



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2026

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Les questions Python supposent, comme l'énoncé, que les bibliothèques sont importées par `import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.

Problème 1

Partie 1 - Un exemple

1. On cherche une base orthonormale de vecteurs propres de la matrice symétrique A , en résolvant $AX = \lambda X$ sans polynôme caractéristique.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système $AX = \lambda X$ s'écrit $x + y = \lambda x$ et $x + y = \lambda y$. En soustrayant, $\lambda(x - y) = 0$.

Si $\lambda \neq 0$, alors $x = y$ et la première équation donne $2x = \lambda x$; pour $X \neq 0$ on a $x \neq 0$, donc $\lambda = 2$. Réciproquement

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 0$, le système se réduit à $x + y = 0$ et $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$.

Ainsi $\text{Sp}(A) = \{2, 0\}$, avec

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ces deux vecteurs sont orthogonaux ; on les normalise :

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérification :

$${}^tQQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I_2,$$

donc Q est orthogonale et $Q^{-1} = {}^tQ$. Les colonnes de Q sont des vecteurs propres associés à 2 et 0, donc $AQ = QD$, puis $A = QDQ^{-1} = QD{}^tQ$. Contrôle direct :

$$QD = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$QD^tQ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A.$$

Conclusion

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et $D = \text{diag}(2, 0)$ conviennent, avec $2 \geq 0$.

2. a. On calcule la forme quadratique ${}^t u A u$ pour $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$:

$${}^t u A u = u_1^2 + 2u_1 u_2 + u_2^2 = (u_1 + u_2)^2.$$

Avec $u_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $u_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, où $x^2 + y^2 > 0$:

$$\varphi(x, y) = \frac{(x + y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 + y^2} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

La fonction $(x, y) \mapsto 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ est une fraction rationnelle en x et y dont le dénominateur ne s'annule pas sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; par opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ (polynômes, produit, quotient à dénominateur non nul), φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b. On annule le gradient. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, en notant $\rho = x^2 + y^2$:

$$\begin{aligned}\partial_1 \varphi(x, y) &= \frac{2y\rho - 2xy \cdot 2x}{\rho^2} = \frac{2y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \partial_2 \varphi(x, y) &= \frac{2x\rho - 2xy \cdot 2y}{\rho^2} \\ &= \frac{2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.\end{aligned}$$

Ainsi (x, y) est critique si et seulement si $y(y^2 - x^2) = 0$ et $x(x^2 - y^2) = 0$.

Si $x^2 \neq y^2$, ces égalités imposent $x = 0$ et $y = 0$, ce qui est exclu. Donc nécessairement $x^2 = y^2$, c'est-à-dire $y = x$ ou $y = -x$. Réciproquement, si $x^2 = y^2$, les deux dérivées partielles sont nulles.

Conclusion

les points critiques de φ sont les points (a, a) et $(a, -a)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; il y en a une infinité.

c. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(x, y) \neq (0, 0)$, on a $(\alpha x, \alpha y) \neq (0, 0)$ et

$$\varphi(\alpha x, \alpha y) = 1 + \frac{2\alpha^2 xy}{\alpha^2(x^2 + y^2)} = 1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \varphi(x, y).$$

d. Méthode 1 — Restriction au cercle unité, fermé borné.

La fonction φ est continue sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, qui contient S_1 . Comme S_1 est fermé, borné (admis) et non vide, la restriction de φ à S_1 admet un maximum M , atteint en un point de S_1 .

Soit $(x, y) \neq (0, 0)$ et $\alpha = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \in \mathbb{R}^*$. Alors $(\alpha x, \alpha y) \in S_1$ et, d'après 2.c, $\varphi(x, y) = \varphi(\alpha x, \alpha y) \leq M$. Le maximum M sur S_1 est donc un maximum global sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Calcul : sur S_1 , $\varphi(x, y) = 1 + 2xy$. Or $x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 \geq 0$, donc $2xy \leq 1$ sur S_1 , avec égalité si et seulement si $x = y$, ce qui arrive en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in S_1$. Donc $M = 2$.

Enfin, par 2.c, $\varphi(x, y) = 2$ si et seulement si le point normalisé vérifie $x = y$, c'est-à-dire $(x, y) = (a, a)$ avec $a \neq 0$.

Méthode 2 — Inégalité directe.

Pour tout $(x, y) \neq (0, 0)$, $2xy \leq x^2 + y^2$ car $(x - y)^2 \geq 0$. Donc $\varphi(x, y) \leq 2$, avec égalité si et seulement si $x = y$. Comme $\varphi(1, 1) = 2$, la valeur 2 est un maximum global.

Comparaison : la méthode 1 suit l'indication de l'énoncé (homogénéité, puis existence d'un maximum sur un fermé borné) et se généralise lorsque l'inégalité n'est pas évidente ; la méthode 2 est plus rapide ici car la fonction est explicite.

On remarque que les points de maximum sont bien des points critiques (condition nécessaire sur un ouvert), en accord avec 2.b ; les points $(a, -a)$ réalisent quant à eux le minimum global 0.

Conclusion

φ admet sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un maximum global égal à 2, atteint exactement aux points (a, a) , $a \in \mathbb{R}^*$.

Partie 2 - Une inégalité sur la trace

3. a. Par définition du produit matriciel, ${}^tBB \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et $B{}^tB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec

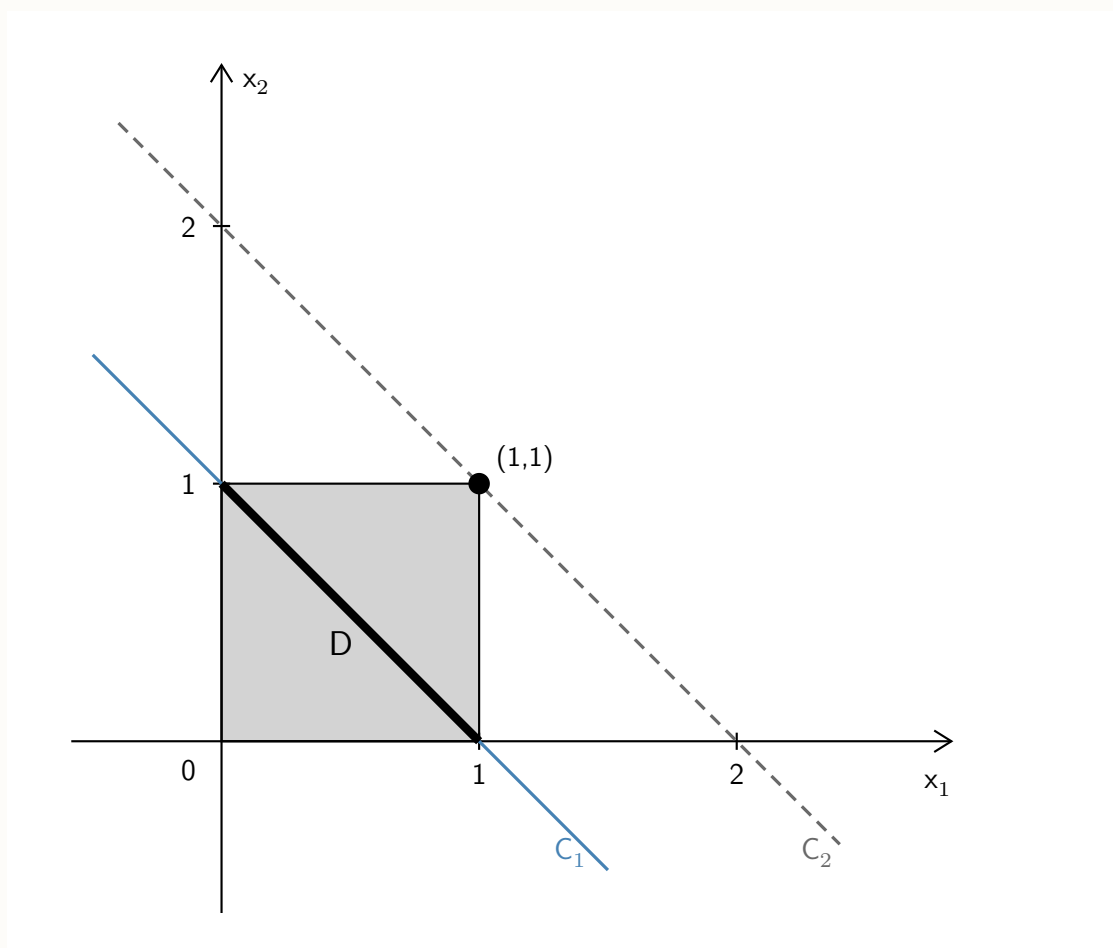
$$\forall (j, l) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2, \quad ({}^tBB)_{j,l} = \sum_{i=1}^n b_{i,j} b_{i,l}, \quad \forall (i, p) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (B{}^tB)_{i,p} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} b_{p,j}.$$

b. En prenant les coefficients diagonaux :

$$\mathrm{Tr}({}^tBB) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n b_{i,j}^2, \quad \mathrm{Tr}(B{}^tB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_{i,j}^2.$$

Ces deux sommes finies portent sur les mêmes termes, donc $\text{Tr}(^tBB) = \text{Tr}(B^tB)$.

4. Pour $n = 2$, $D = [0, 1]^2$ est le carré unité plein, $\mathcal{C}_1$ est la droite d'équation $x_1 + x_2 = 1$ et $\mathcal{C}_2$ la droite d'équation $x_1 + x_2 = 2$. On a $D \cap \mathcal{C}_1$ égal au segment joignant $(1, 0)$ et $(0, 1)$ (diagonale du carré) et $D \cap \mathcal{C}_2 = \{(1, 1)\}$.



Conclusion

le carré D est grisé, $\mathcal{C}_1$ est la droite en trait plein (son intersection avec D est la diagonale en trait épais) et $\mathcal{C}_2$ la droite en pointillés, qui ne rencontre D qu'au sommet $(1, 1)$.

5. On cherche le maximum de la fonction linéaire f_Λ sur $D \cap \mathcal{C}_k$. L'idée est de «remplir» en priorité les coordonnées associées aux plus grands λ_i .

Existence. L'ensemble $D \cap \mathcal{C}_k$ est fermé et borné (admis) et non vide : il contient

$x^* = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$, avec k coordonnées égales à 1 (on a bien $x^* \in [0, 1]^n$ et

$$\sum x_i^* = k$$

). La fonction f_Λ , polynomiale, est continue ; elle admet donc un maximum global sur $D \cap \mathcal{C}_k$.

Point de maximum. Montrons que ce maximum est atteint en x^* , avec

$f_\Lambda(x^*) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$. Soit $x \in D \cap \mathcal{C}_k$. Alors

$$f_\Lambda(x) - f_\Lambda(x^*) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(x_i - 1) + \sum_{i=k+1}^n \lambda_i x_i.$$

Pour $i \leq k$: $x_i - 1 \leq 0$ et $\lambda_i \geq \lambda_k$, donc $\lambda_i(x_i - 1) \leq \lambda_k(x_i - 1)$.

Pour $i > k$: $x_i \geq 0$ et $\lambda_i \leq \lambda_k$, donc $\lambda_i x_i \leq \lambda_k x_i$.

En sommant :

$$f_\Lambda(x) - f_\Lambda(x^*) \leq \lambda_k \left(\sum_{i=1}^n x_i - k \right) = 0,$$

car $x \in \mathcal{C}_k$. (Si $k = n$, la seconde somme est vide et $D \cap \mathcal{C}_n = \{(1, \dots, 1)\}$; l'argument reste valable.)

Remarque : l'hypothèse $\Lambda \notin \text{Vect}((1, \dots, 1))$ n'intervient pas dans la preuve ; si $\Lambda = (c, \dots, c)$, la fonction f_Λ vaut ck en tout point de $\mathcal{C}_k$ et la question est sans intérêt.

Conclusion

f_Λ admet sur D sous la contrainte $\mathcal{C}_k$ un maximum global, égal à $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$, atteint en $x^* = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (k coordonnées égales à 1).

6. a. Comme π est une projection, $\pi \circ \pi = \pi$. On pose $F = \text{Im}(\pi)$ et $G = \text{Ker}(\pi)$.

Somme directe : si $x \in F \cap G$, il existe y avec $x = \pi(y)$, d'où

$0 = \pi(x) = \pi^2(y) = \pi(y) = x$. Supplémentarité : tout x s'écrit $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$, avec $\pi(x) \in F$ et $\pi(x - \pi(x)) = \pi(x) - \pi^2(x) = 0$. Donc $\mathbb{R}^n = F \oplus G$.

Pour tout $z \in F$, $z = \pi(y)$ donc $\pi(z) = \pi^2(y) = z$. Soit $p = \dim F$ et

$\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_p, g_1, \dots, g_{n-p})$ une base adaptée à $\mathbb{R}^n = F \oplus G$. Alors $\pi(f_i) = f_i$ et $\pi(g_j) = 0$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\pi) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

P et cette matrice sont semblables (matrices du même endomorphisme dans deux bases), et la trace est invariante par similitude, donc $\text{Tr}(P) = p$. Par ailleurs $\text{rg}(P) = \text{rg}(\pi) = \dim \text{Im}(\pi) = p$ (ce raisonnement reste valable si $p = 0$ ou $p = n$).

