



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

ESCP — 2023

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Questions préliminaires

Si $t \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de t , que l'on note $\lfloor t \rfloor$, l'unique entier tel que $\lfloor t \rfloor \leq t < \lfloor t \rfloor + 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = x.$$

2. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right) = +\infty.$$

Première partie — La loi arcsinus

3. On rappelle que la restriction de la fonction $\sin$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est une bijection sur $[-1, 1]$.

On note $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque.

3. (a) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

3. (b) Montrer que la fonction $\arcsin$ est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] - 1, 1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

4. (a) Soit $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $G(x) = 2 \arcsin(\sqrt{x})$.

Montrer que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$, de dérivée g donnée par :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1 - x)}}.$$

4. (b) Étudier la fonction g et tracer son graphe.

5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}g(t) & \text{si } t \in]0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

5. (a) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

5. (b) Soit X une variable aléatoire de densité f . On dit que X suit la loi arcsinus.

Montrer que X admet une espérance et calculer celle-ci. On pourra considérer le changement de variable $u = 1 - x$.

6. (a) Soit U une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Montrer que la variable aléatoire $V = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}U\right)$ suit la loi arcsinus.

6. (b) À l'aide de la question précédente, compléter les deux lignes de la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie une réalisation d'une variable aléatoire de loi arcsinus :

Python

```
import numpy as np

import numpy.random as rd


def arcsinus():
    U = ...
    V = ...
    return V
```

7. Soient $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$ et $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$. Montrer l'encadrement :

$$G\left(\frac{k+1}{n}\right) - G\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq G\left(\frac{k}{n}\right) - G\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

Montrer que les deux inégalités sont inversées si l'on suppose que $\frac{n}{2} + 1 \leq k \leq n - 1$.

8. Soient $x \in]0, 1/2[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

- Pour tout n suffisamment grand, $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

On admet que, pour tout $x \in]0, 1[$ et toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les mêmes conditions qu'à la question précédente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} = G(x).$$

Deuxième partie — Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soient $\theta \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes

et de même loi donnée par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_i = 1) = \theta \quad \text{et} \quad P(X_i = -1) = 1 - \theta.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_0 = 0$.

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.

9. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Y_i = \frac{1}{2}(X_i + 1)$.

En déduire la loi de $\frac{1}{2}(S_n + n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

10. Les variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?

11. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{S_n} = \frac{1}{n}S_n$.

Soit $\alpha \in]0, 1[$. On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ et t_α le réel positif tel que $t_\alpha = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$.

En majorant $\sqrt{\theta(1 - \theta)}$, montrer que l'intervalle

$$\left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n} \right), \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} + \overline{S_n} \right) \right]$$

est un intervalle de confiance asymptotique d'estimation du paramètre θ de niveau au moins $1 - \alpha$, c'est-à-dire dont la probabilité de contenir θ possède une limite qui est supérieure ou égale à $1 - \alpha$.

12. (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(S_{2k+1} = 0) = 0$.

12. (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$P(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \theta^k (1 - \theta)^k.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On introduit la variable aléatoire L_n , à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, définie par :

$$L_n(\omega) = \max\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid S_{2k}(\omega) = 0\}.$$

La variable aléatoire $2L_n$ décrit donc le dernier instant, au plus égal à $2n$, où la marche aléatoire prend la valeur 0.

13. Déterminer $P(L_n = n)$.

14. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

14. (a) Montrer l'égalité d'événements suivante :

$$[L_n = k] = [S_{2k} = 0] \cap [S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0].$$

14. (b) Justifier que :

$$P_{[S_{2k}=0]}([S_{2k+1} \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2n} \neq 0]) = P([S_1 \neq 0] \cap \cdots \cap [S_{2(n-k)} \neq 0]).$$

On notera p_{n-k} la valeur de cette probabilité.

15. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$P(L_n = k) = \binom{2k}{k} \theta^k (1-\theta)^k p_{n-k},$$

avec, par convention, $p_0 = 1$.

À partir de maintenant et dans toute la suite du problème, $\theta = \frac{1}{2}$.

Le calcul explicite des $(p_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est l'objet des questions suivantes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants :

$$\mathcal{D}_n = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k \neq 0], \quad \mathcal{D}_n^+ = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k > 0], \quad \mathcal{D}_n^- = \bigcap_{k=1}^{2n} [S_k < 0].$$

On considère également, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement :

$$A_{n,r} = \left(\bigcap_{k=1}^{2n-1} [S_k > 0] \right) \cap [S_{2n} = 2r].$$

Pour tout entier r , on pose $A_{n,r} = \emptyset$ lorsque $r > n$ ou $r \leq 0$ et on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $r \in \mathbb{Z}$, $a_{n,r} = P(A_{n,r})$.

16. (a) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega$, l'ensemble $\{S_1(\omega), \dots, S_r(\omega)\}$ est un intervalle d'entiers.

16. (b) En déduire que :

$$P(\mathcal{D}_n) = P(\mathcal{D}_n^+) + P(\mathcal{D}_n^-).$$

17. Montrer que :

$$P(\mathcal{D}_n^+) = \sum_{r=1}^n a_{n,r}.$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.

