



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2024

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie 1 : Racine(s) d'une matrice carrée

1. Il s'agit d'établir une relation de commutation à partir de $M^2 = A$. On exprime A en fonction de M .

Comme $A = M^2$, on a, par associativité du produit matriciel :

$$AM = M^2M = M^3 = MM^2 = MA.$$

Conclusion

si $M^2 = A$, alors $AM = MA$.

2. On montre les deux implications.

Méthode 1 — Par les inverses.

Si M est inversible, alors $A = M \cdot M$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles, d'inverse $(M^{-1})^2$.

Réciproquement, supposons A inversible. Alors $M(MA^{-1}) = M^2A^{-1} = AA^{-1} = I_n$.

Une matrice carrée qui admet un inverse à droite est inversible : M est donc inversible, d'inverse MA^{-1} .

Méthode 2 — Par les noyaux.

Une matrice carrée B est inversible si et seulement si l'équation $BX = 0$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, n'admet que la solution nulle.

Supposons A inversible et soit X tel que $MX = 0$. Alors $AX = M(MX) = 0$, donc $X = 0$: M est inversible.

Supposons M inversible et soit X tel que $AX = 0$. Alors $M(MX) = 0$, donc $MX = 0$ (car M est inversible), puis $X = 0$: A est inversible.

La première méthode est purement calculatoire ; la seconde, qui raisonne sur les noyaux, se transpose directement au langage des endomorphismes.

Conclusion

A est inversible si et seulement si M est inversible.

3. a. On calcule A^2 , puis on utilise le polynôme annulateur obtenu pour localiser les valeurs propres.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2.$$

Ainsi $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de A . Toute valeur propre réelle μ de A est racine de tout polynôme annulateur, donc vérifierait $\mu^2 + 1 = 0$, ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$. La matrice A n'admet donc aucune valeur propre réelle.

Si A était diagonalisable, il existerait une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A , donc au moins une valeur propre : c'est absurde.

On peut aussi le vérifier directement : si $AX = \mu X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors $y = \mu x$ et $-x = \mu y$, d'où $-x = \mu^2 x$, soit $(1 + \mu^2)x = 0$, donc $x = 0$ puis $y = 0$.

Conclusion

$A^2 = -I_2$ et A n'est pas diagonalisable.

b. On utilise la Question 1 : si $M^2 = A$, alors $AM = MA$.

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$$

et

$$MA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix}.$$

L'égalité $AM = MA$ donne, coefficient par coefficient : $c = -b$, $d = a$, $-a = -d$ et $-b = c$.

Conclusion

si M est solution de $M^2 = A$, alors $a = d$ et $b = -c$.

c. D'après b, toute solution est de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. On calcule M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 - b^2 & 2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $M^2 = A$ équivaut à $a^2 - b^2 = 0$ et $2ab = 1$.

La condition $2ab = 1$ impose $ab > 0$, donc a et b sont non nuls et de même signe ; avec $a^2 = b^2$, on obtient $a = b$. Alors $2a^2 = 1$, soit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Réciproquement, pour $a = b = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a bien $a^2 - b^2 = 0$ et $2ab = 1$, donc $M^2 = A$.

Conclusion

l'équation $M^2 = A$ admet exactement deux solutions,

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$M = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a. On cherche les valeurs propres de A , puis on compare la dimension de l'espace propre à 3.

Méthode 1 — Par un polynôme annulateur.

On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

et $A^3 = A \cdot A^2 = 0$. Le polynôme X^3 est annulateur de A , donc $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$.

Si A était diagonalisable, on aurait $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale dont les coefficients diagonaux sont des valeurs propres de A , donc nuls : $D = 0$ et $A = 0$, ce qui est faux.

Méthode 2 — Par la structure triangulaire.

A est triangulaire inférieure, de coefficients diagonaux tous nuls : ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, donc $\text{Sp}(A) = \{0\}$. L'espace propre associé est $\text{Ker}(A)$.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}$, donc $AX = 0$ si et seulement si $x = y = 0$: $\text{Ker}(A)$ est

engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et est de dimension $1 < 3$. La somme des dimensions des espaces

propres vaut $1 \neq 3$, donc A n'est pas diagonalisable.

La première méthode n'utilise qu'un polynôme annulateur ; la seconde exploite la forme triangulaire et le critère par les dimensions des espaces propres.

Conclusion

A n'est pas diagonalisable.

b. On a $M^4 = (M^2)^2 = A^2 \neq 0$ d'après le calcul de a, et $M^6 = (M^2)^3 = A^3 = 0$.

L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* : M^k = 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ (il contient 6), donc il admet un plus petit élément $p \leq 6$. Si l'on avait $p \leq 4$, alors $M^4 = M^{4-p}M^p = 0$, ce qui est faux. Donc $p \in \{5, 6\}$.

Conclusion

$$M^4 \neq 0, M^6 = 0 \text{ et } p \in \{5, 6\}.$$

- c. Par minimalité de p , $M^{p-1} \neq 0$ (car $p - 1 \geq 4 \geq 1$), donc f^{p-1} n'est pas l'application nulle : il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0$. En particulier $u \neq 0$.

Soient $c_0, \dots, c_{p-1}$ des réels tels que

$$\sum_{k=0}^{p-1} c_k f^k(u) = 0.$$

Supposons par l'absurde les c_k non tous nuls et notons j le plus petit indice tel que $c_j \neq 0$. L'équation s'écrit

$$\sum_{k=j}^{p-1} c_k f^k(u) = 0.$$

On lui applique l'application linéaire f^{p-1-j} :

$$\sum_{k=j}^{p-1} c_k f^{k+p-1-j}(u) = 0.$$

Pour $k \geq j + 1$, on a $k + p - 1 - j \geq p$, donc $f^{k+p-1-j} = 0$ puisque $M^p = 0$. Il reste $c_j f^{p-1}(u) = 0$, et comme $f^{p-1}(u) \neq 0$, $c_j = 0$: contradiction.

Conclusion

la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.

- d. La famille obtenue en c est libre et comporte $p \geq 5$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Or une famille libre de $\mathbb{R}^3$ a au plus $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ éléments. C'est une contradiction.

Conclusion

il n'existe aucune matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

5. a. Comme $M^2 = I_n$, le polynôme $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de M . Les valeurs propres de M sont racines de tout polynôme annulateur.

Conclusion

$X^2 - 1$ est annulateur de M et $\text{Sp}(M) \subset \{-1; 1\}$.

- b. On montre que la somme est directe puis qu'elle vaut $\mathbb{R}^n$ (méthode d'analyse-synthèse). On note que $f^2 = \text{id}$ car $M^2 = I_n$.

Intersection : si $x \in \text{Ker}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f + \text{id})$, alors $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, d'où $2x = 0$ et $x = 0$.

Décomposition : soit $x \in \mathbb{R}^n$. On pose $y = \frac{1}{2}(x + f(x))$ et $z = \frac{1}{2}(x - f(x))$. Alors $x = y + z$ et

$$f(y) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = y,$$

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(x) - f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - x) = -z.$$

Donc $y \in \text{Ker}(f - \text{id})$ et $z \in \text{Ker}(f + \text{id})$.

Conclusion

$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id})$.

- c. Notons $E_1 = \text{Ker}(f - \text{id})$ et $E_{-1} = \text{Ker}(f + \text{id})$. En concaténant une base de E_1 et une base de E_{-1} (l'une d'elles pouvant être vide), on obtient, d'après b, une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ adaptée à la somme directe. Chaque vecteur de $\mathcal{B}$ est non nul et vérifie $f(e) = e$ ou $f(e) = -e$: c'est un vecteur propre de f .

Ainsi $\mathbb{R}^n$ admet une base de vecteurs propres de f , dans laquelle la matrice de f est diagonale, de coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1 . En notant Q la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$, on a $M = Q\Delta Q^{-1}$ avec $\Delta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$.

Conclusion

M est diagonalisable.

d. On montre la double inclusion.

Si $M^2 = I_n$, la question c fournit Q inversible et Δ diagonale à coefficients diagonaux dans $\{-1; 1\}$ telles que $M = Q\Delta Q^{-1}$: M est semblable à une matrice du type annoncé.