Conclusion

$$\text{rg}(P) = \text{Tr}(P).$$

b. Si π est la projection orthogonale sur F , alors $G = \text{Ker}(\pi) = F^\perp$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \pi(x) + (x - \pi(x))$ avec $\pi(x) \in F$ et $x - \pi(x) \in F^\perp$. Par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|\pi(x)\|^2 + \|x - \pi(x)\|^2 \geq \|\pi(x)\|^2.$$

Conclusion

$$\|\pi(x)\| \leq \|x\| \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

c. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique, orthonormale. Le coefficient $p_{i,i}$ est la i -ème coordonnée de $\pi(e_i)$, donc $p_{i,i} = \langle \pi(e_i) | e_i \rangle$.

Comme $e_i - \pi(e_i) \in F^\perp$ et $\pi(e_i) \in F$:

$$p_{i,i} = \langle \pi(e_i) | \pi(e_i) + (e_i - \pi(e_i)) \rangle = \|\pi(e_i)\|^2 + 0 = \|\pi(e_i)\|^2.$$

Donc $p_{i,i} \geq 0$ et, d'après 6.b, $p_{i,i} = \|\pi(e_i)\|^2 \leq \|e_i\|^2 = 1$.

Conclusion

pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_{i,i} \in [0, 1]$.

7. La matrice A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale Q_0 et une matrice diagonale $D_0 = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ telles que $A = Q_0 D_0 {}^t Q_0$.

Pour ranger les valeurs propres, on choisit une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\mu_{\sigma(1)} \geq \dots \geq \mu_{\sigma(n)}$ et on note Q la matrice obtenue en plaçant en j -ème colonne la colonne $\sigma(j)$ de Q_0 , et $D = \text{diag}(\mu_{\sigma(1)}, \dots, \mu_{\sigma(n)})$. Les colonnes de Q forment encore une base orthonormale (mêmes vecteurs, dans un autre ordre), donc Q est orthogonale ; la j -ème colonne de Q est vecteur propre de A pour $\mu_{\sigma(j)}$, donc $AQ = QD$ et $A = QD {}^t Q$.

Conclusion

il existe Q orthogonale et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ telles que $A = QD {}^t Q$; les λ_i sont les valeurs propres de A comptées avec la dimension des espaces propres, et V_i est un vecteur propre unitaire associé à λ_i .

8. Le coefficient (i, j) de ${}^t M M$ est ${}^t C_i C_j = \langle C_i | C_j \rangle$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon, la famille $(C_1, \dots, C_k)$ étant orthonormale.

Conclusion

$${}^tMM = I_k.$$

9. Si $\lambda_i = \lambda_1$ pour tout i , alors $D = \lambda_1 I_n$ et $A = \lambda_1 Q {}^tQ = \lambda_1 I_n$. Donc, avec la question 8 :

$$\text{Tr}({}^tMAM) = \lambda_1 \text{Tr}({}^tMM) = \lambda_1 \text{Tr}(I_k) = k\lambda_1.$$

Conclusion

la quantité $\text{Tr}({}^tMAM)$ vaut $k\lambda_1$ quelle que soit M ; elle ne dépend pas du choix de M , et toutes les matrices M admissibles réalisent le maximum.

10. a. Comme Q est orthogonale, $Q {}^tQ = I_n$, donc

$${}^tXX = {}^tMQ {}^tQM = {}^tMM = I_k.$$

Par conséquent $P^2 = X({}^tXX){}^tX = X {}^tX = P$ et ${}^tP = {}^t({}^tX){}^tX = X {}^tX = P$.

Soit p l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à P . On a $p \circ p = p$, donc p est une projection ; et sa matrice dans la base canonique, orthonormale, est symétrique, donc p est un endomorphisme symétrique. Une projection symétrique est une projection orthogonale. Vérifions-le directement : si $y \in \text{Ker}(p)$ et $z = p(w) \in \text{Im}(p)$, alors $\langle y|z \rangle = \langle y|p(w) \rangle = \langle p(y)|w \rangle = 0$, donc $\text{Ker}(p) \subset \text{Im}(p)^\perp$, et l'égalité des dimensions ($\mathbb{R}^n = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$) donne $\text{Ker}(p) = \text{Im}(p)^\perp$.

Conclusion

P est la matrice d'une projection orthogonale.

- b. Si ${}^tXy = 0$, alors $Py = X({}^tXy) = 0$. Réciproquement, si $Py = 0$, alors ${}^tXP_y = {}^tXX {}^tXy = {}^tXy = 0$ en utilisant ${}^tXX = I_k$. Donc $\text{Ker}(P) = \text{Ker}({}^tX)$.

Par le théorème du rang appliqué à P et à ${}^tX$ (toutes deux définies sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) :

$$\operatorname{rg}(P) = n - \dim \operatorname{Ker}(P) = n - \dim \operatorname{Ker}({}^tX) = \operatorname{rg}({}^tX) = \operatorname{rg}(X).$$

Enfin, si $Xz = 0$ avec $z \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$, alors $z = {}^tXXz = 0$: l'application $z \mapsto Xz$ est injective, donc $\operatorname{rg}(X) = k$ par le théorème du rang.

Conclusion

$$\operatorname{rg}(P) = k.$$

c. On a ${}^tMAM = {}^tMQD{}^tQM = {}^t({}^tQM)D({}^tQM) = {}^tXDX$. Notons $X = (x_{i,j})$ avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq k$. Comme D est diagonale, $(DX)_{i,j} = \lambda_i x_{i,j}$, d'où

$$\operatorname{Tr}({}^tXDX) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{i,j} \lambda_i x_{i,j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^k x_{i,j}^2.$$

D'autre part

$$p_{i,i} = (X{}^tX)_{i,i} = \sum_{j=1}^k x_{i,j}^2$$

et $(PD)_{i,i} = p_{i,i} \lambda_i$. Donc

$$\operatorname{Tr}({}^tMAM) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_{i,i} = \operatorname{Tr}(PD).$$

Cette égalité généralise le calcul de la question 3 : on aurait aussi pu l'obtenir en adaptant la preuve de 3.b.

Inégalité. Posons $x = (p_{1,1}, \dots, p_{n,n})$. D'après 10.a, P est la matrice dans la base canonique d'une projection orthogonale, donc par 6.c chaque $p_{i,i} \in [0, 1] : x \in D$.

D'après 6.a et 10.b,

$$\sum_i p_{i,i} = \text{Tr}(P) = \text{rg}(P) = k,$$

avec $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puisque $1 \leq k \leq r \leq n : x \in \mathcal{C}_k$.

Les hypothèses de la question 5 sont satisfaites : Λ est ordonné de façon décroissante ; $\Lambda \neq 0$ car $A = QD^tQ$ est de rang $r \geq 1$; et $\Lambda \notin \text{Vect}((1, \dots, 1))$ car A possède deux valeurs propres distinctes et les λ_i sont exactement les valeurs propres de A (A et D sont semblables). Le maximum de f_Λ sur $D \cap \mathcal{C}_k$ existe donc, et

$$\begin{aligned} \text{Tr}({}^tMAM) &= \text{Tr}(PD) \\ &= f_\Lambda(p_{1,1}, \dots, p_{n,n}) \leq \max \{f_\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in D \cap \mathcal{C}_k\}. \end{aligned}$$

Énoncé rectifié : le PDF écrit $f_\Lambda(x_1, x_1, \dots, x_n)$; il s'agit d'une coquille pour $f_\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$, utilisée dans la version adaptée.

Conclusion

pour toute matrice M admissible, $\text{Tr}({}^tMAM) \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_k$, cette dernière valeur étant le maximum calculé en 5.

d. Supposons $C_i = V_i$ pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme ${}^tQQ = I_n$, ${}^tQV_i$ est la i -ème colonne E_i de I_n . Donc les colonnes de $X = {}^tQM$ sont $E_1, \dots, E_k$ et

$$P = X {}^tX = \sum_{i=1}^k E_i {}^tE_i = \text{diag}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \quad (k \text{ coefficients égaux à } 1).$$

Alors $\text{Tr}({}^tMAM) = \text{Tr}(PD) = \lambda_1 + \dots + \lambda_k = f_\Lambda(x^*)$, qui est le maximum de la question 5. On peut le vérifier directement : ${}^tV_iAV_i = \lambda_i \|V_i\|^2 = \lambda_i$.

Conclusion

d'après 10.c, aucune matrice M admissible ne donne une valeur supérieure à $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$; le choix $C_i = V_i$ atteint cette borne, donc rend $\text{Tr}({}^t M A M)$ maximale, de valeur $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$.

- e. Dans la partie 1, $n = 2$, A est symétrique de rang $r = 1$, de valeurs propres $\lambda_1 = 2 > \lambda_2 = 0$ (question 1), et l'on prend $k = 1$. Une matrice M admissible est alors une colonne unitaire u , et $\text{Tr}({}^t u A u) = {}^t u A u$. Tout vecteur unitaire s'écrit

$$u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

de sorte que ${}^t u A u = \varphi(x, y)$.

La partie 2 affirme que le maximum vaut $\lambda_1 = 2$ et qu'il est atteint pour

$$u = V_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

C'est exactement le résultat de 2.d : le maximum de φ vaut 2 et il est atteint aux points (a, a) , dont la direction est celle du vecteur propre V_1 associé à la plus grande valeur propre (on obtient aussi $-V_1$, ce qui montre que la condition de 10.d est suffisante mais pas nécessaire).

Conclusion

la question 2.d est le cas particulier $n = 2$, $k = 1$ du résultat général : le maximum de ${}^t u A u$ sur les vecteurs unitaires est la plus grande valeur propre de A , atteinte en un vecteur propre unitaire associé.

Problème 2

Partie 1 - Des résultats préliminaires

1. a. Pour $t \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P(W = n)t^n \leq P(W = n)$. La série à termes positifs

$$\sum P(W = n)$$

converge : ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^m P(W = n) = P(0 \leq W \leq m)$$

sont majorées par 1. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum P(W = n)t^n$$

converge.

Conclusion

G_W est bien définie sur $[0, 1]$.

- b. Soit $0 \leq s \leq t \leq 1$. Pour tout n , $P(W = n)s^n \leq P(W = n)t^n$. En sommant puis en passant à la limite dans l'inégalité entre sommes partielles, $G_W(s) \leq G_W(t)$.

Conclusion

G_W est croissante sur $[0, 1]$.

- c. Sur $[0, 1[$, G_W est croissante et majorée par $G_W(1)$. Par le théorème de la limite monotone, G_W admet en 1^- une limite finie ℓ , avec $\ell \leq G_W(1)$.

- d. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1[$. Les termes étant positifs, la somme partielle est inférieure à la somme de la série :

$$\sum_{n=0}^m P(W = n)t^n \leq G_W(t).$$

Par 1.b, $G_W(t) \leq G_W(1)$.

On fait tendre t vers 1^- . Le membre de gauche est une fonction polynomiale de t , donc continue, de limite

$$\sum_{n=0}^m P(W = n);$$

$G_W(t)$ tend vers ℓ . Par passage à la limite dans les inégalités larges :

$$\sum_{n=0}^m P(W = n) \leq \ell \leq G_W(1).$$

- e. En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, $G_W(1) \leq \ell \leq G_W(1)$, donc $\ell = G_W(1)$. Ainsi $\lim_{t \rightarrow 1^-} G_W(t) = G_W(1)$: G_W , définie sur $[0, 1]$, est continue en 1.

- f. Soit $t \in [0, 1[$. Pour $n \geq 1$, $0 \leq nP(W = n)t^{n-1} \leq nt^{n-1}$. La série

$$\sum_{n \geq 1} nt^{n-1}$$

est la série géométrique dérivée, convergente car $0 \leq t < 1$ (de somme $\frac{1}{(1-t)^2}$). Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} nP(W = n)t^{n-1}$$

converge.

2. a. Méthode 1 — Étude de fonction.

Posons $g(x) = \exp(-x) - 1 + x$ sur $\mathbb{R}$, dérivable avec $g'(x) = 1 - \exp(-x)$. On a $g'(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ et $g'(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$, donc g admet en 0 un minimum global $g(0) = 0$. Ainsi $g \geq 0$.

Méthode 2 — Convexité.

La fonction $\exp$ est convexe, donc située au-dessus de sa tangente en 0 : $\exp(y) \geq 1 + y$ pour tout réel y . Avec $y = -x$, on obtient $\exp(-x) \geq 1 - x$.

La méthode 2 est plus rapide et réutilisable dès qu'une inégalité « fonction contre tangente » apparaît ; la méthode 1 est la démarche systématique.