18. (a) Soit $(r, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer que :

$$P(A_{n-1,q} \cap A_{n,r}) = \begin{cases} \frac{1}{4}a_{n-1,q} & \text{si } q = r-1 \text{ ou } q = r+1, \\ \frac{1}{2}a_{n-1,q} & \text{si } q = r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

18. (b) Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4}a_{n-1,r-1} + \frac{1}{2}a_{n-1,r} + \frac{1}{4}a_{n-1,r+1}.$$

19. Montrer par récurrence sur n que, pour tout $(n, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on a :

$$a_{n,r} = \frac{1}{4^n} \left(\binom{2n-1}{n+r-1} - \binom{2n-1}{n+r} \right),$$

où l'on pose $\binom{m}{k} = 0$ dès que $k \notin \llbracket 0, m \rrbracket$.

20. On rappelle que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a été définie précédemment.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$p_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

Troisième partie — Comportement asymptotique

Dans cette troisième partie, on cherche à étudier la limite en loi de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

21. (a) Compléter par autant de lignes que nécessaire la fonction Python DernierPassage permettant de simuler la variable aléatoire L_n :

Python

```
import numpy.random as rd
```

```
def DernierPassage(n):
```

```
    L = 0
```

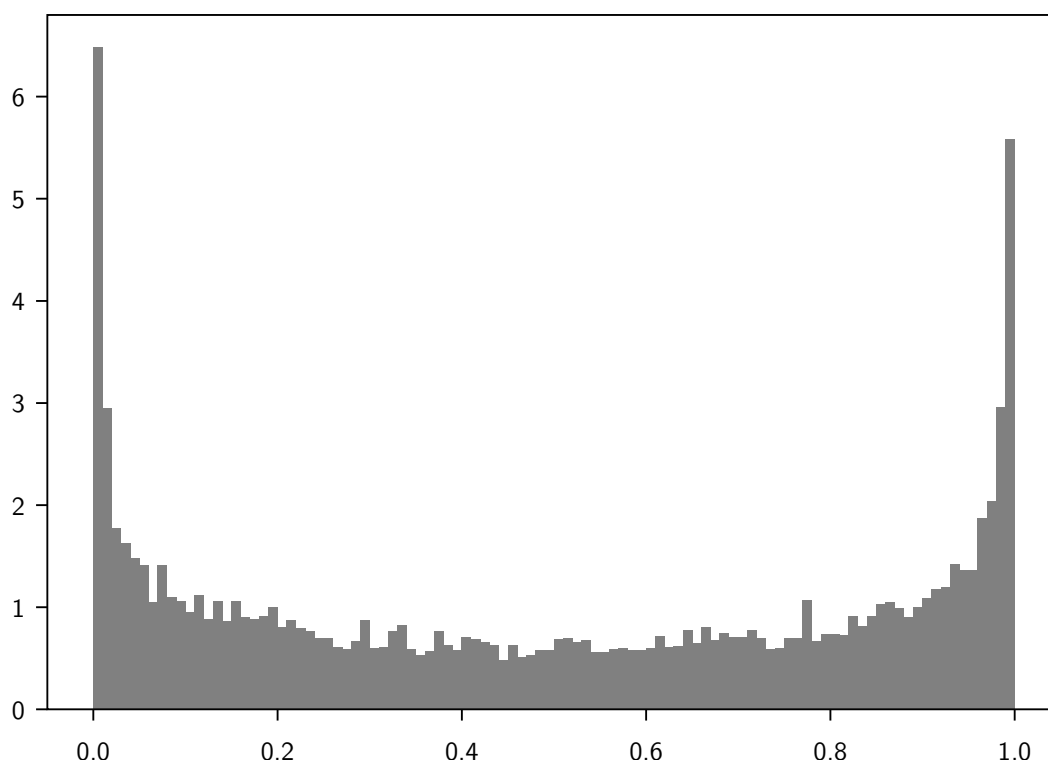
```
    S = 0
```

```
    for i in range(1, 2*n + 1):
```

```
        ...
```

```
    return L
```

21. (b) À l'aide de cette fonction, on simule $N = 10000$ réalisations de la variable aléatoire $\frac{L_{100}}{100}$, puis on représente les valeurs obtenues sous la forme d'un histogramme à 100 classes. On obtient la figure suivante :



Quelle conjecture peut-on formuler à propos de la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

22. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n} \binom{2n}{n}$ et $u_n = \ln(C_n)$.

22. (a) Montrer que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge.

22. (b) En déduire que la suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

On admet que $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ est la limite de cette suite.

23. Soient $x \in]0, 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

- Pour tout n suffisamment grand, $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$;

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0;$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty.$

23. (a) Montrer que :

$$P\left(\frac{L_n}{n} \leq x\right) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k}.$$

23. (b) Montrer, pour n suffisamment grand, l'encadrement :

$$m_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \leq \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} \leq M_n \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}},$$

où :

$$m_n = \min\{C_k C_{n-k} \mid k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket\},$$

$$M_n = \max\{C_k C_{n-k} \mid k \in \llbracket a_n, \lfloor nx \rfloor \rrbracket\}.$$

23. (c) Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites d'entiers telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq \beta_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty.$$

Montrer que les deux suites $\left(\min_{k \in \llbracket \alpha_n, \beta_n \rrbracket} C_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\max_{k \in \llbracket \alpha_n, \beta_n \rrbracket} C_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont convergentes, de même limite $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

23. (d) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=a_n}^{\lfloor nx \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{G(x)}{\pi},$$

où la fonction G a été définie dans la première partie.

24. Soient $x \in]0, 1[$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que :

- Pour tout n suffisamment grand, $1 \leq a_n < \lfloor nx \rfloor$;

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$;

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

24. (a) Donner un exemple d'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

24. (b) En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} \sum_{k=0}^{a_n-1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 0.$$

25. Montrer que la suite de variables aléatoires $\left(\frac{L_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi.