



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2025

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie 1 - Une suite d'intégrales

1. Il s'agit de justifier l'existence d'intégrales sur un segment, puis d'exploiter la parité de l'intégrande.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $h_n : t \mapsto (1 - t^2)^n$ est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur les segments $[0, 1]$ et $[-1, 1]$. Les intégrales I_n et J_n sont donc des intégrales de fonctions continues sur des segments : elles sont bien définies.

La fonction h_n est paire car $h_n(-t) = (1 - (-t)^2)^n = h_n(t)$. Par la relation de Chasles puis le changement de variable affine $s = -t$ dans la première intégrale :

$$J_n = \int_{-1}^0 (1 - t^2)^n dt + \int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^1 (1 - s^2)^n ds + I_n = 2I_n.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n existent et $J_n = 2I_n$.

2. On a $I_0 = \int_0^1 1 dt = 1$.

Conclusion

$I_0 = 1$.

3. On compare les intégrandes de I_{n+1} et I_n , puis on utilise la croissance de l'intégrale.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$. On a $0 \leq 1 - t^2 \leq 1$, donc, en multipliant par $(1 - t^2)^n \geq 0$:

$$(1 - t^2)^{n+1} = (1 - t^2)(1 - t^2)^n \leq (1 - t^2)^n.$$

Les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$), la croissance de l'intégrale donne

$$I_{n+1} \leq I_n.$$

Conclusion

la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est décroissante.

4. On écrit $(1 - t^2)^n = 1 \times (1 - t^2)^n$ et on intègre par parties en dérivant $(1 - t^2)^n$.

Soit $n \geq 1$. On pose, pour $t \in [0, 1]$, $a(t) = t$ et $b(t) = (1 - t^2)^n$. Les fonctions a et b sont de classe C^1 sur $[0, 1]$, avec $a'(t) = 1$ et, puisque $n \geq 1$, $b'(t) = -2nt(1 - t^2)^{n-1}$.

L'intégration par parties sur le segment $[0, 1]$ donne :

$$I_n = \left[t(1 - t^2)^n \right]_0^1 + 2n \int_0^1 t^2(1 - t^2)^{n-1} dt.$$

Le crochet vaut $1 \times 0^n - 0 = 0$ car $n \geq 1$. En écrivant $t^2 = 1 - (1 - t^2)$ et par linéarité de l'intégrale :

$$I_n = 2n \int_0^1 (1 - t^2)^{n-1} dt - 2n \int_0^1 (1 - t^2)^n dt = 2nI_{n-1} - 2nI_n.$$

Ainsi $(2n + 1)I_n = 2nI_{n-1}$ et, comme $2n + 1 \neq 0$:

Conclusion

pour tout $n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n + 1} I_{n-1}$.

5. La méthode imposée est la récurrence ; on présente ensuite une variante par produit télescopique.

Méthode 1 — Récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}(n) : \ll I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \gg$.

Initialisation : $\frac{(2^0 0!)^2}{1!} = 1 = I_0$ d'après la question 2, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geq 1$ tel que $\mathcal{H}(n-1)$ soit vraie. D'après la question 4 :

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n-1)!}.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par $2n$:

$$I_n = \frac{(2n)^2 (2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} = \frac{(2n \cdot 2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!},$$

car $2n \cdot 2^{n-1}(n-1)! = 2^n n(n-1)! = 2^n n!$. Donc $\mathcal{H}(n)$ est vraie.

Par récurrence, $\mathcal{H}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Produit télescopique

On itère la relation de la question 4 : pour $n \geq 1$,

$$I_n = \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \right) I_0 = \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)}.$$

D'une part

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n n!.$$

D'autre part, le produit des entiers impairs de 1 à $2n + 1$ s'obtient en divisant $(2n + 1)!$ par le produit des entiers pairs de 2 à $2n$:

$$\prod_{k=1}^n (2k + 1) = \prod_{k=0}^n (2k + 1) = \frac{(2n + 1)!}{2^n n!}.$$

D'où $I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n + 1)!}$, formule également vraie pour $n = 0$.

La méthode 1 suit la consigne et ne demande que de vérifier une formule donnée ; la méthode 2 permet de trouver la formule sans la connaître à l'avance, ce qui est utile dès qu'une relation du type $u_n = r_n u_{n-1}$ apparaît.

Valeur de J_n : d'après la question 1, $J_n = 2I_n$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n + 1)!} \text{ et } J_n = \frac{2 (2^n n!)^2}{(2n + 1)!} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n + 1)!}.$$

6. On part de $I_0 = 1$ et on applique n fois la relation $I_k = \frac{2k}{2k + 1} I_{k-1}$ pour k allant de 1 à n .

Python

```
def I(n) :
    i=1
    for k in range(1, n+1) :
        i = 2*k/(2*k+1)*i
    return i
```

La variable i contient I_0 au départ, puis I_k à la fin du passage de la boucle d'indice k . La boucle $\text{range}(1, n+1)$ parcourt les entiers $1, 2, \dots, n$ (la borne $n+1$ est exclue). Pour $n = 0$, la boucle n'est pas parcourue et la fonction renvoie $1 = I_0$.

Code exécuté : il renvoie par exemple $0.6666 \dots$ pour $n = 1$, $0.5333 \dots$ pour $n = 2$ et $0.36940 \dots$ pour $n = 5$, valeurs qui coïncident avec $\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ (respectivement $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$ et $\frac{256}{693}$).

7. Question adaptée au programme actuel. La formule de Stirling n'est pas un résultat du programme ; on admet uniquement sa conséquence particulière $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Il s'agit d'exprimer J_n à l'aide du coefficient binomial central puis d'utiliser la compatibilité des équivalents avec les produits et quotients.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $(2n+1)! = (2n+1)(2n)!$ et $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. D'après la question 5 :

$$J_n = \frac{2 \cdot 4^n (n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2 \cdot 4^n}{(2n+1) \binom{2n}{n}}.$$

On a $2n+1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2n$ et, par le résultat admis, $\binom{2n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Toutes ces quantités sont strictement positives ; les équivalents sont compatibles avec le produit et le quotient, donc :

$$J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2 \cdot 4^n}{2n \cdot \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{n} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Conclusion

$$J_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie 2 - Des polynômes orthogonaux

8. On vérifie successivement que l'application, notée φ , est bien définie, symétrique, bilinéaire, positive et définie.

Bonne définition : pour $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, la fonction $t \mapsto P(t)Q(t)$ est polynomiale donc continue sur le segment $[-1, 1]$, et $\varphi(P, Q)$ est un réel.

Symétrie : $P(t)Q(t) = Q(t)P(t)$, donc $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.

Bilinéarité : pour $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la linéarité de l'intégrale donne $\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) = \lambda \varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)$. Avec la symétrie, φ est aussi linéaire par rapport à la seconde variable.

Positivité : $\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 P(t)^2 dt \geq 0$ par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant.

Caractère défini : si $\varphi(P, P) = 0$, la fonction $t \mapsto P(t)^2$ est continue, positive sur $[-1, 1]$ et d'intégrale nulle, donc elle est nulle sur $[-1, 1]$. Le polynôme P admet alors une infinité de racines (tous les points de $[-1, 1]$), donc P est le polynôme nul.

Conclusion

$$(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[x].$$

9. On calcule un produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathcal{B}_n$ (on a $n \geq 2$, donc e_0 et e_2 sont dans $\mathcal{B}_n$) :

$$\langle e_0, e_2 \rangle = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Plus généralement, pour $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\langle e_i, e_j \rangle = \int_{-1}^1 t^{i+j} dt$ vaut 0 si $i+j$ est impair (fonction impaire sur un intervalle symétrique) et $\frac{2}{i+j+1}$ si $i+j$ est pair.

Conclusion

non, les polynômes de $\mathcal{B}_n$ ne sont pas deux à deux orthogonaux (par exemple e_0 et e_2 ne le sont pas).

10. On montre la linéarité de u , puis que $u(P) \in \mathbb{R}_n[x]$ pour $P \in \mathbb{R}_n[x]$.

Linéarité : soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la dérivation, $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$, donc $(1 - x^2)(\lambda P + Q)'(x) = \lambda(1 - x^2)P'(x) + (1 - x^2)Q'(x)$, et en dérivant à nouveau, $u(\lambda P + Q) = \lambda u(P) + u(Q)$.

Stabilité : si $P \in \mathbb{R}_n[x]$, alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ (avec la convention $P' = 0$ si P est constant), donc $(1 - x^2)P'$ est un polynôme de degré au plus $n + 1$, et sa dérivée $u(P)$ est un polynôme de degré au plus n .

Conclusion

u est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

11. a. On calcule directement.

$e'_0 = 0$, donc $(1 - x^2)e'_0(x) = 0$ et $u(e_0) = 0$.

$e'_1(x) = 1$, donc $(1 - x^2)e'_1(x) = 1 - x^2$, dont la dérivée est $-2x$. Ainsi $u(e_1) = -2e_1$.

Conclusion

$u(e_0) = 0$ et $u(e_1) = -2e_1$.

b. Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. On a $e'_k(x) = kx^{k-1}$, donc

$$(1 - x^2)e'_k(x) = kx^{k-1} - kx^{k+1}.$$

En dérivant : $u(e_k)(x) = k(k-1)x^{k-2} - k(k+1)x^k$.

Conclusion

$$u(e_k) = -k(k+1)e_k + k(k-1)e_{k-2}.$$

- c. On lit la matrice de u dans $\mathcal{B}_n$, qui est triangulaire, puis on dénombre les valeurs propres.

D'après a. et b., pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u(e_k)$ est combinaison linéaire de e_k et (si $k \geq 2$) de e_{k-2} , avec un coefficient $-k(k+1)$ devant e_k (ce qui est cohérent avec $u(e_0) = 0 = -0 \times 1 e_0$ et $u(e_1) = -1 \times 2 e_1$). La matrice A de u dans la base $\mathcal{B}_n$ est donc triangulaire supérieure, de coefficients diagonaux $0, -2, -6, \dots, -n(n+1)$, c'est-à-dire $-k(k+1)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, et u a les mêmes valeurs propres que sa matrice. Donc :

$$\text{Sp}(u) = \{-k(k+1) ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

La suite $(k(k+1))_{k \geq 0}$ est strictement croissante, donc ces $n+1$ valeurs propres sont deux à deux distinctes. Chaque sous-espace propre est de dimension au moins 1, et la somme des sous-espaces propres est directe et contenue dans $\mathbb{R}_n[x]$, de dimension $n+1$. La somme des $n+1$ dimensions est donc au plus $n+1$: chacune vaut exactement 1.

Conclusion

le spectre de u est $\{-k(k+1) ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$, formé de $n+1$ valeurs distinctes, et chaque sous-espace propre est une droite vectorielle. En particulier u est diagonalisable.

12. On montre d'abord, par intégration par parties, que u est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[x]$ (muni de la restriction du produit scalaire de la question 8).

Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[x]$. On pose $a(t) = (1-t^2)P'(t)$ et $b(t) = Q(t)$, de classe C^1 sur $[-1, 1]$. L'intégration par parties sur $[-1, 1]$ donne :

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 a'(t)Q(t) dt = \left[(1-t^2)P'(t)Q(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt.$$

Le crochet est nul car $1-t^2$ s'annule en ± 1 . Ainsi

$$\langle u(P), Q \rangle = - \int_{-1}^1 (1-t^2)P'(t)Q'(t) dt,$$

expression symétrique en P et Q . Donc $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$: u est un endomorphisme symétrique.

Méthode 1 — Théorème spectral

L'espace $\mathbb{R}_n[x]$ est euclidien ; il possède une base orthonormale $\mathcal{C} = (\gamma_0, \dots, \gamma_n)$. Comme u est symétrique, sa matrice A' dans la base orthonormale $\mathcal{C}$ est symétrique réelle. Par le théorème spectral (admis au programme), il existe une matrice orthogonale Π (c'est-à-dire ${}^t\Pi\Pi = I_{n+1}$) et une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_0, \dots, d_n)$ telles que $A' = \Pi D {}^t\Pi$, soit $A'\Pi = \Pi D$.

Soit η_j le vecteur dont la colonne des coordonnées dans $\mathcal{C}$ est la j -ième colonne de Π . Comme $\mathcal{C}$ est orthonormale, $\langle \eta_i, \eta_j \rangle$ est le produit scalaire canonique des colonnes correspondantes, c'est-à-dire le coefficient $({}^t\Pi\Pi)_{i,j}$, qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. La famille $(\eta_0, \dots, \eta_n)$ est donc orthonormale, de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$: c'est une base orthonormale. L'égalité $A'\Pi = \Pi D$ lue colonne par colonne donne $u(\eta_j) = d_j \eta_j$ avec $\eta_j \neq 0$.

Méthode 2 — Valeurs propres distinctes et orthogonalité des espaces propres

D'après 11.c, u possède $n+1$ valeurs propres distinctes $\lambda_k = -k(k+1)$. Pour chaque k , on choisit un vecteur propre $V_k \neq 0$ associé à λ_k . Des vecteurs propres associés à des

valeurs propres distinctes forment une famille libre ; la famille $(V_0, \dots, V_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}_n[x]$ (cardinal $n + 1$). Comme u est symétrique, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux, donc $\langle V_i, V_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$. La famille $\left(\frac{V_k}{\|V_k\|} \right)_{0 \leq k \leq n}$ est alors une base orthonormale de vecteurs propres.

La méthode 1 s'applique à tout endomorphisme symétrique ; la méthode 2 est plus élémentaire mais exploite le fait particulier, établi en 11.c, que toutes les valeurs propres sont distinctes.

Seconde partie de la question. Soit $(\eta_0, \dots, \eta_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de u . Chaque η_j est un polynôme non nul ; on note $a_j \neq 0$ son coefficient de plus haut degré et on pose $L'_j = \frac{1}{a_j} \eta_j$. Alors :

- L'_j est non nul et appartient au même sous-espace propre que η_j (un sous-espace propre est un sous-espace vectoriel), donc c'est un vecteur propre de u ;
- pour $i \neq j$, $\langle L'_i, L'_j \rangle = \frac{1}{a_i a_j} \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0$;
- le coefficient de plus haut degré de L'_j vaut 1.

La famille $(L'_0, \dots, L'_n)$ est orthogonale et formée de vecteurs non nuls, donc libre ; ayant $n + 1$ éléments, c'est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.

Conclusion

il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de u , et une base orthogonale $\mathcal{L}_n$ de vecteurs propres de u unitaires (coefficient dominant égal à 1).

Remarque sur le résultat admis par l'énoncé. Il peut se justifier ainsi : si P est un vecteur propre de degré d et de coefficient dominant a_d , associé à λ , les questions 11.a et 11.b montrent que le coefficient de x^d dans $u(P)$ est $-d(d + 1)a_d$, d'où $\lambda = -d(d + 1)$. Les $n + 1$ valeurs propres étant distinctes, les $n + 1$ vecteurs de $\mathcal{L}_n$ ont des degrés distincts, donc les degrés $0, 1, \dots, n$. En les rangeant par degré croissant, L_k est de degré k et associé à $-k(k + 1)$, et $(L_0, \dots, L_k)$ est une famille orthogonale de $k + 1$ vecteurs non nuls

de $\mathbb{R}_k[x]$, donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_k[x]$. Dans la suite, on utilise cet ordre : L_k est de degré k et $u(L_k) = -k(k+1)L_k$.

13. a. On munit $E = \mathbb{R}_m[x]$ de la restriction du produit scalaire ; c'est un espace euclidien et $F = \mathbb{R}_n[x]$ en est un sous-espace vectoriel (car $n < m$), dont $(L_0, \dots, L_n)$ est une base orthogonale.