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \leq \exp(-x).$$

b. Soient $1 \leq n \leq m$. Les événements $A_n, \dots, A_m$ étant mutuellement indépendants, leurs contraires $\overline{A_n}, \dots, \overline{A_m}$ le sont aussi. Donc

$$P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) = \prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)).$$

Pour chaque k , $0 \leq 1 - P(A_k) \leq \exp(-P(A_k))$ par 2.a. Les facteurs étant positifs, on peut multiplier ces inégalités :

$$\prod_{k=n}^m (1 - P(A_k)) \leq \prod_{k=n}^m \exp(-P(A_k)) = \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right).$$

Par passage au contraire :

$$P\left(\bigcup_{k=n}^m A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=n}^m \overline{A_k}\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right).$$

c. Soit $n \geq 1$ et $B_n = \bigcup_{k \geq n} A_k$. Pour tout $m \geq n$, $\bigcup_{k=n}^m A_k \subset B_n$, donc par 2.b :

$$1 \geq P(B_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=n}^m P(A_k)\right).$$

La série à termes positifs

$$\sum P(A_k)$$

diverge, donc

$$\sum_{k=n}^m P(A_k) \rightarrow +\infty$$

quand $m \rightarrow +\infty$ (on a retiré un nombre fini de termes), et l'exponentielle tend vers 0.
Ainsi $P(B_n) = 1$ pour tout n .

Méthode 1 — Continuité monotone. La suite (B_n) est décroissante pour l'inclusion ;

par continuité décroissante, $P\left(\bigcap_{n \geq 1} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = 1$.

Méthode 2 — Passage au contraire. $\overline{\bigcap_n B_n} = \bigcup_n \overline{B_n}$ et, par sous-additivité,

$$P\left(\bigcup_n \overline{B_n}\right) \leq \sum_n P(\overline{B_n}) = 0.$$

Conclusion

$$P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1.$$

3. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $j_0 = 0$ et $d_i = j_i - j_{i-1}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Un n -uplet de sommes partielles détermine les termes et réciproquement, donc

$$[U_n = (j_1, \dots, j_n)] = \bigcap_{i=1}^n [W_i = d_i], \quad [V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)] = \bigcap_{i=1}^n [W_{k+i-1} = d_i].$$

Les variables $W_1, \dots, W_n$ d'une part et $W_k, \dots, W_{k+n-1}$ d'autre part sont mutuellement indépendantes, donc

$$P(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = \prod_{i=1}^n P(W_i = d_i), \quad P(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)) = \prod_{i=1}^n P(W_{k+i-1} = d_i).$$

Toutes les W_i ayant la même loi, $P(W_i = d_i) = P(W_{k+i-1} = d_i)$, et les deux produits sont égaux.

Conclusion

$$P(U_n = (j_1, \dots, j_n)) = P(V_{n,k} = (j_1, \dots, j_n)).$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En posant $j = k - i$:

$$\sum_{k=1}^n c_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^k a_i b_{k-i} = \sum_{(i,j) \in E_n} a_i b_j, \quad E_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} : i + j \leq n\}.$$

De même

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) = \sum_{(i,j) \in F_n} a_i b_j$$

avec $F_n = \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 0, n \rrbracket$.

On a $E_n \subset F_n$ (si $i \geq 1, j \geq 0$ et $i + j \leq n$, alors $i \leq n$ et $j \leq n$) et $F_n \subset E_{2n}$ (si $i \leq n$ et $j \leq n$, alors $i + j \leq 2n$). Les termes $a_i b_j$ étant positifs, une somme sur un ensemble plus grand est plus grande :

$$\sum_{k=1}^n c_k \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) \leq \sum_{k=1}^{2n} c_k.$$

b. Notons

$$\alpha = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$$

et

$$\beta = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j.$$

Les c_k sont positifs, donc la suite des sommes partielles

$$C_n = \sum_{k=1}^n c_k$$

est croissante ; par 4.a et la positivité des termes, $C_n \leq \alpha\beta$. Par le théorème de la limite monotone, (C_n) converge vers un réel L : la série

$$\sum c_k$$

converge.

En passant à la limite dans l'encadrement

$$C_n \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=0}^n b_j \right) \leq C_{2n},$$

on obtient $L \leq \alpha\beta \leq L$ (car $C_{2n} \rightarrow L$).

Conclusion

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=1}^{+\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Partie 2 - Une marche aléatoire

5. a. X_n est finie, donc admet des moments. $E(X_n) = 1 \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot \frac{1}{2} = 0$ et $E(X_n^2) = 1$, d'où, par Koenig-Huygens, $V(X_n) = 1 - 0^2 = 1$.

b. Par linéarité,

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = 0.$$

Les X_k étant indépendantes, la variance de la somme est la somme des variances :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n.$$

6. Méthode 1 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Pour $n \geq 1$, $\frac{S_n}{n}$ admet une espérance 0 et une variance $\frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{1}{n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Méthode 2 — Loi faible des grands nombres.

Les X_k sont indépendantes, de même loi, admettent une variance, et $\frac{S_n}{n}$ est leur moyenne empirique ; la loi faible des grands nombres donne la convergence en probabilité vers $E(X_1) = 0$.

La méthode 2 applique un théorème du cours ; la méthode 1 en refait la preuve dans ce cas et fournit en plus une majoration explicite de la probabilité d'écart.

Conclusion

$\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

7. a. `rd.randint(0, 2)` renvoie un entier uniforme dans $\{0, 1\}$ (borne supérieure exclue) ; $2U - 1$ vaut alors -1 ou 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun.

Python

```
def simul_X():
    return 2 * rd.randint(0, 2) - 1
```

b. On additionne n simulations indépendantes de X , en partant de $S_0 = 0$.

Python

```
def simul_S(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        S = S + simul_X()
    return S
```

Ces deux fonctions ont été exécutées : sur dix pas, les valeurs obtenues sont paires et comprises entre -10 et 10 , conformément à 9.a.

8. Pour $n \in \mathbb{N}$ (la somme est vide et vaut 0 si $n = 0$) :

$$2 \sum_{k=1}^n \frac{X_k + 1}{2} - n = \sum_{k=1}^n X_k + n - n = S_n.$$

La variable $Y_k = \frac{X_k + 1}{2}$ prend les valeurs 0 (lorsque $X_k = -1$) et 1 (lorsque $X_k = 1$), avec $P(Y_k = 1) = P(X_k = 1) = \frac{1}{2}$.

Conclusion

Y_k suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.

