\mathcal{S})$

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$. Une fonction u vérifie $(\mathcal{S})$ si

$$u \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), \quad u'' = -f, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

1°) Existence et unicité de la solution de $(\mathcal{S})$.

- a)** Montrer que $(\mathcal{S})$ admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, 1]$.
- b)** Montrer que, si f est positive ou nulle sur $[0, 1]$, alors l'unique solution u associée à f est également positive ou nulle.
- c)** Expliciter la solution $\tilde{u}$ lorsque f est constante égale à 1. Calculer $\sup_{x \in [0, 1]} \tilde{u}(x)$.

2°) On pose $h = \frac{1}{n+1}$ et on considère les points de subdivision $x_i = ih = \frac{i}{n+1}$ pour $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

- a)** Pour $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$ et $x \in [0, 1]$ tel que $x-h, x+h \in [0, 1]$, justifier à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange que

$$|u(x+h) - 2u(x) + u(x-h) - h^2 u''(x)| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0, 1]} |u^{(4)}(t)|.$$

b) En déduire que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\left| u''(x_i) - \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{t \in [0,1]} |u^{(4)}(t)|.$$

3°) On reprend la matrice A de II-4° et on note $\tilde{F} = {}^t(1, \dots, 1)$ et $\tilde{U} = {}^t(\tilde{u}(x_1), \dots, \tilde{u}(x_n))$.

a) Réécrire les inégalités de III-2° b) lorsque $u = \tilde{u}$.

b) Montrer que $\frac{1}{h^2} A \tilde{U} = \tilde{F}$.

c) En déduire que les coefficients $b_{i,j}$ de A^{-1} vérifient, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$0 \leq \sum_{j=1}^n b_{i,j} \leq \frac{(n+1)^2}{8} = \frac{1}{8h^2}.$$

4°) Pour $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $f_i = f(x_i)$ et $F = {}^t(f_1, \dots, f_n)$. On note u l'unique solution de $(\mathcal{S})$ associée à f .

On définit $U = {}^t(u_1, \dots, u_n) = h^2 A^{-1} F$, puis $\Delta u_i = u_i - u(x_i)$, $\Delta U = {}^t(\Delta u_1, \dots, \Delta u_n)$ et $V = {}^t(v_1, \dots, v_n) = A \Delta U$.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|v_i| \leq \frac{h^4}{12} \sup_{t \in [0,1]} |f''(t)|$. Donner alors une majoration de $|\Delta u_i| = |u_i - u(x_i)|$ en fonction de h et de f'' .

5°) Exemple : on prend $f(x) = \exp(\sin x)$.

a) Montrer que $|f''(x)| \leq 2e$ sur $[0, 1]$. En déduire une première valeur de n garantissant $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) Étudier la fonction $x \mapsto (x^2 + x - 1) \exp(x)$ pour $x \geq 0$. En déduire une valeur de n meilleure que la précédente et garantissant encore $|u_i - u(x_i)| \leq 10^{-4}$ pour tout

$$i \in \{1, \dots, n\}.$$