Méthode 1 — Résultats du cours sur la projection orthogonale

Soit p la projection orthogonale de E sur F . D'après le cours (caractérisation de la projection orthogonale par minimisation de la distance), pour tout $g \in F$, $\|f - g\| \geq \|f - p(f)\|$, avec égalité si et seulement si $g = p(f)$. Donc le minimum existe et est atteint en un unique polynôme $T_n = p(f)$. L'expression du projeté dans une base orthonormale, appliquée à la base orthonormale $\left(\frac{L_k}{\|L_k\|}\right)_k$ de F , donne

$$T_n = \sum_{k=0}^n \left\langle f, \frac{L_k}{\|L_k\|} \right\rangle \frac{L_k}{\|L_k\|} = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2} L_k.$$

Méthode 2 — Démonstration directe par Pythagore

Les L_k sont non nuls, donc $\|L_k\| \neq 0$. On pose, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2}$ et

$$T = \sum_{k=0}^n c_k L_k \in F.$$

Pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par bilinéarité et orthogonalité de la famille (L_k) :

$$\langle f - T, L_j \rangle = \langle f, L_j \rangle - \sum_{k=0}^n c_k \langle L_k, L_j \rangle = \langle f, L_j \rangle - c_j \|L_j\|^2 = 0.$$

Donc $f - T$ est orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F , donc à tout F . Soit $g \in F$. On écrit $f - g = (f - T) + (T - g)$ avec $T - g \in F$, orthogonal à $f - T$. Par le théorème de Pythagore :

$$\|f - g\|^2 = \|f - T\|^2 + \|T - g\|^2 \geq \|f - T\|^2,$$

avec égalité si et seulement si $\|T - g\| = 0$, c'est-à-dire $g = T$. Le minimum de $\|f - g\|$ sur F existe donc, il vaut $\|f - T\|$ et il est atteint en l'unique polynôme $T_n = T$.

La méthode 1 mobilise directement le cours ; la méthode 2 en redémontre le contenu dans ce cas particulier et montre pourquoi l'orthogonalité de $f - T_n$ à F est la propriété clé.

Conclusion

il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}_n[x]$ réalisant $\|f - T_n\| = \min_{g \in \mathbb{R}_n[x]} \|f - g\|$, et

$$T_n = \sum_{k=0}^n c_k L_k$$

avec, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$c_k = \frac{\langle f, L_k \rangle}{\|L_k\|^2} = \frac{1}{\|L_k\|^2} \int_{-1}^1 f(t) L_k(t) dt.$$

b. On applique deux fois le théorème de Pythagore.

On a $f = T_n + (f - T_n)$ avec $T_n \in F$ et $f - T_n$ orthogonal à F (question a.). Donc $\|f\|^2 = \|T_n\|^2 + \|f - T_n\|^2$.

La famille $(c_0 L_0, \dots, c_n L_n)$ est orthogonale, donc, par Pythagore pour une famille orthogonale finie :

$$\|T_n\|^2 = \sum_{k=0}^n \|c_k L_k\|^2 = \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2.$$

Conclusion

$$\|f - T_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \|L_k\|^2.$$

14. a. On développe P_k par la formule du binôme, puis on dérive k fois.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme :

$$P_k(x) = (x^2 - 1)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} x^{2j}.$$

P_k est donc de degré $2k$, de coefficient dominant 1 (terme $j = k$). La dérivée k -ième de x^{2j} est nulle si $2j < k$ et vaut $\frac{(2j)!}{(2j-k)!} x^{2j-k}$ si $2j \geq k$; elle est de degré au plus $2j - k \leq k$, avec égalité seulement pour $j = k$. Le terme de plus haut degré de Q_k provient donc uniquement de x^{2k} :

$$(x^{2k})^{(k)} = \frac{(2k)!}{k!} x^k.$$

Conclusion

Q_k est de degré k et son coefficient dominant vaut $\frac{(2k)!}{k!}$.

b. On calcule :

$Q_0 = P_0 = 1$; $P_1(x) = x^2 - 1$, donc $Q_1(x) = 2x$; $P_2(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, donc $P_2'(x) = 4x^3 - 4x$ et $Q_2(x) = 12x^2 - 4$.

Conclusion

$Q_0 = 1, Q_1 = 2e_1, Q_2 = 12e_2 - 4e_0$ (coefficients dominants 1, 2, 12, conformes à $\frac{(2k)!}{k!}$).

c. i. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

Si $k = 0$, $P_0 = 1$ donc $P'_0 = 0$ et les deux membres sont nuls.

Si $k \geq 1$, $P'_k(x) = k \cdot 2x(x^2 - 1)^{k-1}$, donc

$$P_1(x)P'_k(x) = (x^2 - 1) \cdot 2kx(x^2 - 1)^{k-1} = 2kx(x^2 - 1)^k = 2ke_1(x)P_k(x).$$

Conclusion

pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $P_1(x)P'_k(x) = 2ke_1(x)P_k(x)$.

ii. On dérive $k + 1$ fois les deux membres de la relation de i. à l'aide de la formule de Leibniz, en utilisant que $P_1^{(j)} = 0$ pour $j \geq 3$ et $e_1^{(j)} = 0$ pour $j \geq 2$. On note $Q = Q_k = P_k^{(k)}$, de sorte que $P_k^{(k+1)} = Q'$ et $P_k^{(k+2)} = Q''$.

Membre de gauche, avec $P_1(x) = x^2 - 1$, $P'_1(x) = 2x$, $P''_1(x) = 2$:

$$(P_1P'_k)^{(k+1)} = P_1P_k^{(k+2)} + \binom{k+1}{1}P'_1P_k^{(k+1)} + \binom{k+1}{2}P''_1P_k^{(k)},$$

soit, pour tout x : $(x^2 - 1)Q''(x) + 2(k+1)xQ'(x) + k(k+1)Q(x)$, car $\binom{k+1}{2} \times 2 = (k+1)k$.

Membre de droite :

$$2k(e_1P_k)^{(k+1)} = 2k(e_1P_k^{(k+1)} + (k+1)P_k^{(k)}),$$

soit $2kxQ'(x) + 2k(k+1)Q(x)$.

En égalant et en simplifiant :

$$(x^2 - 1)Q''(x) + 2xQ'(x) - k(k+1)Q(x) = 0,$$

puis, en multipliant par -1 :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1 - x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) + k(k+1)Q_k(x) = 0.$$

(Ces calculs sont valables aussi pour $k = 0$, où les coefficients binomiaux $\binom{1}{2}$ sont nuls.)

Vecteur propre : $k \leq n$, donc $Q_k \in \mathbb{R}_k[x] \subset \mathbb{R}_n[x]$. Par ailleurs, pour tout x ,

$$u(Q_k)(x) = ((1 - x^2)Q_k'(x))' = (1 - x^2)Q_k''(x) - 2xQ_k'(x) = -k(k+1)Q_k(x).$$

Enfin $Q_k \neq 0$ puisqu'il est de degré k (question a.).

Conclusion

Q_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $-k(k+1)$.

iii. On utilise que le sous-espace propre associé à $-k(k+1)$ est une droite (11.c), puis on compare les coefficients dominants.

Avec l'ordre retenu à la question 12, L_k est de degré k : en effet $L_k \in \mathbb{R}_k[x]$ et $L_k \notin \mathbb{R}_{k-1}[x] = \text{Vect}(L_0, \dots, L_{k-1})$ (pour $k \geq 1$), puisque $(L_0, \dots, L_k)$ est libre. Si $u(L_k) = \lambda L_k$, le coefficient de x^k dans $u(L_k)$ vaut $-k(k+1) \times 1$ d'après 11.a et 11.b, tandis que celui de λL_k vaut λ ; donc $\lambda = -k(k+1)$.