Réciproquement, si $M = Q\Delta Q^{-1}$ avec Q inversible et $\Delta = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$, alors $\Delta^2 = \text{diag}(\varepsilon_1^2, \dots, \varepsilon_n^2) = I_n$ et

$$M^2 = Q\Delta Q^{-1}Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta^2 Q^{-1} = QQ^{-1} = I_n.$$

Conclusion

l'ensemble des solutions de $M^2 = I_n$ est exactement l'ensemble des matrices semblables à une matrice $\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$ pour tout i .

6. a. La matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$. Pour chaque i , on choisit un vecteur propre X_i associé à λ_i . Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre ; la famille $(X_1, \dots, X_n)$ est donc une famille libre de n vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui est de dimension n : c'est une base.

Soit P la matrice dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$: elle est inversible et $AP = PD$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Conclusion

$A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et P inversible.

b. On a $N^2 = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}M^2P$ et $D = P^{-1}AP$.

Si $M^2 = A$, alors $N^2 = P^{-1}AP = D$. Réciproquement, si $N^2 = D$, alors $P^{-1}M^2P = P^{-1}AP$; en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} , on obtient $M^2 = A$.

Conclusion

$$M^2 = A \text{ si et seulement si } N^2 = D.$$

- c. Supposons $M^2 = A$; alors $N^2 = D$ d'après b. La Question 1, appliquée à la matrice D et à sa racine N , donne $DN = ND$.

Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, comme D est diagonale :

$$(DN)_{i,j} = \lambda_i(N)_{i,j} \text{ et } (ND)_{i,j} = (N)_{i,j}\lambda_j.$$

Ainsi $(\lambda_i - \lambda_j)(N)_{i,j} = 0$. Pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ car les valeurs propres sont distinctes, donc $(N)_{i,j} = 0$.

Conclusion

si $M^2 = A$, la matrice $N = P^{-1}MP$ est diagonale.

- d. Supposons qu'il existe i_0 tel que $\lambda_{i_0} < 0$ et qu'il existe une solution M . D'après c, $N = P^{-1}MP$ est diagonale, donc N^2 est diagonale de coefficients $(N)_{i,i}^2$. L'égalité $N^2 = D$ donne $(N)_{i_0,i_0}^2 = \lambda_{i_0} < 0$, ce qui est impossible pour un réel.

Conclusion

si A admet une valeur propre strictement négative, l'équation $M^2 = A$ n'a aucune solution.

- e. On suppose $\lambda_i \geq 0$ pour tout i . Comme les λ_i sont distincts, au plus l'un d'eux, à savoir λ_1 , peut être nul.

D'après b et c, M est solution si et seulement si $N = P^{-1}MP$ est diagonale et vérifie $N^2 = D$, c'est-à-dire $(N)_{i,i}^2 = \lambda_i$ pour tout i , soit $(N)_{i,i} = \varepsilon_i \sqrt{\lambda_i}$ avec $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$. Réciproquement, toute matrice diagonale de cette forme vérifie $N^2 = D$.

Conclusion

l'ensemble des solutions est

$$\left\{ P \operatorname{diag} \left(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n} \right) P^{-1} : (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1; 1\}^n \right\}.$$

Comme $M \mapsto P^{-1}MP$ est bijective, deux choix de signes donnant des matrices N différentes donnent des solutions différentes. Il y a donc exactement 2^n solutions si $\lambda_1 > 0$, et 2^{n-1} solutions si $\lambda_1 = 0$ (le signe ε_1 est alors sans effet).

7. a. On construit M à partir de la diagonalisation orthogonale de A .

La matrice A est symétrique réelle. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P (donc $P^{-1} = {}^tP$) et une matrice diagonale $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PD {}^tP$. Les matrices A et D étant semblables, elles ont les mêmes valeurs propres; les valeurs propres de la matrice diagonale D sont ses coefficients diagonaux, donc $\lambda_i > 0$ pour tout i .

On pose $\Delta = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et $M = P\Delta {}^tP$.

Symétrie : ${}^tM = {}^t({}^tP) {}^t\Delta {}^tP = P\Delta {}^tP = M$.

Carré : $M^2 = P\Delta {}^tP P\Delta {}^tP = P\Delta^2 {}^tP = PD {}^tP = A$, car ${}^tPP = I_n$.

Valeurs propres : M est semblable à Δ , donc $\operatorname{Sp}(M) = \{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \subset \mathbb{R}_+^*$.

Conclusion

$M = P\Delta {}^tP$ est symétrique, à valeurs propres strictement positives, et vérifie $M^2 = A$.

b. i. La matrice M_1 est symétrique réelle. Par le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P_1 et une matrice diagonale telles que $M_1 = P_1 \operatorname{diag}(\cdot) P_1^{-1}$; les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de M_1 , comptées avec leur multiplicité, et, quitte à permuter les colonnes de P_1 (ce qui préserve l'orthogonalité), on peut les ranger dans l'ordre $a_1, \dots, a_n$. On obtient $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$. De même pour M_2 .

Conclusion

il existe P_1, P_2 orthogonales telles que $M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$ et $M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1}$.

ii. On a $M_1^2 = P_1 D_1^2 P_1^{-1}$ et $M_2^2 = P_2 D_2^2 P_2^{-1}$. L'égalité $M_1^2 = M_2^2$ donne

$P_1 D_1^2 P_1^{-1} = P_2 D_2^2 P_2^{-1}$. En multipliant à gauche par P_1^{-1} et à droite par P_2 :

$$D_1^2 P_1^{-1} P_2 = P_1^{-1} P_2 D_2^2, \text{ soit } D_1^2 P = P D_2^2.$$

Comme $D_1^2 = \text{diag}(a_1^2, \dots, a_n^2)$ et $D_2^2 = \text{diag}(b_1^2, \dots, b_n^2)$, pour tout (i, j) :

$$(D_1^2 P)_{i,j} = a_i^2 (P)_{i,j} \text{ et } (P D_2^2)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2.$$

Conclusion

$D_1^2 P = P D_2^2$ et, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $a_i^2 (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j^2$.

iii. Soit $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$. Si $(P)_{i,j} = 0$, l'égalité $a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$ est vraie. Sinon, ii donne $a_i^2 = b_j^2$; comme $a_i > 0$ et $b_j > 0$, on obtient $a_i = b_j$, d'où encore $a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$.

Or $(D_1 P)_{i,j} = a_i (P)_{i,j}$ et $(P D_2)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$.

Conclusion

pour tout (i, j) , $a_i (P)_{i,j} = (P)_{i,j} b_j$, donc $D_1 P = P D_2$.

iv. L'égalité $D_1 P_1^{-1} P_2 = P_1^{-1} P_2 D_2$, multipliée à gauche par P_1 et à droite par P_2^{-1} , donne

$$P_1 D_1 P_1^{-1} = P_2 D_2 P_2^{-1}, \text{ soit } M_1 = M_2.$$

Conclusion

il existe une unique matrice symétrique à valeurs propres strictement positives dont le carré est A .

Partie 2 : Une suite de matrices

8. On commence par exprimer $\text{Tr}({}^tAB)$ à l'aide des coefficients.

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\text{Tr}({}^tAB) = \sum_{j=1}^n ({}^tAB)_{j,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n ({}^tA)_{j,i} (B)_{i,j} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (A)_{i,j} (B)_{i,j}.$$

Symétrie : cette expression est symétrique en A et B .

Bilinéarité : pour B fixée,

$$A \mapsto \sum_{i,j} (A)_{i,j} (B)_{i,j}$$

est linéaire ; par symétrie, l'application est aussi linéaire par rapport à B .

Positivité :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i,j} (A)_{i,j}^2 \geq 0.$$

Caractère défini : si $\text{Tr}({}^tAA) = 0$, une somme de carrés de réels est nulle, donc chaque $(A)_{i,j}$ est nul et $A = 0$.

Conclusion

$(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et

$$\|A\|_2^2 = \sum_{i,j} (A)_{i,j}^2.$$

9. Notons $\mu = \max_{1 \leq i, j \leq n} |(M)_{i,j}|$. D'après la question 8,

$$\|M\|_2^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (M)_{i,j}^2 \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mu^2 = n^2 \mu^2.$$

Par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $\mu \geq 0$:

Conclusion

$$\|M\|_2 \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} |(M)_{i,j}|.$$

10. Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $k \in \mathbb{N}$, par définition du produit matriciel,

$$(K_1 M_k K_2)_{i,j} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (K_1)_{i,p} (M_k)_{p,q} (K_2)_{q,j}.$$

C'est une combinaison linéaire finie, à coefficients indépendants de k , des suites $((M_k)_{p,q})_k$, qui convergent vers $\ell_{p,q}$. Par opérations sur les limites, elle converge vers

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n (K_1)_{i,p} \ell_{p,q} (K_2)_{q,j} = (K_1 L K_2)_{i,j}.$$

Conclusion

$(K_1 M_k K_2)_{k \geq 0}$ converge coefficient par coefficient vers $K_1 L K_2$.