9. Posons

$$B_n = \sum_{k=1}^n Y_k.$$

Les Y_k sont des fonctions respectives des X_k , mutuellement indépendantes (lemme des coalitions), de loi $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$; par stabilité de la loi binomiale, $B_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$. D'après 8, $S_n = 2B_n - n$.

- a. Pour $i \in \llbracket -n, n \rrbracket$, $[S_n = i] = [2B_n = n + i]$. Si i et n n'ont pas la même parité, $n + i$ est impair et ne peut pas être égal à l'entier pair $2B_n$: l'évènement est impossible.

Conclusion

$$P(S_n = i) = 0.$$

- b. Si i et n ont la même parité, $\frac{n+i}{2}$ est un entier, compris entre 0 et n car $-n \leq i \leq n$.
Donc

$$P(S_n = i) = P\left(B_n = \frac{n+i}{2}\right) = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-\frac{n+i}{2}} = \binom{n}{\frac{n+i}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

10. Question adaptée au programme actuel. L'énoncé original admettait la formule de Stirling, qui n'est pas à supposer connue; la version adaptée admet seulement sa conséquence particulière utile, $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$.

- a. Par 9.b avec $2n$ pas et $i = 0$ (même parité) :

$$P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

L'équivalent admis, multiplié par $\frac{1}{4^n}$ (compatibilité des équivalents avec le produit), donne

$$P(S_{2n} = 0) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

b. Question adaptée au programme actuel.

Méthode 1 — Par l'équivalent de 10.a.

Les termes $P(S_{2n} = 0)$ et $\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ sont strictement positifs et équivalents. La série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum \frac{1}{n^{1/2}}$$

est une série de Riemann d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$, divergente. Par le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs,

$$\sum P(S_{2n} = 0)$$

diverge.

Méthode 2 — Par une minoration élémentaire, sans l'équivalent admis.

Posons $u_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2}$. Montrons par récurrence que $u_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Si $u_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$, il suffit de vérifier $\frac{2n+1}{2n+2} \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$, soit, les deux membres étant positifs, $(2n+1)^2(n+1) \geq 4n(n+1)^2$, c'est-à-dire $4n^2 + 4n + 1 \geq 4n^2 + 4n$, ce qui est vrai. Alors $P(S_{2n} = 0) = u_n \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et la série diverge par comparaison avec une série de Riemann divergente.

La méthode 1 est immédiate une fois l'équivalent connu ; la méthode 2 montre qu'une simple minoration suffit pour prouver une divergence.

Conclusion

la série

$$\sum_{n \geq 1} P(S_{2n} = 0)$$

diverge.

Pourquoi la question 2.c ne permet pas de conclure. L'énoncé original demandait d'en déduire, «à l'aide de la Question 2.c», que la marche passe presque sûrement une infinité de fois par 0. Or 2.c exige des événements mutuellement indépendants, et les événements $[S_{2n} = 0]$ ne le sont pas. Par exemple $P(S_2 = 0) = \frac{1}{2}$,

$P(S_4 = 0) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, alors que, $S_4 - S_2 = X_3 + X_4$ étant indépendante de S_2 ,

$$P([S_2 = 0] \cap [S_4 = 0]) = P(S_2 = 0)P(X_3 + X_4 = 0) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}.$$

Le résultat demandé (récurrence de la marche aléatoire simple symétrique) est vrai, mais sa preuve demande des outils non disponibles ici.

Résultat admis dans cette version adaptée : presque sûrement, la marche aléatoire passe une infinité de fois par 0, c'est-à-dire $P\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} [S_k = 0]\right) = 1$. Ce résultat éclaire la suite (la marche revient sans cesse à l'origine) mais n'est utilisé dans aucune des questions 11 à 14.

11. a. $[T = 1]$ est réalisé si et seulement si $S_1 > 0$, c'est-à-dire $X_1 = 1$. Donc $P(T = 1) = \frac{1}{2}$.

b. Soit $n \geq 2$. Par définition, $[T = n]$ signifie que $S_n > 0$ et que $S_j \leq 0$ pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Dans ce cas $S_{n-1} \leq 0$ et $S_n = S_{n-1} + X_n \leq S_{n-1} + 1 \leq 1$; comme S_n est un entier strictement positif, $S_n = 1$. Réciproquement, si $S_j \leq 0$ pour $j \leq n-1$ et $S_n = 1 > 0$, alors n est le plus petit indice $m \geq 1$ tel que $S_m > 0$, donc $T = n$.

Conclusion

$$[T = n] = \left(\bigcap_{j=1}^{n-1} [S_j \leq 0] \right) \cap [S_n = 1].$$

- c. Pour $n = 0$, $P(T = 0) = 0$ par définition de T . Pour $n \geq 2$ pair, $[T = n] \subset [S_n = 1]$ par 11.b, et $1 \in \llbracket -n, n \rrbracket$ n'a pas la parité de n , donc $P(T = n) \leq P(S_n = 1) = 0$ par 9.a.

Conclusion

$P(T = n) = 0$ pour tout entier naturel n pair.

12. a. R_k est réalisé si et seulement si le marcheur fait son premier pas vers la gauche, reste ensuite à des positions strictement négatives jusqu'à l'instant k inclus, et revient en 0 à l'instant $k + 1$: autrement dit, le premier pas est vers la gauche et le premier retour à l'origine a lieu exactement à l'instant $k + 1$ (pour $k = 1$, l'intersection centrale est vide et $R_1 = [S_1 = -1] \cap [S_2 = 0]$).

- b. Pour $j \geq 2$,

$$S_j = X_1 + \sum_{i=2}^j X_i.$$

Sur $[X_1 = -1]$, on a

$$S_j \leq -1 \iff \sum_{i=2}^j X_i \leq 0$$

et

$$S_{k+1} = 0 \iff \sum_{i=2}^{k+1} X_i = 1.$$

Donc

$$R_k = [X_1 = -1] \cap E_k, \quad E_k = \left(\bigcap_{j=2}^k \left[\sum_{i=2}^j X_i \leq 0 \right] \right) \cap \left[\sum_{i=2}^{k+1} X_i = 1 \right].$$

Notons

$$H_k = \{(y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k : y_1 \leq 0, \dots, y_{k-1} \leq 0, y_k = 1\}.$$

Avec les notations de la question 3 appliquées à $W_i = X_i$, $E_k = [V_{k,2} \in H_k]$ où

$$V_{k,2} = \left(X_2, X_2 + X_3, \dots, \sum_{i=2}^{k+1} X_i \right).$$

L'évènement E_k ne dépend que de $X_2, \dots, X_{k+1}$; par le lemme des coalitions, il est indépendant de $[X_1 = -1]$. Donc $P(R_k) = \frac{1}{2}P(V_{k,2} \in H_k)$.