Ainsi L_k et Q_k sont deux vecteurs non nuls du sous-espace propre associé à $-k(k+1)$, qui est une droite : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $L_k = cQ_k$. En comparant les coefficients dominants, $1 = c \frac{(2k)!}{k!}$, d'où $c = \frac{k!}{(2k)!}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_k = \frac{k!}{(2k)!} Q_k.$$

d. On raisonne par récurrence sur k , l'hérédité reposant sur une intégration par parties.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{H}(k)$ la propriété : pour tous $f, g \in \mathbb{R}[x]$,

$$\int_{-1}^1 f^{(k)}(t)g(t) \, dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-1-j)}(t)g^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f(t)g^{(k)}(t) \, dt.$$

Initialisation : pour $k = 0$, la somme est vide et la formule se réduit à $\int_{-1}^1 fg = \int_{-1}^1 fg$.

Donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(k)$ soit vraie, et soient $f, g \in \mathbb{R}[x]$. On applique $\mathcal{H}(k)$ au couple (f', g) , en remarquant que $(f')^{(k)} = f^{(k+1)}$ et $(f')^{(k-1-j)} = f^{(k-j)}$:

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}g = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-j)}g^{(j)} \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 f'g^{(k)}.$$

Les fonctions polynomiales f et $g^{(k)}$ sont de classe C^1 sur $[-1, 1]$; une intégration par parties donne

$$\int_{-1}^1 f'g^{(k)} = \left[fg^{(k)} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 fg^{(k+1)}.$$

En reportant :

$$\int_{-1}^1 f^{(k+1)}g = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[f^{(k-j)}g^{(j)} \right]_{-1}^1 + (-1)^k \left[fg^{(k)} \right]_{-1}^1 + (-1)^{k+1} \int_{-1}^1 fg^{(k+1)}.$$

Le terme isolé est exactement le terme d'indice $j = k$ de la somme

$$\sum_{j=0}^k (-1)^j \left[f^{((k+1)-1-j)} g^{(j)} \right]_{-1}^1.$$

Donc $\mathcal{H}(k+1)$ est vraie.

Conclusion

par récurrence, la formule est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tous $f, g \in \mathbb{R}[x]$.

- e. i. D'après le développement de la question a., P_k est de degré $2k$ et de coefficient dominant 1. La dérivée $(2k)$ -ième annule tous les monômes de degré $< 2k$ et $(x^{2k})^{(2k)} = (2k)!$.

Conclusion

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(2k)}(x) = (2k)!$.

- ii. Récurrence finie sur $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

Initialisation : pour $\ell = 0$, $P_k^{(0)}(x) = (x^2 - 1)^k$; on prend $R_{k,0} = 1$, de degré $0 \leq 0$.

Hérédité : soit $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ tel qu'il existe $R_{k,\ell}$ de degré au plus ℓ avec $P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x)$. Comme $k - \ell \geq 1$, on peut dériver :

$$\begin{aligned} P_k^{(\ell+1)}(x) &= (k - \ell) 2x (x^2 - 1)^{k-\ell-1} R_{k,\ell}(x) + (x^2 - 1)^{k-\ell} R'_{k,\ell}(x) \\ &= (x^2 - 1)^{k-(\ell+1)} R_{k,\ell+1}(x), \end{aligned}$$

avec $R_{k,\ell+1}(x) = 2(k - \ell)x R_{k,\ell}(x) + (x^2 - 1) R'_{k,\ell}(x)$. Ce polynôme est de degré au plus $\max(1 + \ell, 2 + (\ell - 1)) = \ell + 1$.

Conclusion

pour tout $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$, il existe $R_{k,\ell}$ de degré au plus ℓ tel que $P_k^{(\ell)}(x) = (x^2 - 1)^{k-\ell} R_{k,\ell}(x)$ pour tout réel x .

iii. Annulation en ± 1 : pour $\ell \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, on a $k - \ell \geq 1$, donc $(x^2 - 1)^{k-\ell}$ s'annule en $x = \pm 1$, et par ii., $P_k^{(\ell)}(-1) = P_k^{(\ell)}(1) = 0$.

Calcul de $\|Q_k\|^2$. On applique la formule de la question d. avec $f = P_k$ et $g = Q_k$:

$$\|Q_k\|^2 = \int_{-1}^1 P_k^{(k)}(t) Q_k(t) dt = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \left[P_k^{(k-1-j)}(t) Q_k^{(j)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^k \int_{-1}^1 P_k(t) Q_k^{(k)}(t) dt.$$

Pour $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, l'indice $k-1-j$ est dans $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$, donc tous les crochets sont nuls. De plus $Q_k^{(k)} = P_k^{(2k)} = (2k)!$ par i. Ainsi, avec $(t^2 - 1)^k = (-1)^k (1 - t^2)^k$:

$$\|Q_k\|^2 = (-1)^k (2k)! \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^k dt = (2k)! \int_{-1}^1 (1 - t^2)^k dt = (2k)! J_k.$$

D'après la question 5 de la Partie 1, $J_k = \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{(2k+1)!}$, donc

$$\|Q_k\|^2 = \frac{(2k)! 2^{2k+1} (k!)^2}{(2k+1)(2k)!} = \frac{2^{2k+1} (k!)^2}{2k+1}.$$

Calcul de $\|L_k\|$. D'après 14.c.iii, $\|L_k\| = \frac{k!}{(2k)!} \|Q_k\|$, et $\|Q_k\| = 2^k k! \sqrt{\frac{2}{2k+1}}$. Donc

$$\|L_k\| = \frac{(k!)^2}{(2k)!} 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Conclusion

$$\|Q_k\|^2 = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{2k+1} \text{ et } \|L_k\| = 2^k \sqrt{\frac{2}{2k+1}} \binom{2k}{k}^{-1}.$$

Contrôle : pour $k = 1$, $\|Q_1\|^2 = \int_{-1}^1 4t^2 dt = \frac{8}{3}$, et la formule donne $\frac{2^3}{3} = \frac{8}{3}$.

Problème 2

Partie 1 - Loi de Cauchy

1. On vérifie que f est positive, continue, et d'intégrale convergente égale à 1.

f est continue et strictement positive sur $\mathbb{R}$. Pour $A < B$ réels :

$$\int_A^B f(x) dx = \frac{1}{\pi} (\arctan B - \arctan A).$$

Comme $\arctan B \rightarrow \frac{\pi}{2}$ quand $B \rightarrow +\infty$ et $\arctan A \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ quand $A \rightarrow -\infty$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut $\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$.

Conclusion

f est une densité de probabilité.

2. On étudie la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$.

Sur $[1, +\infty[$, $x \mapsto |x|f(x) = \frac{x}{\pi(1+x^2)}$ est continue et positive, et

$$\frac{x}{\pi(1+x^2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge ; par comparaison de fonctions positives équivalentes, $\int_1^{+\infty} |x|f(x) dx$ diverge. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ n'est pas absolument convergente : X n'admet pas d'espérance.

Variance : une variable aléatoire admet une variance seulement si elle admet un moment d'ordre 2, ce qui entraîne l'existence de l'espérance. Comme X n'admet pas d'espérance, elle n'admet pas de variance. (On peut aussi constater directement que

$$x^2 f(x) \rightarrow \frac{1}{\pi} \neq 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty, \text{ donc } \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx \text{ diverge.})$$

Conclusion

X n'admet ni espérance, ni variance.

3. Expression de F : pour $x \in \mathbb{R}$, par le calcul de la question 1,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

Bijection : F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $F' = f > 0$, donc strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. On a $\lim_{-\infty} F = 0$ et $\lim_{+\infty} F = 1$. Par le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$.

Réciproque : soit $y \in]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$F(x) = y \iff \arctan x = \pi \left(y - \frac{1}{2} \right).$$

Comme $\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et que $\arctan$ est la bijection réciproque de la restriction de $\tan$ à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$, cela équivaut à $x = \tan \left(\pi \left(y - \frac{1}{2} \right) \right)$.

Conclusion

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x, F \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]0, 1[\text{ et, pour tout } y \in]0, 1[, \\ F^{-1}(y) = \tan\left(\pi y - \frac{\pi}{2}\right).$$

4. a. On calcule la fonction de répartition de Y , qui caractérise sa loi.

U prend ses valeurs dans $]0, 1[$, donc $Y = F^{-1}(U)$ est bien définie, à valeurs réelles. La fonction F^{-1} est strictement croissante (réciproque d'une bijection strictement croissante). Pour $y \in \mathbb{R}$, comme F et F^{-1} sont strictement croissantes et réciproques l'une de l'autre :

$$[Y \leq y] = [F^{-1}(U) \leq y] = [U \leq F(y)].$$

Or $F(y) \in]0, 1[$ et U suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, donc $P(U \leq F(y)) = F(y)$.

Ainsi $F_Y = F$; la fonction de répartition caractérisant la loi :

Conclusion

$Y = F^{-1}(U)$ suit la loi de Cauchy, comme X .

b. On simule U par `rd.random()`, puis on renvoie $F^{-1}(U) = \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$. La tangente est écrite comme quotient du sinus par le cosinus, avec les commandes usuelles `np.sin` et `np.cos`.

Python

```
def cauchy() :
    u = rd.random()
    return np.sin(np.pi*(u-0.5))/np.cos(np.pi*(u-0.5))
```

La commande `rd.random()` renvoie une réalisation d'une variable de loi uniforme sur $[0, 1[$; la valeur 0, pour laquelle le cosinus s'annulerait en arithmétique exacte, n'est

obtenue qu'avec une probabilité négligeable. On pourrait aussi écrire `np.tan(np.pi*(u-0.5))`, `np.tan` étant la fonction tangente de numpy.

Code exécuté : sur 100 000 simulations, la proportion de valeurs inférieures ou égales à 1 vaut environ 0,749, proche de $F(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 0,75$. Cette observation numérique n'est pas une preuve ; la justification est la question a.

5. On détermine la fonction de répartition G de Z , puis on vérifie qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un point.

Soit $z \in \mathbb{R}$.

Si $z < 0$, l'évènement $[Z \leq z]$ est impossible car $Z \geq 0$, donc $G(z) = 0$.

Si $z \geq 0$, comme $u \mapsto u^2$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$:

$$[Z \leq z] = [|X| \leq z^2] = [-z^2 \leq X \leq z^2],$$

donc, X étant à densité ($P(X = -z^2) = 0$) :

$$G(z) = F(z^2) - F(-z^2) = \frac{1}{\pi} (\arctan(z^2) - \arctan(-z^2)) = \frac{2}{\pi} \arctan(z^2),$$

par imparité de $\arctan$.

La fonction G est continue sur $] -\infty, 0[$ et sur $[0, +\infty[$, et $\frac{2}{\pi} \arctan(0) = 0$, donc G est continue en 0, donc sur $\mathbb{R}$. Elle est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$ (fonction nulle) et sur $]0, +\infty[$, avec, pour $z > 0$,

$$G'(z) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2z}{1+z^4} = \frac{4z}{\pi(1+z^4)}.$$

Une fonction de répartition continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points est celle d'une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant là où c'est possible et en choisissant une valeur arbitraire positive ailleurs.

Conclusion

Z est une variable à densité, de densité

$$f_Z(z) = \frac{4z}{\pi(1+z^4)} \text{ si } z > 0, \quad f_Z(z) = 0 \text{ si } z \leq 0.$$

6. Espérance : sur $]0, +\infty[$, $z \mapsto zf_Z(z) = \frac{4z^2}{\pi(1+z^4)}$ est continue, positive, se prolonge par continuité en 0 (par la valeur 0), et

$$\frac{4z^2}{\pi(1+z^4)} \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\pi z^2}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dz}{z^2}$ converge ; par comparaison de fonctions positives, $\int_0^{+\infty} zf_Z(z) dz$ converge, absolument puisque l'intégrande est positive. Comme f_Z est nulle sur $] -\infty, 0]$, Z admet une espérance.

Absence de variance : on montre que Z n'admet pas de moment d'ordre 2.

Méthode 1 — Calcul direct par le théorème de transfert

Par le théorème de transfert, Z^2 admet une espérance si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} z^2 f_Z(z) dz \text{ converge absolument. Or, sur } [1, +\infty[, \quad z^2 f_Z(z) = \frac{4z^3}{\pi(1+z^4)} \geq 0 \text{ et}$$

$$\frac{4z^3}{\pi(1+z^4)} \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4}{\pi z},$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{dz}{z}$ diverge, donc cette intégrale diverge.

Méthode 2 — Retour à la variable X

On a $Z^2 = |X|$. Par le théorème de transfert appliqué à X et à la fonction continue $x \mapsto |x|$, $|X|$ admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|f(x) dx$ converge, ce qui est faux d'après la question 2. Donc Z^2 n'admet pas d'espérance.

La méthode 1 n'utilise que la densité trouvée en 5 ; la méthode 2, plus rapide, réutilise la question 2 en remarquant que Z^2 s'exprime simplement en fonction de X .

Conclusion

Z admet une espérance, mais pas de moment d'ordre 2, donc pas de variance.

7. a. On remarque que $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = x^4 + 1$ et que ces deux trinômes sont strictement positifs sur $\mathbb{R}$ (discriminant $2 - 4 < 0$).

Pour $x \geq 0$, l'égalité demandée équivaut, après multiplication par $x^4 + 1 > 0$, à

$$x^2 = \alpha x(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \beta x(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = (\alpha + \beta)x^3 + \sqrt{2}(\alpha - \beta)x^2 + (\alpha + \beta)x.$$

Il suffit (et il faut, par identification de deux polynômes égaux sur $[0, +\infty[$, qui a une infinité de points) que $\alpha + \beta = 0$ et $\sqrt{2}(\alpha - \beta) = 1$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $\beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Conclusion

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ et } \beta = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

- b. On note, pour $x \in \mathbb{R}$, $p(x) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$ et $q(x) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$.

Convergence : $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ sont continues et strictement positives sur $[0, +\infty[$ (question a.),
et $\frac{1}{p(x)} \sim \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{q(x)} \sim \frac{1}{x^2}$ quand $x \rightarrow +\infty$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge ; par
comparaison de fonctions positives, les deux intégrales convergent.

Calcul : on met q sous forme canonique :

$$q(x) = \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.$$

On pose $v = \sqrt{2}x + 1$, changement de variable affine, de sorte que $x = \frac{v-1}{\sqrt{2}}$,

$$dx = \frac{dv}{\sqrt{2}} \text{ et}$$

$$q(x) = \frac{(v-1)^2}{2} + (v-1) + 1 = \frac{v^2+1}{2}.$$

Pour $A > 0$, sur le segment $[0, A]$:

$$\int_0^A \frac{dx}{q(x)} = \int_1^{\sqrt{2}A+1} \frac{2}{v^2+1} \cdot \frac{dv}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left(\arctan(\sqrt{2}A+1) - \frac{\pi}{4} \right).$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, $\arctan(\sqrt{2}A+1) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Conclusion

les deux intégrales convergent et $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

Remarque sur le résultat admis par l'énoncé : le même calcul avec $v = \sqrt{2}x - 1$ donne $p(x) = \frac{v^2 + 1}{2}$ et

$$\int_0^A \frac{dx}{p(x)} = \sqrt{2} \left(\arctan(\sqrt{2}A - 1) + \frac{\pi}{4} \right) \rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}},$$

ce qui confirme la valeur admise.

- c. Les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha x}{p(x)} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\beta x}{q(x)} dx$ divergent séparément (intégrandes équivalentes à $\frac{\alpha}{x}$ et $\frac{\beta}{x}$); on travaille donc sur un segment $[0, A]$, on regroupe les termes logarithmiques, puis on fait tendre A vers $+\infty$.

D'après la question 6, $E(Z)$ existe et, par définition,

$$E(Z) = \int_0^{+\infty} \frac{4x^2}{\pi(1+x^4)} dx = \frac{4}{\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x^2}{p(x)q(x)} dx.$$

Avec $\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $\frac{\beta}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8}$, $p'(x) = 2x - \sqrt{2}$ et $q'(x) = 2x + \sqrt{2}$, l'égalité fournie par l'énoncé (combinée à la question a.) s'écrit, pour $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{p(x)q(x)} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{q'(x)}{q(x)} \right) + \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \sqrt{2} \left(\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} \right) = \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{p'(x)}{p(x)} - \frac{q'(x)}{q(x)} \right) \\ &+ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} \right). \end{aligned}$$

Comme p et q sont strictement positives, $x \mapsto \ln p(x) - \ln q(x) = \ln \frac{p(x)}{q(x)}$ est une primitive de $\frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}$. Pour $A > 0$:

$$\int_0^A \frac{x^2}{p(x)q(x)} dx = \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{p(A)}{q(A)} - \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{p(0)}{q(0)} + \frac{1}{4} \int_0^A \left(\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} \right) dx.$$

On a $p(0) = q(0) = 1$, et $\frac{p(A)}{q(A)} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$ (quotient de deux trinômes de même coefficient dominant), donc, par continuité de $\ln$ en 1, $\ln \frac{p(A)}{q(A)} \rightarrow 0$. Par la question b. et le résultat admis :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{x^2}{p(x)q(x)} dx = \frac{1}{4} \left(\frac{3\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Donc $E(Z) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$

Conclusion

$$E(Z) = \sqrt{2}.$$

8. On décrit ce que calcule la fonction mystere, on lit le tableau, puis on discute la conjecture.

Interprétation du programme. Lors d'un appel `mystere(eps, n)`, pour chacune des 1000 répétitions indexées par k :

- le tableau `ech` reçoit n simulations indépendantes de $\sqrt{|X|}$, c'est-à-dire de Z ;
- `np.sum(ech)/n` est la moyenne empirique $\bar{z}_n$ de cet échantillon;
- `L[k]` vaut 1 si $|\bar{z}_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon$ et 0 sinon.

La valeur renvoyée `np.sum(L)/1000` est la fréquence, sur 1000 répétitions, de

l'évènement $\left[|\bar{Z}_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon \right]$, où

$$\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$$

et $Z_1, \dots, Z_n$ sont indépendantes de même loi que Z . C'est une approximation de $P(|\bar{Z}_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon)$.

Le programme principal remplit la matrice M de taille 4×7 : la ligne i correspond à $\varepsilon \in \{1; 0,5; 0,1; 0,05\}$ et la colonne j à $n \in \{100; 500; 1000; 1500; 3000; 5000; 50000\}$.

Lecture de l'affichage. Sur chaque ligne, les fréquences croissent avec n et se rapprochent de 1 : pour $\varepsilon = 1$ et $\varepsilon = 0,5$, elles sont pratiquement égales à 1 dès $n = 500$; pour $\varepsilon = 0,1$, elles passent de 0,411 à 0,997 ; pour $\varepsilon = 0,05$, de 0,21 à 0,992. La convergence est d'autant plus lente que ε est petit.

Conjecture. Pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{Z}_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon) = 1$, c'est-à-dire que $\bar{Z}_n$ converge en probabilité vers $\sqrt{2} = E(Z)$ (question 7).

Résultat du cours que l'on serait tenté d'utiliser : la loi faible des grands nombres. Dans le programme, elle s'énonce ainsi : si $(Z_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance, alors $\bar{Z}_n$ converge en probabilité vers m . Sa démonstration repose sur l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\bar{Z}_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(Z_1)}{n\varepsilon^2},$$

qui exige que Z_1 admette une variance.

Pourquoi on ne peut pas l'appliquer : d'après la question 6, Z admet une espérance ($\sqrt{2}$) mais pas de variance. L'hypothèse de variance de la loi faible des grands nombres du cours n'est donc pas satisfaite, et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev n'a pas de sens ici.

Conclusion

l’affichage suggère que $\bar{Z}_n$ converge en probabilité vers $\sqrt{2}$, mais la loi faible des grands nombres du programme ne permet pas de le démontrer, car Z n’a pas de variance. Une simulation ne constitue pas une preuve ; la Partie 2 établit ce résultat.

Code exécuté partiellement (avec la fonction cauchy de la question 4.b) : `mystere(0.1, 100)` a renvoyé 0,415 et `mystere(0.1, 1000)` a renvoyé 0,855, valeurs proches des coefficients 0,411 et 0,846 de l’affichage ; ces valeurs varient d’une exécution à l’autre.

Partie 2 - Variables indicatrices et une extension de théorème

9. $\mathbb{1}_A$ ne prend que les valeurs 0 et 1, avec $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ et $P(\mathbb{1}_A = 0) = 1 - P(A)$.

Conclusion

$\mathbb{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$; $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$ et $V(\mathbb{1}_A) = P(A)(1 - P(A))$.

10. a. Soit $\omega \in \Omega$. On distingue deux cas.

Si $X(\omega) > s$, alors $\omega \in [X > s]$, donc $\mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = 1$, et $X(\omega) \in]s, +\infty[$, donc $\chi_{]s, +\infty[}(X(\omega)) = 1$.

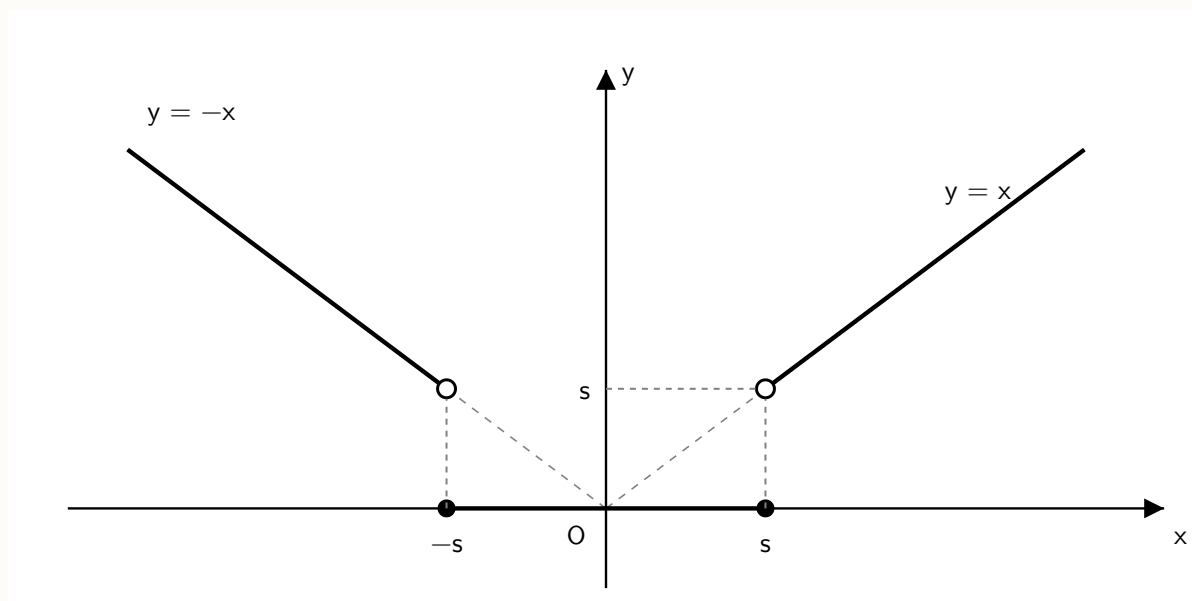
Si $X(\omega) \leq s$, les deux quantités valent 0 pour les mêmes raisons.