11. a. La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et, pour $x \neq 0$,

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}.$$

Ainsi $\varphi'(x) > 0$ si $|x| > 1$, $\varphi'(x) < 0$ si $0 < |x| < 1$, et $\varphi'(\pm 1) = 0$. On a $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(-1) = -1$; φ est impaire.

Limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$ (car $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$), $\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$.

x	$] -\infty, -1]$	$[-1, 0[$	$]0, 1]$	$[1, +\infty[$
signe de φ'	+	−	−	+
variations de φ	croît de $-\infty$ à -1	décroît de -1 à $-\infty$	décroît de $+\infty$ à 1	croît de 1 à $+\infty$

Conclusion

φ est croissante sur $] -\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$, avec un minimum égal à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (atteint en 1) et un maximum égal à -1 sur $\mathbb{R}_-^*$ (atteint en -1).

b. On suppose $a > 0$. Pour $m \geq 1$, on note $\mathcal{P}(m)$: « $u_1, \dots, u_m$ sont bien définis et $u_m \geq 1$ ».

Initialisation : $u_0 = a > 0$ est non nul, donc $u_1 = \varphi(a)$ est défini ; d'après a, $\varphi(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$, donc $u_1 \geq 1$.

On peut aussi le voir directement : pour $x > 0$, $\varphi(x) - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x} = \frac{(x-1)^2}{2x} \geq 0$.

Hérédité : si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, $u_m \geq 1 > 0$, donc $u_{m+1} = \varphi(u_m)$ est défini et $u_{m+1} \geq 1$.

Conclusion

si $a > 0$, la suite est bien définie et, pour tout $m \geq 1$, $u_m \geq 1$, donc $|u_m| \geq 1$ et u_m est du signe de a .

c. Pour $m \geq 1$, $u_m \neq 0$ et

$$u_{m+1} - u_m = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_m} - u_m \right) = \frac{1 - u_m^2}{2u_m}.$$

Cas $a > 0$: $u_m \geq 1$, donc $1 - u_m^2 \leq 0$ et $u_m > 0$: la suite $(u_m)_{m \geq 1}$ est décroissante et

minorée par 1. Par le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel $\varepsilon \geq 1$.

Cas $a < 0$: d'après le résultat admis, $u_m \leq -1$, donc $1 - u_m^2 \leq 0$ et $u_m < 0$: la suite est croissante et majorée par -1 , donc converge vers un réel $\varepsilon \leq -1$.

Dans les deux cas $\varepsilon \neq 0$ et φ est continue en ε ; en passant à la limite dans $u_{m+1} = \varphi(u_m)$, on obtient $\varepsilon = \varphi(\varepsilon)$, soit $2\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + 1$, donc $\varepsilon^2 = 1$.

Conclusion

$(u_m)_{m \geq 1}$ est monotone et converge vers $\varepsilon \in \{-1; 1\}$, avec $\varepsilon = 1$ si $a > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $a < 0$ (ε est du signe de a).

d. Pour $|x| \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \in]0, 1]$, donc $1 - \frac{1}{x^2} \in [0, 1[$ et

$$0 \leq \varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) < \frac{1}{2}.$$

Conclusion

pour tout x tel que $|x| \geq 1$, $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

e. Question adaptée au programme actuel (rectification d'une erreur d'énoncé).

L'inégalité initialement demandée, $|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, est fausse lorsque $0 < |a| < \frac{1}{2}$: pour $a = \frac{1}{10}$, on a $u_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} + 10 \right) = \frac{101}{20}$, donc $|u_1 - 1| = \frac{81}{20} = 4,05$, alors que $\frac{1}{2}|a - 1| = 0,45$. L'inégalité des accroissements finis ne s'applique pas entre u_0 et ε quand $|u_0| < 1$. L'énoncé rectifié remplace $|a - \varepsilon|$ par $|a| + \frac{1}{|a|}$.

On établit la contraction pour $m \geq 1$ grâce à d, puis on traite à part les rangs 0 et 1.

Étape 1 : contraction pour $m \geq 1$. Notons $J = [1, +\infty[$ si $a > 0$ et $J =]-\infty, -1]$ si $a < 0$.

D'après b et c, $u_m \in J$ pour tout $m \geq 1$ et $\varepsilon \in J$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J et $|\varphi'| \leq \frac{1}{2}$ sur J d'après d. Par l'inégalité des accroissements finis, et comme $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$:

$$|u_{m+1} - \varepsilon| = |\varphi(u_m) - \varphi(\varepsilon)| \leq \frac{1}{2}|u_m - \varepsilon|.$$

Par récurrence immédiate, pour tout $m \geq 1$: $|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} |u_1 - \varepsilon|.$

Étape 2 : majoration de $|u_1 - \varepsilon|$. Comme a et $\frac{1}{a}$ sont de même signe,

$|u_1| = \frac{1}{2} \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right)$. De plus u_1 et ε sont du signe de a et $|u_1| \geq 1 = |\varepsilon|$, donc

$$|u_1 - \varepsilon| = |u_1| - 1 \leq \frac{1}{2} \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right).$$

En reportant dans l'étape 1, pour tout $m \geq 1$: $|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right).$

Étape 3 : cas $m = 0$. Comme ε est du signe de a , $|a - \varepsilon| = ||a| - 1|$. Si $|a| \geq 1$,

$||a| - 1| = |a| - 1 \leq |a|$; si $|a| < 1$, $||a| - 1| = 1 - |a| < 1 < \frac{1}{|a|}$. Dans les deux cas,

$$|a - \varepsilon| \leq |a| + \frac{1}{|a|}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } m \in \mathbb{N}, |u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(|a| + \frac{1}{|a|} \right).$$

- 12.** a. La matrice A est symétrique réelle : d'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale P telle que $D_0 = P^{-1}AP$ soit diagonale. La matrice D_0 est le produit des trois matrices inversibles P^{-1} , A et P , donc elle est inversible.

Conclusion

il existe P orthogonale telle que $D_0 = P^{-1}AP$ est diagonale et inversible.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D_0 . Comme A et D_0 sont semblables, ce sont les valeurs propres de A (comptées avec multiplicité) ; ils sont non nuls car D_0 est inversible.

- b.** On raisonne par récurrence sur k , avec $\mathcal{H}(k)$: « M_k est bien définie et inversible, et

$D_k = P^{-1}M_kP$ est diagonale et inversible ».

Initialisation : $M_0 = A$ est inversible et D_0 est diagonale inversible d'après a.

Hérédité : supposons $\mathcal{H}(k)$. Comme M_k est inversible, $M_{k+1} = \frac{1}{2}(M_k + M_k^{-1})$ est bien définie. De plus $P^{-1}M_{k+1}^{-1}P = (P^{-1}M_kP)^{-1} = D_k^{-1}$, donc

$$D_{k+1} = P^{-1}M_{k+1}P = \frac{1}{2}(P^{-1}M_kP + P^{-1}M_k^{-1}P) = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1}).$$

Si $D_k = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec les d_i non nuls, alors $D_k^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}\right)$ et

$D_{k+1} = \text{diag}(\varphi(d_1), \dots, \varphi(d_n))$ est diagonale. Pour $x \neq 0$, $|\varphi(x)| = \frac{1}{2}\left(|x| + \frac{1}{|x|}\right) \geq 1$

(question 11.a), donc les $\varphi(d_i)$ sont non nuls : D_{k+1} est inversible, et $M_{k+1} = PD_{k+1}P^{-1}$ aussi.

Conclusion

pour tout k , M_k est bien définie et inversible, D_k est diagonale inversible et $D_{k+1} = \frac{1}{2}(D_k + D_k^{-1})$.

- c. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $d_i^{(k)} = (D_k)_{i,i}$. D'après b, $d_i^{(0)} = \lambda_i \neq 0$ et $d_i^{(k+1)} = \varphi(d_i^{(k)})$: la suite $(d_i^{(k)})_k$ est la suite de la question 11 associée à $a = \lambda_i$. Elle converge donc vers $\varepsilon_i \in \{-1; 1\}$, du signe de λ_i . Les coefficients non diagonaux de D_k sont nuls.

Ainsi (D_k) converge coefficient par coefficient vers $\Delta = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Comme $M_k = PD_kP^{-1}$, la question 10 (avec $K_1 = P$ et $K_2 = P^{-1}$) montre que (M_k) converge coefficient par coefficient vers $L = P\Delta P^{-1}$. Enfin $L^2 = P\Delta^2P^{-1} = PI_nP^{-1} = I_n$.

Conclusion

(M_k) converge coefficient par coefficient vers $L = P \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) P^{-1}$, qui vérifie $L^2 = I_n$.

- d. Question adaptée au programme actuel (conséquence de la rectification de 11.e). La majoration initiale par $n \left(\frac{1}{2}\right)^k (1 + \rho(A))$ est fautive en général : pour $n = 1$ et $A = \left(\frac{1}{10}\right)$, on a $\|M_1 - L\|_2 = 4,05 > \frac{1}{2} \cdot 1,1$. Elle est remplacée par une majoration faisant intervenir $\rho(A) + \frac{1}{r(A)}$, où $r(A) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\} > 0$ car A est inversible.

Notation commune. Posons $\beta_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\rho(A) + \frac{1}{r(A)}\right)$. Pour tout i , $|\lambda_i| \leq \rho(A)$ et $\frac{1}{|\lambda_i|} \leq \frac{1}{r(A)}$, donc 11.e (avec $a = \lambda_i$) donne

$$|d_i^{(k)} - \varepsilon_i| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(|\lambda_i| + \frac{1}{|\lambda_i|}\right) \leq \beta_k.$$

De plus $M_k - L = P(D_k - \Delta)P^{-1} = P(D_k - \Delta)^t P$ car P est orthogonale.

- i. Méthode 1 — Par les coefficients de $M_k - L$.

Pour $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, comme $D_k - \Delta$ est diagonale,

$$(M_k - L)_{i,j} = \sum_{p=1}^n (P)_{i,p} (d_p^{(k)} - \varepsilon_p) (P)_{j,p}.$$

Donc

$$|(M_k - L)_{i,j}| \leq \beta_k \sum_{p=1}^n |(P)_{i,p}| |(P)_{j,p}|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique,

$$\sum_{p=1}^n |(P)_{i,p}| |(P)_{j,p}| \leq \left(\sum_{p=1}^n (P)_{i,p}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{p=1}^n (P)_{j,p}^2\right)^{1/2}.$$

Or $P^t P = I_n$, donc

$$\sum_p (P)_{i,p}^2 = (P^t P)_{i,i} = 1.$$

Ainsi $|(M_k - L)_{i,j}| \leq \beta_k$ pour tout (i, j) , et la question 9 donne $\|M_k - L\|_2 \leq n\beta_k$.

Méthode 2 — Par invariance de la norme.

Pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en utilisant $\text{Tr}(UV) = \text{Tr}(VU)$ et ${}^t P P = I_n$:

$$\|P X {}^t P\|_2^2 = \text{Tr}(P^t X {}^t P P X {}^t P) = \text{Tr}(P^t X X {}^t P) = \text{Tr}({}^t X X {}^t P P) = \text{Tr}({}^t X X) = \|X\|_2^2.$$

Donc $\|M_k - L\|_2 = \|D_k - \Delta\|_2$. Les coefficients de $D_k - \Delta$ sont majorés en valeur absolue par β_k , et la question 9 donne $\|M_k - L\|_2 \leq n\beta_k$.

La première méthode applique la question 9 directement à $M_k - L$; la seconde ramène le problème à une matrice diagonale, ce qui prépare la majoration plus fine de ii.

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \|M_k - L\|_2 \leq n \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\rho(A) + \frac{1}{r(A)}\right).$$

ii. D'après la méthode 2 de i, $\|M_k - L\|_2 = \|D_k - \Delta\|_2$. En reprenant le raisonnement de la question 9 pour la matrice diagonale $D_k - \Delta$, dont seuls les n coefficients diagonaux peuvent être non nuls :

$$\|D_k - \Delta\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(d_i^{(k)} - \varepsilon_i\right)^2 \leq n\beta_k^2.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad \|M_k - L\|_2 \leq \sqrt{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\rho(A) + \frac{1}{r(A)}\right).$$

- e. Question adaptée au programme actuel : le programme suit la majoration rectifiée de d.ii. La ligne qui calcule x et y utilise désormais les valeurs absolues des valeurs propres, et la constante calculée est $\rho(A) + \frac{1}{r(A)}$.

Code exécuté :

Python

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al

def suite_matricielle(A):
    n = len(A)

    v = al.eig(A)[0]                # valeurs propres de A
    x, y = max(abs(v)), min(abs(v)) # x = rho(A), y = r(A) > 0
    U, k = A, 0                     # U contient M_k
    c = x + 1/y                     # rho(A) + 1/r(A)

    while np.sqrt(n)*c*(1/2)**k > 10**(-3):
        k = k+1

        U = (U + al.inv(U))/2        # M_{k+1} = (M_k + M_k^{-1})/2

    return U

A = np.array([[2., 1.], [1., -3.]])
U = suite_matricielle(A)
print(np.round(U, 6))
print(np.round(np.dot(U, U), 6))

# Sortie obtenue :
# [[ 0.928477  0.371391]
#  [ 0.371391 -0.928477]]
# [[ 1. -0.]
#  [-0.  1.]]
```

Explications : `al.eig(A)[0]` renvoie le tableau des valeurs propres de A ; x et y valent donc $\rho(A)$ et $r(A)$, et $r(A) > 0$ car A est inversible. La variable U contient M_k et k l'indice courant. La boucle s'arrête dès que $\sqrt{n} c \left(\frac{1}{2}\right)^k \leq 10^{-3}$; d'après d.ii, on a alors $\|M_k - L\|_2 \leq 10^{-3}$. Elle termine car $\left(\frac{1}{2}\right)^k \rightarrow 0$. La mise à jour utilise `al.inv`, licite puisque chaque M_k est inversible (question b). On pourrait utiliser la majoration de d.i (facteur n au lieu de `np.sqrt(n)`), au prix de quelques itérations supplémentaires.

Sur l'exemple exécuté, la matrice renvoyée vérifie numériquement $U^2 = I_2$, ce qui est cohérent avec $L^2 = I_n$; cette observation numérique ne remplace pas la démonstration de c.

Problème 2

Partie 1 : Préliminaires

1. On raisonne par récurrence sur m , avec $\mathcal{P}(m)$: « I_m converge et $I_m = m!$ ». La fonction $u \mapsto u^m e^{-u}$ est continue sur $[0, +\infty[$: l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$.

Initialisation : pour $A > 0$, $\int_0^A e^{-u} du = 1 - e^{-A} \rightarrow 1$ quand $A \rightarrow +\infty$. Donc I_0 converge et $I_0 = 1 = 0!$.

Hérédité : supposons $\mathcal{P}(m)$. Pour $A > 0$, on intègre par parties sur le segment $[0, A]$ avec $u \mapsto u^{m+1}$ et $u \mapsto -e^{-u}$, de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\begin{aligned} \int_0^A u^{m+1} e^{-u} du &= [-u^{m+1} e^{-u}]_0^A + (m+1) \int_0^A u^m e^{-u} du = -A^{m+1} e^{-A} \\ &+ (m+1) \int_0^A u^m e^{-u} du. \end{aligned}$$

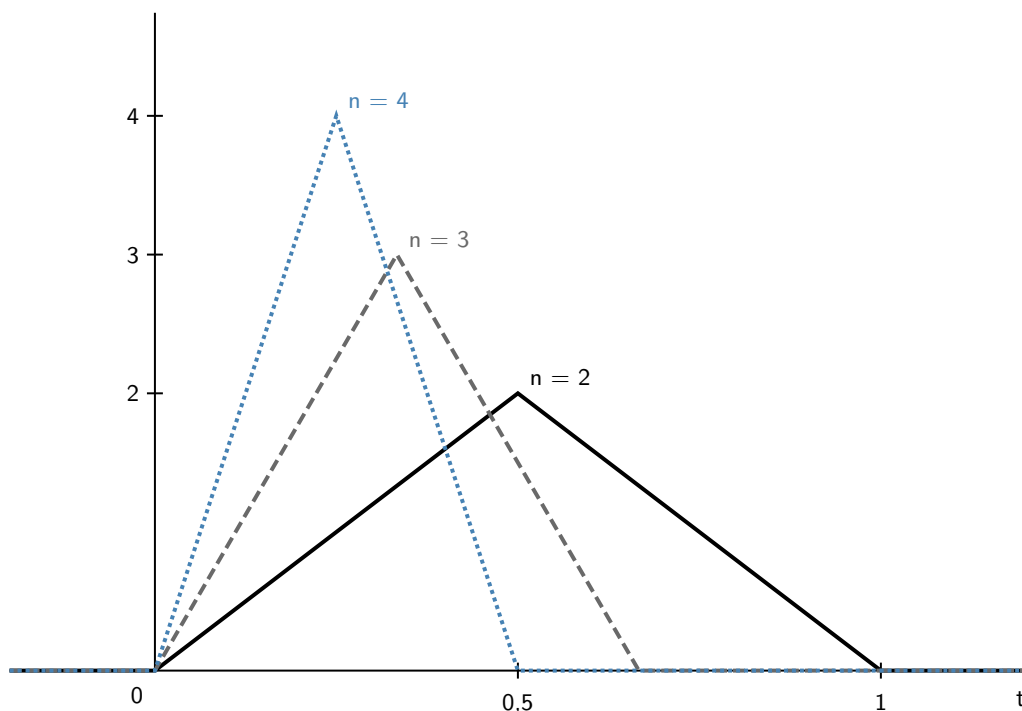
Par croissances comparées, $A^{m+1} e^{-A} \rightarrow 0$, et par hypothèse de récurrence

$$\int_0^A u^m e^{-u} du \rightarrow m!. \text{ Donc } \int_0^A u^{m+1} e^{-u} du \rightarrow (m+1) m! = (m+1)!.$$

Conclusion

pour tout $m \in \mathbb{N}$, I_m converge et $I_m = m!$.

2. a. La courbe de h_n est nulle hors de $\left]0, \frac{2}{n}\right]$; sur cet intervalle, c'est un triangle de sommets $(0, 0)$, $\left(\frac{1}{n}, n\right)$ et $\left(\frac{2}{n}, 0\right)$. Plus n est grand, plus le triangle est étroit et haut. Voici l'allure pour $n = 2, 3$ et 4.



Vérifions que h_n est une densité de probabilité.

Positivité : pour $0 < t \leq \frac{1}{n}$, $n^2 t > 0$; pour $\frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n}$, $n^2 \left(\frac{2}{n} - t\right) \geq 0$; ailleurs $h_n(t) = 0$. Donc $h_n \geq 0$.

Continuité : h_n est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$, $\left]0, \frac{1}{n}\right]$, $\left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$, $\left]\frac{2}{n}, +\infty\right[$, et aux points de raccord : $\lim_{t \rightarrow 0^+} n^2 t = 0 = h_n(0)$,

$\lim_{t \rightarrow (1/n)^+} n^2 \left(\frac{2}{n} - t\right) = n = h_n\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\lim_{t \rightarrow (2/n)^+} h_n(t) = 0 = h_n\left(\frac{2}{n}\right)$. Donc h_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Intégrale : h_n est nulle hors du segment $\left[0, \frac{2}{n}\right]$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h_n$ converge et

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt &= \int_0^{1/n} n^2 t dt + \int_{1/n}^{2/n} n^2 \left(\frac{2}{n} - t\right) dt = n^2 \cdot \frac{1}{2n^2} + n^2 \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{2}{n} - t\right)^2 \right]_{1/n}^{2/n} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

Conclusion

pour tout $n \geq 2$, h_n est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et d'intégrale 1 : c'est une densité de probabilité.

b. Si $t = 0$, $h_n(0) = 0$ pour tout n . Si $t \in]0, 1]$, dès que $n > \frac{2}{t}$, on a $\frac{2}{n} < t$, donc $h_n(t) = 0$: la suite $(h_n(t))_n$ est nulle à partir d'un certain rang.

Conclusion

pour tout $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$.

c. Pour $n \geq 2$, $\frac{2}{n} \leq 1$, donc h_n est nulle hors de $[0, 1]$ et

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_n(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt = 1. \text{ Ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = 1. \text{ D'après b,} \\ \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt &= \int_0^1 0 dt = 0. \end{aligned}$$

Conclusion

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h_n(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) dt$. La convergence simple d'une suite de fonctions ne suffit donc pas à intervertir limite et intégrale ; c'est pourquoi la question 19 établit une majoration uniforme.

Partie 2 : Étude de S_n

3. Chaque Y_i suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, donc admet une espérance $\frac{1}{\lambda}$ et une variance $\frac{1}{\lambda^2}$.

Par linéarité de l'espérance, S_n admet une espérance et

$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{n}{\lambda}.$$

Les Y_i admettent un moment d'ordre 2 et sont mutuellement indépendantes, donc deux à deux indépendantes, d'où des covariances nulles. La variance d'une somme donne alors

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^n V(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

Conclusion

$$E(S_n) = \frac{n}{\lambda} \text{ et } V(S_n) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

4. a. On calcule la fonction de répartition de $X_i = \lambda Y_i$. Pour $x \in \mathbb{R}$, comme $\lambda > 0$,

$$P(X_i \leq x) = P\left(Y_i \leq \frac{x}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x/\lambda} = 1 - e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

Conclusion

X_i suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, c'est-à-dire la loi $\gamma(1)$.

- b. On rappelle qu'une densité de la loi $\gamma(\nu)$ (de taux 1) est $x \mapsto \frac{x^{\nu-1}e^{-x}}{\Gamma(\nu)}$ sur $\mathbb{R}_+$ et 0 ailleurs, avec $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : $\lambda S_1 = X_1$ suit $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$ d'après a.

Hérédité : supposons que λS_n suit $\gamma(n)$. On a $\lambda S_{n+1} = \lambda S_n + X_{n+1}$. La variable λS_n est fonction de $(Y_1, \dots, Y_n)$ et X_{n+1} est fonction de Y_{n+1} ; par le lemme des coalitions, elles sont indépendantes.

Méthode 1 — Stabilité des lois gamma.

La somme de deux variables indépendantes de lois $\gamma(\nu_1)$ et $\gamma(\nu_2)$ (de même taux 1) suit la loi $\gamma(\nu_1 + \nu_2)$. Donc λS_{n+1} suit $\gamma(n + 1)$.

Méthode 2 — Produit de convolution.

Notons g_n la densité de $\gamma(n)$ et g_1 celle de $\mathcal{E}(1)$, qui est bornée par 1. La somme de deux variables à densité indépendantes, l'une ayant une densité bornée, admet pour densité le produit de convolution $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)g_1(x-t) dt$. Pour $x \leq 0$, l'intégrande est nul (car $g_n(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $g_1(x-t) = 0$ si $t \geq x$). Pour $x > 0$, l'intégrande n'est non nul que pour $0 < t < x$ et

$$\int_0^x \frac{t^{n-1}e^{-t}}{(n-1)!} e^{-(x-t)} dt = \frac{e^{-x}}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} dt = \frac{e^{-x}}{(n-1)!} \cdot \frac{x^n}{n} = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

On reconnaît la densité de $\gamma(n + 1)$.

La première méthode invoque directement un résultat du cours ; la seconde le redémontre dans ce cas particulier et rappelle comment calculer une densité de somme.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, λS_n suit la loi $\gamma(n)$.

- c. On a $S_n = \frac{1}{\lambda}(\lambda S_n)$, transformation affine de coefficient $\frac{1}{\lambda} > 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, $F_{S_n}(t) = P(\lambda S_n \leq \lambda t) = G_n(\lambda t)$, où G_n est la fonction de répartition de $\gamma(n)$. La fonction G_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0, de dérivée g_n . Donc S_n est à densité, de densité $t \mapsto \lambda g_n(\lambda t)$:

$$f_{S_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq 0, \text{ et } f_{S_n}(t) = \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \text{ si } t > 0.$$

Conclusion

S_n est à densité, de densité f_{S_n} donnée par l'énoncé.

5. a. On a $P(S_n \leq 0) = \int_{-\infty}^0 f_{S_n} = 0$, donc $S_n > 0$ presque sûrement et $\frac{1}{S_n}$ est bien définie presque sûrement. Par le théorème de transfert, $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance si et seulement si $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} f_{S_n}(t) dt$ converge absolument, c'est-à-dire converge puisque l'intégrande est positif. Cet intégrande vaut

$$\frac{1}{t} f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-2} e^{-\lambda t}, \text{ continu sur }]0, +\infty[.$$

Cas $n = 1$: l'intégrande vaut $\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{t} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\lambda}{t}$. Les fonctions sont positives et $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), donc l'intégrale diverge : $\frac{1}{S_1}$ n'admet pas d'espérance.

Cas $n \geq 2$: par le changement de variable affine $u = \lambda t$ (effectué sur un segment $[\eta, B]$, puis passage à la limite), on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-2} e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} u^{n-2} e^{-u} du = \frac{\lambda I_{n-2}}{(n-1)!} = \frac{\lambda(n-2)!}{(n-1)!},$$

l'intégrale I_{n-2} convergeant d'après la question 1.

Conclusion

$$\frac{1}{S_n} \text{ admet une espérance si et seulement si } n \geq 2, \text{ et alors } E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda}{n-1}.$$

b. La variable $\frac{1}{S_n}$ admet une variance si et seulement si $\frac{1}{S_n^2}$ admet une espérance. Par transfert, cela équivaut à la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-3} e^{-\lambda t} dt$ (intégrande positif).

Cas $n \in \{1, 2\}$: l'intégrande est équivalent en 0^+ à $\frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-3}$ avec $n-3 \leq -1$; par comparaison avec une intégrale de Riemann divergente en 0, l'intégrale diverge. Pas de variance.

Cas $n \geq 3$: le même changement de variable $u = \lambda t$ donne

$$E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)!} I_{n-3} = \frac{\lambda^2 (n-3)!}{(n-1)!} = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

Par la formule de Koenig-Huygens :

$$V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2} = \frac{\lambda^2 ((n-1) - (n-2))}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

Conclusion

$$\frac{1}{S_n} \text{ admet une variance si et seulement si } n \geq 3, \text{ et alors } V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)}.$$

6. On a $W_n = aS_n + b$ avec $a = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} > 0$ et $b = -\sqrt{n}$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{W_n}(t) = P\left(S_n \leq \frac{t-b}{a}\right) = F_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}(t + \sqrt{n})\right).$$

La fonction F_{S_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en 0 ; par composition avec une fonction affine, F_{W_n} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un point. Donc W_n est à densité et, en dérivant,

$$f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n} \left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda} t + \frac{n}{\lambda} \right).$$

Conclusion

W_n est à densité, de densité f_{W_n} donnée par l'énoncé.

7. a. Les Y_i sont indépendantes, de même loi, d'espérance $\frac{1}{\lambda}$ et de variance $\frac{1}{\lambda^2} > 0$. Le théorème limite central affirme que

$$S_n^* = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}$$

converge en loi vers une variable Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Or

$$\frac{S_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = \frac{\lambda S_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} = W_n.$$

Conclusion

$(W_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

- b. Comme W_n est à densité, $\int_0^1 f_{W_n}(t) dt = P(0 < W_n \leq 1) = F_{W_n}(1) - F_{W_n}(0)$. La fonction de répartition Φ de $\mathcal{N}(0, 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la convergence en loi donne $F_{W_n}(x) \rightarrow \Phi(x)$ pour tout réel x , en particulier en 0 et en 1.

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \Phi(1) - \Phi(0) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

Partie 3 : Estimation de λ par maximum de vraisemblance

8. On choisit la densité $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x > 0$ et $f_\lambda(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Pour $(\lambda, x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$,

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k} > 0.$$

Conclusion

$$L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \lambda^n \exp \left(-\lambda \sum_{k=1}^n x_k \right)$$

et

$$\psi(\lambda, x_1, \dots, x_n) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{k=1}^n x_k.$$

9. La fonction $(\lambda, x_1, \dots, x_n) \mapsto n \ln \lambda$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ (composée d'une projection et de $\ln$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$), et

$$(\lambda, x_1, \dots, x_n) \mapsto \lambda \sum x_k$$

est polynomiale. Donc ψ est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n x_k$$

et $\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(\lambda, x_1, \dots, x_n) = -\lambda$.

Comme $\lambda > 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\lambda \neq 0$ en tout point : le gradient de ψ ne s'annule jamais.

Conclusion

ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$ et n'y admet aucun point critique.

10. Notons

$$s = \sum_{k=1}^n x_k > 0.$$

Pour $\lambda > 0$, $\varphi(\lambda) = n \ln \lambda - s\lambda$, et φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Méthode 1 — Étude des variations.

$\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - s = \frac{n - s\lambda}{\lambda}$, qui est strictement positif pour $\lambda < \frac{n}{s}$, nul en $\frac{n}{s}$ et strictement négatif pour $\lambda > \frac{n}{s}$. Donc φ est strictement croissante sur $\left]0, \frac{n}{s}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{n}{s}, +\infty\right[$: elle admet un maximum, atteint uniquement en $\frac{n}{s}$.

Méthode 2 — Concavité.

φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et $\varphi''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$: φ est concave, donc $-\varphi$ est convexe. Le point $\frac{n}{s}$ est un point critique de $-\varphi$, qui y atteint donc son minimum global : φ atteint son maximum global en $\frac{n}{s}$. Comme φ' est strictement décroissante, $\frac{n}{s}$ est son unique zéro ; et si φ atteignait aussi son maximum en un point $\mu \neq \frac{n}{s}$, ce point serait un extremum intérieur, donc un point critique, ce qui est exclu.

La première méthode est élémentaire ; la seconde utilise le résultat de cours sur les fonctions convexes, qui se généralise aux fonctions de plusieurs variables.

Enfin, $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) = \exp(\varphi(\lambda))$ et $\exp$ est croissante, donc $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) \leq \exp(\varphi(\hat{z})) = L(\hat{z}, x_1, \dots, x_n)$.

Conclusion

φ admet un maximum atteint en l'unique réel $\hat{z} = \frac{n}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$, et $L(\lambda, x_1, \dots, x_n) \leq L(\hat{z}, x_1, \dots, x_n)$ pour tout $\lambda > 0$.

11. On a $Z_n = n \cdot \frac{1}{S_n}$. Pour $n \geq 3$, la question 5 montre que $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance et une variance. Par linéarité et par la formule $V(cX) = c^2 V(X)$:

$$E(Z_n) = n \cdot \frac{\lambda}{n-1} = \frac{n}{n-1} \lambda \text{ et } V(Z_n) = n^2 \cdot \frac{\lambda^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)} \lambda^2.$$

Le biais vaut $b(Z_n) = E(Z_n) - \lambda = \frac{\lambda}{n-1}$, qui est non nul car $\lambda > 0$, et qui tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Conclusion

les formules annoncées sont vraies ; Z_n est un estimateur biaisé mais asymptotiquement sans biais de λ .

12. On pose $\tilde{Z}_n = \frac{n-1}{n} Z_n = \frac{n-1}{S_n} = \frac{n-1}{Y_1 + \dots + Y_n}$, pour $n \geq 3$. Par linéarité,
 $E(\tilde{Z}_n) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \lambda = \lambda$: $\tilde{Z}_n$ est sans biais. De plus

$$V(\tilde{Z}_n) = \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 V(Z_n) = \frac{\lambda^2}{n-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Méthode 1 — Condition suffisante du cours.

$E(\tilde{Z}_n) = \lambda$ (donc tend vers λ) et $V(\tilde{Z}_n) \rightarrow 0$: l'estimateur est convergent.

Méthode 2 — Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Pour $\eta > 0$, puisque $\tilde{Z}_n$ admet une variance et que $E(\tilde{Z}_n) = \lambda$,

$$P(|\tilde{Z}_n - \lambda| \geq \eta) \leq \frac{V(\tilde{Z}_n)}{\eta^2} = \frac{\lambda^2}{(n-2)\eta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

La première méthode applique directement un critère du cours ; la seconde en redonne la preuve dans ce cas et fournit en plus une majoration explicite de la probabilité d'erreur.

Conclusion

$\tilde{Z}_n = \frac{n-1}{Y_1 + \dots + Y_n}$ est un estimateur sans biais de λ , et il est convergent.

13. On montre que l'événement « λ appartient à l'intervalle » s'écrit exactement à l'aide de W_n , puis on applique la question 7.a. Aucun remplacement de paramètre inconnu n'est nécessaire.

Notons $t = t_\alpha$. La fonction Φ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ (théorème de la bijection), et $1 - \frac{\alpha}{2} \in]0, 1[$, donc t est bien défini ; de plus $t > 0$ car $1 - \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2} = \Phi(0)$.

Presque sûrement $S_n > 0$, donc $Z_n = \frac{n}{S_n} > 0$. Alors, en multipliant par $\frac{S_n}{n} > 0$,

$$\lambda \leq Z_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \Leftrightarrow \frac{\lambda S_n}{n} \leq 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \sqrt{n} \left(\frac{\lambda S_n}{n} - 1\right) \leq t \Leftrightarrow W_n \leq t,$$

$$Z_n \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \Leftrightarrow 1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \leq \frac{\lambda S_n}{n} \Leftrightarrow -t \leq W_n,$$

car $\sqrt{n} \left(\frac{\lambda S_n}{n} - 1\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} = W_n$. Ainsi, en notant I_n l'intervalle de l'énoncé,

$$P(\lambda \in I_n) = P(-t \leq W_n \leq t) = F_{W_n}(t) - F_{W_n}(-t),$$

car W_n est à densité, donc $P(W_n = -t) = 0$. D'après 7.a et la continuité de Φ ,

$$P(\lambda \in I_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha.$$

Les bornes de I_n sont des fonctions de l'échantillon $(Y_1, \dots, Y_n)$ ne dépendant pas de λ .

Conclusion

$\left[Z_n \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right); Z_n \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique au seuil $1 - \alpha$ pour λ .

14. On calcule l'estimation $Z = \frac{n}{y_1 + \dots + y_n}$, puis les deux bornes de la question 13.

Code exécuté :

Python

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import scipy.special as sp
```

```
def IdC(alpha, Y):
    n=len(Y)

    Z=n/np.sum(Y)                # estimation de lambda
    t=sp.ndtri(1-alpha/2)        # t_alpha = Phi^(-1)(1-alpha/2)
    A=Z*(1-t/np.sqrt(n))
    B=Z*(1+t/np.sqrt(n))

    return [A, B]

# contrôle expérimental du niveau : lambda = 0.1, n = 100, alpha = 0.05
rd.seed(1)
N, compte = 10000, 0
for j in range(N):
    Y = rd.exponential(10, 100)    # scale = 1/lambda = 10
    A, B = IdC(0.05, Y)
    if A <= 0.1 and 0.1 <= B:
        compte = compte + 1
print(compte/N)
```

Sortie obtenue : 0.948.

Explications : n est la taille de l'échantillon, Z la réalisation de Z_n , t la valeur t_α . La commande `rd.exponential` prend en paramètre l'échelle $\frac{1}{\lambda}$ et non le taux λ . La fréquence observée de recouvrement, proche de 0,95, est cohérente avec le niveau asymptotique $1 - \alpha$; il s'agit d'une observation expérimentale et non d'une preuve.

- 15.** Pour chaque mois $i + 1$ ($i \in \{0, \dots, 11\}$), la ligne $T[i]$ contient les 100 durées de vie observées ; le segment tracé à la hauteur i est l'intervalle de confiance $[A, B]$ obtenu, et le point marque la valeur $\lambda_0 = \frac{1}{10}$ annoncée. Le risque α utilisé n'est pas précisé par l'énoncé.

Lecture de la figure : la valeur 0,1 appartient à l'intervalle uniquement pour $i = 3, i = 4$ et $i = 6$, c'est-à-dire pour avril, mai et juillet. Pour les neuf autres mois, l'intervalle est entièrement situé à droite de 0,1 : on rejette l'hypothèse $\lambda = \frac{1}{10}$ au risque α .

Interprétation : le centre de chaque intervalle est l'estimation Z_n , car

$\frac{1}{2} \left(Z_n \left(1 - \frac{t}{\sqrt{n}} \right) + Z_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) = Z_n$. Tous les centres sont compris entre environ 0,1011 et 0,1042, donc supérieurs à 0,1. On estime ainsi un paramètre λ supérieur à $\frac{1}{10}$, c'est-à-dire une durée de vie moyenne $\frac{1}{\lambda}$ inférieure à 10. Si la production était conforme ($\lambda = \frac{1}{10}$), chaque mois conduirait à un rejet avec une probabilité proche de α ; observer neuf rejets sur douze mois, tous du même côté, est très peu compatible avec cette hypothèse pour un risque usuel.

Conclusion

les tests de 2023 indiquent que les composants ont une durée de vie moyenne plus courte que la valeur annoncée de 10 : la qualité de la production semble s'être dégradée par rapport à la norme.

Partie 4 : Une convergence sous le signe intégral

16. a. On simplifie $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis on effectue un développement limité de $\ln(1+x)$ en 0 avec $x = \frac{1}{n}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{2\pi(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = \frac{(n+1)^n}{n^n} e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} \\ &= e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc $v_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1$.

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0, de dérivées successives en 0 égales à 1, -1 et 2. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 donne une fonction ϵ telle que $\epsilon(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0$ et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \epsilon(x).$$

Posons $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Comme $n + \frac{1}{2} = \frac{1}{x_n} \left(1 + \frac{x_n}{2}\right)$,

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(1 + x_n) &= \left(1 + \frac{x_n}{2}\right) \left(1 - \frac{x_n}{2} + \frac{x_n^2}{3} + x_n^2 \epsilon(x_n)\right) = 1 + \frac{x_n^2}{12} + \frac{x_n^3}{6} \\ &+ x_n^2 \epsilon(x_n) \left(1 + \frac{x_n}{2}\right), \end{aligned}$$

en développant : $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} = 1 + \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{6}$. Ainsi

$$v_n = \frac{x_n^2}{12} \left(1 + 2x_n + 12 \epsilon(x_n) \left(1 + \frac{x_n}{2}\right)\right),$$

et le facteur entre parenthèses tend vers 1.

Conclusion

$$v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

b. La série

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

est une série de Riemann convergente. Comme $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$ et que $\frac{1}{12n^2} > 0$, la suite (v_n) est positive à partir d'un certain rang, et le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs montre que

$$\sum v_n$$

converge.

Par télescopage, pour $n \geq 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln u_{k+1} - \ln u_k) = \ln u_n - \ln u_1.$$

Donc $\ln u_n$ converge vers

$$\sigma = \ln u_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k,$$

et par continuité de l'exponentielle, $u_n \rightarrow e^\sigma$.

Conclusion

$$\sum v_n$$

converge et (u_n) converge vers $\ell = e^\sigma > 0$.

17. On remplace f_{S_n} par son expression dans la formule de la question 6. Pour $t \in \mathbb{R}$,

posons $s = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda} = \frac{\sqrt{n}}{\lambda}(t + \sqrt{n})$. On a $s > 0$ si et seulement si $t > -\sqrt{n}$.

Si $t \leq -\sqrt{n}$, alors $s \leq 0$ et $f_{W_n}(t) = 0$.

Si $t > -\sqrt{n}$, on a $\lambda s = \sqrt{n}t + n = n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, donc

$$f_{W_n}(t) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-n-\sqrt{n}t} n^{n-1} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{n} n^{n-1} e^{-n}}{(n-1)!} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t}.$$

Or $\frac{\sqrt{n} n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{\sqrt{n} n^n}{n!}$, donc $\frac{\sqrt{n} n^{n-1} e^{-n}}{(n-1)!} = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n! \sqrt{2\pi}} = \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}}$.

Conclusion

$$f_{W_n}(t) = 0 \text{ si } t \leq -\sqrt{n} \text{ et } f_{W_n}(t) = \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} \text{ si } t > -\sqrt{n}.$$

18. a. Soit $t > -\sqrt{n}$; alors $\frac{t}{\sqrt{n}} > -1$ et

$$nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = n \ln \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2}, \text{ donc}$$

$$e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} = \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n}t} e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Par conséquent,

$$u_n \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} = f_{W_n}(t)$$

d'après la question 17.

Conclusion

l'égalité demandée est vraie pour tout $t > -\sqrt{n}$.

b. La fonction R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$, avec $R(0) = 0$ et

$$R'(u) = \frac{1}{1+u} - 1 + u = \frac{1 - (1+u) + u(1+u)}{1+u} = \frac{u^2}{1+u}.$$

Méthode 1 — Inégalité de Taylor-Lagrange.