Les vecteurs $V_{k,2}$ et U_k prennent leurs valeurs dans l'ensemble fini $\llbracket -k, k \rrbracket^k$ et ont la même loi (question 3). En sommant sur les $y \in H_k \cap \llbracket -k, k \rrbracket^k$:

$$P(V_{k,2} \in H_k) = \sum_y P(V_{k,2} = y) = \sum_y P(U_k = y) = P(U_k \in H_k).$$

Or $[U_k \in H_k] = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} [S_j \leq 0] \right) \cap [S_k = 1]$, qui vaut $[T = k]$ par 11.b si $k \geq 2$, et $[S_1 = 1] = [T = 1]$ si $k = 1$.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(R_k) = \frac{1}{2}P(T = k).$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et notons $F_{k,n} = \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - S_{k+1} \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1]$

(intersection vide égale à Ω si $k = n - 1$). Montrons que $[T = n + 1]$ est la réunion disjointe des $R_k \cap F_{k,n}$, $1 \leq k \leq n - 1$.

Inclusion directe. Supposons $T = n + 1$. Par 11.b, $S_j \leq 0$ pour $j \leq n$ et $S_{n+1} = 1$, donc $S_n = 0$ (car $S_n \leq 0$ et $S_n \geq S_{n+1} - 1 = 0$) et $S_1 = -1$ (car $S_1 \in \{-1, 1\}$ et $S_1 \leq 0$).

L'ensemble $\{j \in \llbracket 2, n \rrbracket : S_j = 0\}$ contient n ; notons $k + 1$ son plus petit élément, de sorte que $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Pour $2 \leq j \leq k$, $S_j \leq 0$ et $S_j \neq 0$, donc $S_j \leq -1$: R_k est réalisé. Comme $S_{k+1} = 0$, on a $S_j - S_{k+1} = S_j \leq 0$ pour $k + 2 \leq j \leq n$ et $S_{n+1} - S_{k+1} = 1$: $F_{k,n}$ est réalisé.

Inclusion réciproque. Si $R_k \cap F_{k,n}$ est réalisé, alors $S_1 = -1$, $S_j \leq -1$ pour $2 \leq j \leq k$, $S_{k+1} = 0$, $S_j \leq 0$ pour $k + 2 \leq j \leq n$ et $S_{n+1} = 1$; par 11.b, $T = n + 1$.

Disjonction. Sur R_k , le premier instant $j \geq 1$ où $S_j = 0$ est $k + 1$; deux valeurs distinctes de k donnent donc des événements incompatibles.

Par additivité :

$$P(T = n + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} P \left(R_k \cap \left(\bigcap_{j=k+2}^n [S_j - S_{k+1} \leq 0] \right) \cap [S_{n+1} - S_{k+1} = 1] \right).$$

Pour $n = 1$, la somme est vide et l'on retrouve $P(T = 2) = 0$, conforme à 11.c.

- d.** Soient $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$; posons $m = n - k \geq 1$. L'évènement R_k ne dépend que de $X_1, \dots, X_{k+1}$, et $F_{k,n}$ ne dépend que de $X_{k+2}, \dots, X_{n+1}$; par le lemme des coalitions, ils sont indépendants.

Pour $l \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$S_{k+1+l} - S_{k+1} = \sum_{i=k+2}^{k+1+l} X_i$$

est la l -ème composante de $V_{m,k+2}$. Donc $F_{k,n} = [V_{m,k+2} \in H_m]$, et, comme en 12.b, $P(F_{k,n}) = P(U_m \in H_m) = P(T = m) = P(T = n - k)$.

Avec 12.b et 12.c :

$$P(T = n + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} P(R_k)P(F_{k,n}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(T = k)P(T = n - k).$$

Pour $n = 1$, les deux membres sont nuls. Enfin, le terme d'indice $k = n$ ajouté dans la seconde somme vaut $P(T = n)P(T = 0) = 0$.

Conclusion

$$P(T = n + 1) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} P(T = k)P(T = n - k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(T = k)P(T = n - k).$$

13. a. T est une variable discrète à valeurs entières, donc G_T est définie sur $[0, 1]$ (question 1). Soit $t \in [0, 1]$. Comme $P(T = 0) = 0$,

$$G_T(t) = \sum_{i \geq 1} P(T = i)t^i.$$

On applique 4.b avec $a_i = P(T = i)t^i$ ($i \geq 1$) et $b_j = P(T = j)t^j$ ($j \geq 0$) : ce sont les termes de séries convergentes à termes positifs (1.a), de sommes $G_T(t)$ toutes deux. Et

$$c_n = \sum_{k=1}^n P(T = k)t^k P(T = n - k)t^{n-k} = \left(\sum_{k=1}^n P(T = k)P(T = n - k) \right) t^n.$$

Conclusion

$$G_T(t)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^n P(T = k)P(T = n - k) \right) t^n.$$

- b. D'après 12.d, le coefficient de t^n ci-dessus vaut $2P(T = n + 1)$. Donc, par linéarité des séries convergentes :

$$\begin{aligned}
 tG_T(t)^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2P(T = n+1)t^{n+1} = 2 \sum_{m=2}^{+\infty} P(T = m)t^m \\
 &= 2(G_T(t) - P(T = 0) - P(T = 1)t).
 \end{aligned}$$

Avec $P(T = 0) = 0$ et $P(T = 1) = \frac{1}{2}$:

$$\forall t \in [0, 1], \quad tG_T(t)^2 = 2G_T(t) - t.$$

c. Pour $t = 1$: $G_T(1)^2 - 2G_T(1) + 1 = 0$, soit $(G_T(1) - 1)^2 = 0$, donc $G_T(1) = 1$.

T prend ses valeurs dans $\{-1\} \cup \mathbb{N}^*$, donc $([T = -1], [T = 1], [T = 2], \dots)$ est un système complet d'évènements et

$$1 = P(T = -1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n) = P(T = -1) + G_T(1).$$

Conclusion

$$G_T(1) = 1 \text{ et } P(T = -1) = 0.$$

d. Méthode 1 — Dérivation de la relation fonctionnelle.