Conclusion

pour tout $\omega \in \Omega$, $\mathbb{1}_{[X > s]}(\omega) = \chi_{]s, +\infty[}(X(\omega))$.

b. Pour $x \in \mathbb{R}$: si $|x| > s$, $\varphi_s(x) = |x|$; si $|x| \leq s$, $\varphi_s(x) = 0$. La fonction φ_s est paire, nulle sur $[-s, s]$ et égale à $|x|$ en dehors. En $x = \pm s$, elle vaut 0, alors que sa limite à droite en s (et à gauche en $-s$) vaut $s > 0$.

Courbe représentative (tracée pour une valeur quelconque de $s > 0$; les points noirs sont sur la courbe, les points blancs n’y sont pas) :



Les droites en pointillés gris sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$, sur lesquelles se trouvent les deux branches non nulles.

Conclusion

les points de discontinuité de φ_s sont $-s$ et s .

On suppose désormais que X admet une espérance nulle, sans supposer l'existence d'une variance. Les X_k ont la même loi que X , donc admettent g pour densité.

- 11.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, exactement un des deux événements $[|X_k| \leq M]$ et $[|X_k| > M]$ est réalisé, donc $\mathbb{1}_{[|X_k| \leq M]} + \mathbb{1}_{[|X_k| > M]} = 1$. En multipliant par X_k :

Conclusion

$$X_k = Y_k + Z_k.$$

- 12.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On montre que Y_k^2 admet une espérance majorée par M^2 .

Méthode 1 — Domination

Pour tout ω , si $|X_k(\omega)| \leq M$, alors $|Y_k(\omega)| = |X_k(\omega)| \leq M$; sinon $Y_k(\omega) = 0$. Donc $0 \leq Y_k^2 \leq M^2$. La variable certaine égale à M^2 admet une espérance; par domination, Y_k^2 admet une espérance, et par croissance de l'espérance, $E(Y_k^2) \leq M^2$.

Méthode 2 — Théorème de transfert

On a $Y_k^2 = h(X_k)$ avec $h(x) = x^2 \chi_{[-M, M]}(x)$, fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $\pm M$, et vérifiant $0 \leq h \leq M^2$. Comme $0 \leq h(x)g(x) \leq M^2 g(x)$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} g$ converge, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)g(x) dx$ converge absolument. Par le théorème de transfert, Y_k^2 admet une espérance et

$$E(Y_k^2) = \int_{-M}^M x^2 g(x) dx \leq M^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = M^2.$$

La méthode 1 ne demande aucun calcul et vaut pour toute variable bornée; la méthode 2 fournit en plus une expression intégrale de $E(Y_k^2)$, qui montre qu'elle ne dépend pas de k .

Conclusion

Y_k admet un moment d'ordre 2 et $E(Y_k^2) \leq M^2$.

13. a. On exprime $|Z_k|$ comme $\varphi_M(X_k)$, puis on applique le théorème de transfert.

D'après la question 10.a, appliquée à la variable $|X_k|$ et au réel M :

$\mathbb{1}_{[|X_k| > M]} = \chi_{]M, +\infty[}(|X_k|)$. Donc

$$|Z_k| = |X_k| \chi_{]M, +\infty[}(|X_k|) = \varphi_M(X_k).$$

D'après la question 10.b, φ_M est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en $-M$ et M . De plus

$0 \leq \varphi_M(x) \leq |x|$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|g(x) \, dx$ converge puisque X_k admet une espérance. Donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x) \, dx$ converge absolument, et le théorème de transfert donne :

$$E(|Z_k|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{-M} |x|g(x) \, dx + \int_M^{+\infty} |x|g(x) \, dx.$$

Comme $\int_0^{+\infty} |x|g(x) \, dx$ converge, son reste

$\int_M^{+\infty} |x|g(x) \, dx = \int_0^{+\infty} |x|g(x) \, dx - \int_0^M |x|g(x) \, dx$ tend vers 0 quand $M \rightarrow +\infty$. De

même, $\int_{-\infty}^{-M} |x|g(x) \, dx \rightarrow 0$.

Conclusion

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(|Z_k|) = 0.$$

- b.** D'après a., $|Z_k|$ admet une espérance, donc Z_k aussi (existence par convergence absolue). On a $-|Z_k| \leq Z_k \leq |Z_k|$, donc par croissance de l'espérance $|E(Z_k)| \leq E(|Z_k|)$. Par encadrement et a. :

Conclusion

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Z_k) = 0.$$

- c.** D'après 11, $Y_k = X_k - Z_k$; X_k et Z_k admettent une espérance, donc par linéarité Y_k aussi et $E(Y_k) = E(X_k) - E(Z_k)$. Par b., quand $M \rightarrow +\infty$:

Conclusion

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} E(Y_k) = E(X_k) = 0.$$

14. On raisonne par contraposée.

Supposons $|x| \leq \frac{t}{2}$ et $|y| \leq \frac{t}{2}$. Par l'inégalité triangulaire, $|x + y| \leq |x| + |y| \leq t$. Donc $|x + y| \leq t$.

La contraposée de cette implication est exactement l'implication demandée.

Conclusion

$$|x + y| > t \implies \left(\left[|x| > \frac{t}{2} \right] \text{ ou } \left[|y| > \frac{t}{2} \right] \right).$$

15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après 11, en sommant et en divisant par n : $\bar{X}_n = \bar{Y}_n + \bar{Z}_n$.

Soit $\omega \in [|\bar{X}_n| > t]$. On applique la question 14 à $x = \bar{Y}_n(\omega)$ et $y = \bar{Z}_n(\omega)$:
 $\omega \in \left[|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2} \right] \cup \left[|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2} \right]$. Ainsi

$$[|\bar{X}_n| > t] \subset \left[|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2} \right] \cup \left[|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2} \right].$$

Par croissance de la probabilité et sous-additivité ($P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, conséquence de la formule du crible) :

Conclusion

$$P(|\bar{X}_n| > t) \leq P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) + P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right).$$

16. a. On applique l'inégalité de Markov à la variable positive $|\bar{Z}_n|$, après avoir justifié l'existence de son espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par l'inégalité triangulaire,

$$0 \leq |\bar{Z}_n| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |Z_k|.$$

Chaque $|Z_k|$ admet une espérance (13.a), donc, par linéarité, le majorant aussi ; par domination, $|\bar{Z}_n|$ admet une espérance et

$$E(|\bar{Z}_n|) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E(|Z_k|) = E(|Z_1|),$$

car $E(|Z_k|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_M(x)g(x) \, dx$ ne dépend pas de k (13.a).

Par l'inégalité de Markov, avec $\frac{t}{2} > 0$, et l'inclusion $\left[|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right] \subset \left[|\bar{Z}_n| \geq \frac{t}{2}\right]$:

$$P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq P\left(|\bar{Z}_n| \geq \frac{t}{2}\right) \leq \frac{E(|\bar{Z}_n|)}{t/2} \leq \frac{2}{t} E(|Z_1|).$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} E(|Z_1|).$

- b.** D'après 13.a (avec $k = 1$), $E(|Z_1|) \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow +\infty$. Par définition de la limite, appliquée au réel strictement positif $\frac{t\varepsilon}{6}$, il existe un réel $M_1 > 0$ tel que, pour tout $M \geq M_1$, $E(|Z_1|) \leq \frac{t\varepsilon}{6}$. Pour un tel M et tout $n \in \mathbb{N}^*$, la question a. donne

$$P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{2}{t} \cdot \frac{t\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Conclusion

il existe $M_1 > 0$ tel que, si $M \geq M_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(|\bar{Z}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

17. a. On développe le carré d'une somme puis on utilise la linéarité de l'espérance.

Pour $i, j \in \mathbb{N}^*$, $|Y_i Y_j| \leq M^2$ (car $|Y_i| \leq M$ et $|Y_j| \leq M$, cf. 12), donc $Y_i Y_j$ admet une espérance par domination. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\bar{Y}_n^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n Y_k \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n Y_k^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j \right).$$

C'est une combinaison linéaire finie de variables admettant une espérance ; par linéarité :

Conclusion

$$E(\bar{Y}_n^2) = \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n E(Y_k^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \right).$$

b. On utilise l'indépendance de Y_i et Y_j pour $i \neq j$.