On a $R'(0) = 0$, $R''(u) = 1 - \frac{1}{(1+u)^2}$ donc $R''(0) = 0$, et $R'''(u) = \frac{2}{(1+u)^3}$. Pour $u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, $1+u \geq \frac{1}{2}$ donc $0 < R'''(u) \leq 16$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et u , sur le segment d'extrémités 0 et u inclus dans $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, donne

$$|R(u)| = \left| R(u) - R(0) - R'(0)u - \frac{R''(0)}{2}u^2 \right| \leq \frac{16|u|^3}{3!} = \frac{8}{3}|u|^3.$$

Méthode 2 — Par l'expression intégrale de R .

Par le théorème fondamental de l'analyse, $R(u) = \int_0^u \frac{v^2}{1+v} dv$. Pour v entre 0 et $u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, on a $1+v \geq \frac{1}{2}$, donc $0 \leq \frac{v^2}{1+v} \leq 2v^2$. Ainsi

$$|R(u)| \leq \left| \int_0^u 2v^2 dv \right| = \frac{2|u|^3}{3}.$$

La première méthode est l'outil standard pour majorer un reste ; la seconde exploite la forme simple de R' et donne une meilleure constante.

Conclusion

il existe $M_1 \geq 0$ (par exemple $M_1 = \frac{8}{3}$, ou même $M_1 = \frac{2}{3}$) tel que $|R(u)| \leq M_1|u|^3$ pour tout $u \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

c. Fixons $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq 4t^2$, on a $\frac{|t|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$, donc $t > -\sqrt{n}$ et

$$\frac{t}{\sqrt{n}} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \left[-\frac{1}{2}, 1\right]. \text{ Par b,}$$

$$\left| nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \leq nM_1 \frac{|t|^3}{n^{3/2}} = \frac{M_1|t|^3}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par continuité de l'exponentielle en 0, $e^{nR(t/\sqrt{n})} \rightarrow 1$. De plus $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \rightarrow 1$ et $u_n \rightarrow \ell$ (question 16.b). Avec 18.a, valable pour $n \geq 4t^2$:

Conclusion

$$\text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_{W_n}(t) = \ell \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} = \ell f_Z(t).$$

19. a. i. Pour $t \in [0, 1]$, $1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \geq 1 > 0$ et $\frac{t}{\sqrt{n}} \in [0, 1] \subset]-1, +\infty[$. Les fonctions $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1}$ et $t \mapsto nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, donc g_n aussi, par composition et produit. Pour $t \in [0, 1]$,

$$g'_n(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-2} + \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \sqrt{n} R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)},$$

car la dérivée de $t \mapsto nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$ est $\frac{n}{\sqrt{n}} R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{n} R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$. Comme $0 < \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \leq 1$, l'inégalité triangulaire donne :

Conclusion

g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et

$$|g'_n(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \left| R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \right| \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.$$

ii. D'après le calcul de 18.b, pour $u \in [0, 1]$, $R'(u) = \frac{u^2}{1+u}$ avec $1+u \geq 1$, donc $0 \leq R'(u) \leq u^2$.

Conclusion

$M_2 = 1$ convient : $|R'(u)| \leq u^2$ pour tout $u \in [0, 1]$.

iii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, 1]$; posons $w = \frac{s}{\sqrt{n}} \in [0, 1]$.

D'après 18.b, $nR(w) \leq nM_1w^3 = \frac{M_1s^3}{\sqrt{n}} \leq M_1$, donc $e^{nR(w)} \leq e^{M_1}$.

D'après ii, $\sqrt{n}|R'(w)| \leq \sqrt{n}w^2 = \frac{s^2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Avec i, $|g'_n(s)| \leq \frac{2e^{M_1}}{\sqrt{n}}$ pour tout $s \in [0, 1]$. Comme $g_n(0) = 1 \cdot e^{nR(0)} = 1$, l'inégalité des accroissements finis sur $[0, t]$ donne, pour $t \in [0, 1]$:

$$|g_n(t) - 1| = |g_n(t) - g_n(0)| \leq \frac{2e^{M_1}}{\sqrt{n}} t \leq \frac{2e^{M_1}}{\sqrt{n}}.$$

Conclusion

$C_1 = 2e^{M_1}$ convient.

iv. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, d'après iii, $|g_n(t)| \leq 1 + |g_n(t) - 1| \leq 1 + \frac{C_1}{\sqrt{n}} \leq 1 + C_1$.

Conclusion

$C_2 = 1 + C_1$ convient.

b. Pour $t \in [0, 1]$, on a $t > -\sqrt{n}$, donc 18.a s'écrit $f_{W_n}(t) = u_n g_n(t) f_Z(t)$. Ainsi

$$f_{W_n}(t) - \ell f_Z(t) = (u_n g_n(t) - \ell) f_Z(t) = ((u_n - \ell) g_n(t) + \ell(g_n(t) - 1)) f_Z(t).$$

Les fonctions en jeu sont continues sur le segment $[0, 1]$, donc intégrables. Par l'inégalité triangulaire, puis a.iii, a.iv, $f_Z > 0$ et $\ell > 0$:

$$\left| \int_0^1 f_{W_n}(t) dt - \int_0^1 \ell f_Z(t) dt \right| \leq \int_0^1 (|u_n - \ell| |g_n(t)| + \ell |g_n(t) - 1|) f_Z(t) dt \leq \left(C_2 |u_n - \ell| + \frac{\ell C_1}{\sqrt{n}} \right) \int_0^1 f_Z(t) dt.$$

Conclusion

l'inégalité demandée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- c. D'après 16.b, $u_n \rightarrow \ell$, et $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$; le majorant de b tend donc vers 0, et par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \ell \int_0^1 f_Z(t) dt.$$

20. D'après 7.b, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_{W_n}(t) dt = \int_0^1 f_Z(t) dt$. D'après 19, cette limite vaut aussi $\ell \int_0^1 f_Z(t) dt$. Par unicité de la limite, $(\ell - 1) \int_0^1 f_Z(t) dt = 0$. Comme f_Z est continue et strictement positive, $\int_0^1 f_Z(t) dt > 0$, donc $\ell = 1$.

Ainsi $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} \rightarrow 1$, ce qui signifie que $n!$ et $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ sont équivalents.

Conclusion

$$\ell = 1 \text{ et } n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Relevé des adaptations

Problème 1, question 11.e : énoncé rectifié. L'inégalité $|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m |a - \varepsilon|$ est fausse pour $0 < |a| < \frac{1}{2}$ (contre-exemple $a = \frac{1}{10}, m = 1$). Elle est remplacée par

$|u_m - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(|a| + \frac{1}{|a|}\right)$, qui conserve la convergence géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et sa place dans le problème.

Problème 1, question 12.d (i et ii) : énoncés rectifiés en conséquence. Le facteur $1 + \rho(A)$ est remplacé par $\rho(A) + \frac{1}{r(A)}$, avec $r(A) = \min\{|\lambda| : \lambda \in \text{Sp}(A)\}$, défini dans le sujet.

La majoration initiale est fausse, par exemple pour $A = \left(\frac{1}{10}\right)$ et $k = 1$.

Problème 1, question 12.e : programme Python ajusté à la majoration rectifiée. La ligne $x, y = \max(v), \min(v)$ devient $x, y = \max(\text{abs}(v)), \min(\text{abs}(v))$, et le blanc $\rho = \max(\dots, \dots)$ devient $c = \dots$, destiné à recevoir $\rho(A) + \frac{1}{r(A)}$. Les blancs à compléter sont conservés.

Problème 2, question 15 : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées.

Points restant à vérifier

Problème 2, question 15 : les bornes des intervalles ont été mesurées sur le document numérisé, avec une précision d'environ 2×10^{-5} . Le risque α n'est pas précisé dans l'énoncé. La largeur relative des intervalles tracés, $\frac{2t_\alpha}{\sqrt{n}} \approx 0,039$, correspondrait pour $n = 100$ à $t_\alpha \approx 0,2$, soit $\alpha \approx 0,84$, valeur inhabituelle ; avec $\alpha = 0,05$ et $n = 100$, les intervalles seraient environ dix fois plus larges. L'échelle de la figure originale est donc à vérifier. Cela ne change pas l'interprétation qualitative attendue (lecture des intervalles qui contiennent ou non 0,1).