On sait (résultat admis en 1.f) que G_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$. En dérivant l'égalité de 13.b sur $[0, 1[$:

$$G_T(t)^2 + 2tG_T(t)G'_T(t) = 2G'_T(t) - 1, \quad \text{soit} \quad 2G'_T(t)(1 - tG_T(t)) = 1 + G_T(t)^2.$$

Pour $t \in [0, 1[$, $0 \leq G_T(t) \leq G_T(1) = 1$ (1.b et 13.c), donc $tG_T(t) \leq t < 1$ et l'on peut diviser :

$$G'_T(t) = \frac{1 + G_T(t)^2}{2(1 - tG_T(t))}.$$

Quand $t \rightarrow 1^-$, $G_T(t) \rightarrow G_T(1) = 1$ par continuité en 1 (1.e) ; le numérateur tend vers 2 et le dénominateur tend vers 0 en restant strictement positif. Donc $G'_T(t) \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Expression explicite de G_T .

Pour $t \in]0, 1[$, $G_T(t)$ est racine de l'équation du second degré $tz^2 - 2z + t = 0$, de discriminant $4 - 4t^2 > 0$, dont les racines sont $\frac{1 \pm \sqrt{1 - t^2}}{t}$. La plus grande est strictement supérieure à $\frac{1}{t} > 1 \geq G_T(t)$, donc

$$G_T(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t} = \frac{t}{1 + \sqrt{1 - t^2}}.$$

Avec $s(t) = \sqrt{1 - t^2}$, dérivable sur $[0, 1[$ de dérivée $s'(t) = -\frac{t}{s(t)}$:

$$G'_T(t) = \frac{(1 + s(t)) - t s'(t)}{(1 + s(t))^2} = \frac{1 + s(t) + \frac{t^2}{s(t)}}{(1 + s(t))^2}.$$

Quand $t \rightarrow 1^-$, $s(t) \rightarrow 0^+$, donc $\frac{t^2}{s(t)} \rightarrow +\infty$ et $(1 + s(t))^2 \rightarrow 1$: $G'_T(t) \rightarrow +\infty$.

La méthode 1 n'utilise que la relation fonctionnelle et la continuité de G_T en 1, sans résoudre l'équation ; la méthode 2 fournit en plus une formule explicite de G_T , qui permettrait de retrouver la loi de T .

Conclusion

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} G'_T(t) = +\infty.$$

14. a. On fait marcher le marcheur tant que sa position est négative ou nulle et l'on compte les pas. Comme $P(T = -1) = 0$ (13.c), la boucle se termine presque sûrement, et la valeur renvoyée est alors T ; elle peut toutefois être très grande.

Python

```
def simul_T():
    S = 0
    n = 0
    while S <= 0:
        S = S + simul_X()
        n = n + 1
    return n
```

Variables : S est la position courante S_n , n le nombre de pas effectués. À la sortie de la boucle, n est le premier instant où la position est strictement positive.

Ce code a été exécuté : sur 400 simulations, les fréquences observées de $T = 1, 3, 5, 7$ (environ 0,50; 0,14; 0,065; 0,045) sont proches des probabilités théoriques $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{5}{128}$, que l'on peut déduire de 12.d; aucune valeur paire n'apparaît, conformément à 11.c. Une simulation n'est pas une preuve.

- b. La fonction `mystere(N)` remplit un tableau `ech` de N simulations indépendantes de T et renvoie leur moyenne arithmétique, c'est-à-dire une réalisation de la moyenne empirique

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k$$

d'un échantillon de taille N de la loi de T . La boucle finale affiche sept moyennes empiriques, chacune sur 1000 simulations.

Les sept valeurs obtenues (de 31,36 à 8181,62) sont très dispersées et ne se stabilisent pas autour d'une valeur commune. Si T admettait une espérance et une variance, la loi faible des grands nombres imposerait que ces moyennes soient, avec forte probabilité, proches de $E(T)$. On conjecture donc que T n'admet pas d'espérance (la série

$$\sum nP(T = n)$$

divergerait). Une exécution de `mystere(50)` a de même donné des valeurs très dispersées (18,4 ; 48,0 ; 8811,32).

- c.** Conjecture : une variable W à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance si et seulement si $G'_W(t)$ admet une limite finie quand $t \rightarrow 1^-$, et dans ce cas $E(W) = \lim_{t \rightarrow 1^-} G'_W(t)$. Pour T , la limite est $+\infty$ (13.d), ce qui est cohérent avec l'absence d'espérance observée en 14.b.

Cette conjecture peut se démontrer avec les outils du programme. Notons

$p_n = P(W = n)$. Pour $t \in [0, 1[$,

$$G'_W(t) = \sum_{n \geq 1} np_n t^{n-1}$$

(admis en 1.f), fonction croissante de t (termes positifs croissants en t).

Si W admet une espérance,

$$G'_W(t) \leq \sum_{n \geq 1} np_n = E(W);$$

G'_W est croissante et majorée, donc admet une limite finie $L \leq E(W)$.

Si G'_W admet une limite finie L en 1^- , alors, pour tout m et tout $t \in [0, 1[$,

$$\sum_{n=1}^m np_n t^{n-1} \leq G'_W(t) \leq L;$$

en faisant tendre t vers 1,

$$\sum_{n=1}^m np_n \leq L.$$

La série à termes positifs

$$\sum np_n$$

est donc convergente : W admet une espérance, et $E(W) \leq L$.

Les deux inégalités donnent $E(W) = L$. Appliqué à T , qui vaut presque sûrement un entier strictement positif (13.c), ce résultat montre, avec 13.d, que T n'admet pas d'espérance : la conjecture de 14.b est donc démontrée.

Relevé des adaptations

Problème 1, question 4 : la figure demandée est tracée en SVG dans le corrigé, calculée exactement à partir des définitions de D , $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Le sujet original ne contient aucune figure.

Problème 1, question 10.c : coquille du PDF, $f_\Lambda(x_1, x_1, \dots, x_n)$ rectifié en $f_\Lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Problème 2, question 10 (préambule) : la formule de Stirling, admise dans l'original mais à ne pas supposer connue, est remplacée par le seul résultat particulier nécessaire, $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$, énoncé sous la forme « On admet le résultat suivant ».

Problème 2, question 10.b : l'original demandait de conclure à l'aide de la question 2.c, qui suppose l'indépendance mutuelle des événements, alors que les événements $[S_{2n} = 0]$ ne sont pas indépendants. La question demande désormais de prouver la

divergence de

$$\sum P(S_{2n} = 0),$$

puis admet le résultat de récurrence de la marche ; aucune question ultérieure n'en dépend.

Problème 2, question 13.d : la limite $t \rightarrow 1$ est précisée en $t \rightarrow 1^-$, G'_T n'étant défini que sur $[0, 1[$.

Problème 2, question 14.b : le code était déjà en Python et il est conservé ; l'encadré « Affichage Python » est retranscrit sous forme de tableau des sept valeurs affichées.