On pose $h_1(x) = x \chi_{[-M, M]}(x)$, de sorte que $Y_k = h_1(X_k)$ pour tout k .

Indépendance : pour $i < j$, X_i et X_j sont indépendantes (les X_k sont mutuellement indépendantes), donc $Y_i = h_1(X_i)$ et $Y_j = h_1(X_j)$ sont indépendantes (lemme des coalitions, ou indépendance de fonctions de variables indépendantes).

Espérance du produit : Y_i et Y_j sont indépendantes et admettent une espérance (13.c), donc $E(Y_i Y_j) = E(Y_i)E(Y_j)$.

Même espérance : par le théorème de transfert (fonction h_1 continue sauf en $\pm M$, avec $|h_1(x)g(x)| \leq M g(x)$), $E(Y_k) = \int_{-M}^M x g(x) dx$ ne dépend pas de k , donc $E(Y_k) = E(Y_1)$ pour tout k .

Ainsi $E(Y_i Y_j) = E(Y_1)^2$ pour $1 \leq i < j \leq n$. Le nombre de couples (i, j) avec $1 \leq i < j \leq n$ est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (et 0 si $n = 1$). Donc

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} E(Y_1)^2 = n(n-1)E(Y_1)^2.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(Y_i Y_j) \leq n(n-1)E(Y_1)^2$$

(il y a en fait égalité).

c. D'après 12,

$$\sum_{k=1}^n E(Y_k^2) \leq nM^2.$$

En reportant ceci et b. dans a. :

$$E(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{1}{n^2} (nM^2 + n(n-1)E(Y_1)^2) = \frac{M^2}{n} + \frac{n-1}{n} E(Y_1)^2 \leq \frac{M^2}{n} + E(Y_1)^2,$$

car $0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$ et $E(Y_1)^2 \geq 0$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{M^2}{n} + E(Y_1)^2$.

- d. D'après 13.c, $E(Y_1) \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow +\infty$, donc, par continuité de $u \mapsto u^2$, $E(Y_1)^2 \rightarrow 0$. Par définition de la limite, appliquée au réel strictement positif $\frac{t^2\varepsilon}{12}$, il existe $M_2 > 0$ tel que, pour tout $M \geq M_2$, $E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2\varepsilon}{12}$.

Conclusion

il existe $M_2 > 0$ tel que, si $M \geq M_2$, $E(Y_1)^2 \leq \frac{t^2\varepsilon}{12}$.

- e. On applique l'inégalité de Markov à la variable positive $\bar{Y}_n^2$, qui admet une espérance (17.a).

Soit $M \geq M_2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $t > 0$, $\left[|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right] = \left[\bar{Y}_n^2 > \frac{t^2}{4}\right] \subset \left[\bar{Y}_n^2 \geq \frac{t^2}{4}\right]$. Par l'inégalité de Markov, puis c. et d. :

$$P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{4}{t^2} E(\bar{Y}_n^2) \leq \frac{4}{t^2} \left(\frac{M^2}{n} + \frac{t^2\varepsilon}{12}\right) = \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Conclusion

si $M \geq M_2$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(|\bar{Y}_n| > \frac{t}{2}\right) \leq \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{\varepsilon}{3}$.

Remarque : on ne peut pas utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev directement sur $\bar{Y}_n$ autour de 0, car $\bar{Y}_n$ n'est pas centrée ($E(\bar{Y}_n) = E(Y_1)$ n'est pas nul en général); l'inégalité de Markov appliquée au carré contourne cette difficulté.

18. Soit $M \geq \max(M_1, M_2)$. Alors $M \geq M_1$ et $M \geq M_2$; on peut appliquer simultanément 16.b et 17.e. Avec la question 15, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{4M^2}{t^2n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

On observe que $\bar{X}_n$ ne dépend pas de M : seuls les majorants en dépendent.

Conclusion

$$\text{si } M \geq \max(M_1, M_2), \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{4M^2}{t^2 n} + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

19. On fixe M une fois pour toutes, puis on choisit n assez grand.

Le réel $t > 0$ étant fixé, soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; les questions 16 à 18 s'appliquent à ce ε .

On choisit $M = \max(M_1, M_2)$, qui ne dépend que de t et ε . On pose $N = \left\lfloor \frac{12M^2}{t^2\varepsilon} \right\rfloor + 1$.

Pour tout $n \geq N$, on a $n > \frac{12M^2}{t^2\varepsilon}$, donc $\frac{4M^2}{t^2 n} < \frac{\varepsilon}{3}$, et par 18 :

$$0 \leq P(|\bar{X}_n| > t) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $|P(|\bar{X}_n| > t) - 0| \leq \varepsilon$.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\bar{X}_n| > t) = 0.$$

20. Interprétation. Le réel $t > 0$ étant arbitraire, la question 19 montre que, pour tout $t > 0$, $P(|\bar{X}_n - 0| > t) \rightarrow 0$. Comme $P(|\bar{X}_n| \geq t) \leq P\left(|\bar{X}_n| > \frac{t}{2}\right)$, on a aussi $P(|\bar{X}_n| \geq t) \rightarrow 0$: la suite $(\bar{X}_n)$ converge en probabilité vers $0 = E(X)$.

Plus généralement, si $(W_k)_{k \geq 1}$ sont mutuellement indépendantes, de même loi à densité w , admettant une espérance m (sans variance supposée), on applique ce résultat aux variables $X_k = W_k - m$: elles sont mutuellement indépendantes (fonctions des W_k), de même loi, de densité $x \mapsto w(x + m)$ (transformation affine), et d'espérance nulle. On obtient que $\bar{W}_n$ converge en probabilité vers m .

Comparaison avec le cours : la loi faible des grands nombres du programme affirme que, si $(W_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, admettant une espérance m et une variance, alors $\bar{W}_n$ converge en probabilité vers m . La Partie 2 établit la même conclusion sans l'hypothèse d'existence d'une variance (dans le cas de variables à densité) : c'est une extension de la loi faible des grands

nombre. L'idée est de tronquer : Y_k est bornée, donc admet une variance, et l'on contrôle séparément la partie Z_k par l'inégalité de Markov.

Retour sur la question 8. Soient $X'_1, X'_2, \dots$ mutuellement indépendantes de loi de Cauchy et $Z_k = \sqrt{|X'_k|}$. Les Z_k sont mutuellement indépendantes (fonctions de variables mutuellement indépendantes), de même loi que Z , donc à densité f_Z (question 5), et admettent l'espérance $\sqrt{2}$ (questions 6 et 7), sans admettre de variance. Le résultat précédent s'applique : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|\bar{Z}_n - \sqrt{2}| \leq \varepsilon) = 1 - P(|\bar{Z}_n - \sqrt{2}| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

C'est exactement la conjecture issue de l'affichage de la question 8, qui est donc démontrée : chaque ligne de la matrice M approche des probabilités qui tendent vers 1 quand n tend vers $+\infty$. La lenteur observée pour $\varepsilon = 0,05$ ne contredit pas ce résultat ; l'absence de variance empêche simplement d'obtenir la majoration en $\frac{V(Z)}{n\varepsilon^2}$ fournie par Bienaymé-Tchebychev.

Conclusion

la Partie 2 démontre une loi faible des grands nombres sans hypothèse de variance, qui justifie le comportement observé à la question 8.

Relevé des adaptations

- Problème 1, question 7 : la formule de Stirling, admise dans l'énoncé original, est remplacée par le résultat particulier admis $\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$. Justification : la formule de Stirling ne doit pas être invoquée comme résultat connu, et cette conséquence particulière suffit pour établir $J_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$; l'objectif de la question est conservé.