



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2023

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Exercice 1

Somme d'une série

Dans cet exercice x désigne un élément de $]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'on a : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$.
- b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que : $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}$.
- c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, un encadrement de S_n .
- d) Démontrer que $S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Informatique.

a) On considère la fonction suivante écrite en langage Python.

Python

```
def rang(a):
    k = 1
    s = 1
    while s < a:
        k = k + 1
        s = s + 1 / k
    return k
```

Expliquer ce que produit l'appel `rang(50)`.

b) Le code suivant

Python

```
from numpy import exp
exp(49)
```

renvoie : 1.9073465724950998e+21.

Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

3. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$. Simplifier la somme

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1}.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) Démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$

d) En déduire que la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$$

converge, de somme

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Exercice 2

Des variables aléatoires

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ suivant toutes la loi uniforme sur $]0, 1[$ et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Pour tout entier $n \geq 2$ on pose : $Z_n = \inf(X_1, \dots, X_n)$, c'est-à-dire que pour tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$Z_n(\omega) = \min(X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)).$$

On admet que Z_n est bien une variable aléatoire.

1. Soit $n \geq 2$ entier.

a) Démontrer que la fonction de répartition F_n de Z_n est définie par :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

b) Justifier que la variable aléatoire Z_n est à densité.

c) Démontrer qu'une densité f_n de Z_n est donnée, pour x réel, par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - x)^{n-1} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

2. Informatique. Compléter la fonction suivante en langage Python de manière que l'appel `VarZ(10)` simule la variable aléatoire Z_{10} . On rappelle que, la fonction `random()` ayant été importée, l'appel `random(3)` renvoie un vecteur de trois coordonnées qui simulent des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$.

Python

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return .....
```

3. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 2}$.
4. Soit $n \geq 2$ entier. Lorsque U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $]0, 1[$, indépendante des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, on admet que $Z_n - U$ est une variable aléatoire à densité g_n donnée par :

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 - (-x)^n & \text{pour } x \in [-1, 0[\\ (1 - x)^n & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}.$$

On pose : $T_n = Z_n - X_n$.

- a) Démontrer que $P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}$.

On pourra considérer la variable aléatoire $Z_{n-1} = \inf(X_1, \dots, X_{n-1})$.

- b) La variable aléatoire T_n est-elle à densité ?
- c) Informatique. Écrire une fonction VarT en langage Python, d'argument n , qui simule la variable aléatoire T_n .
5. La figure 1 présente un histogramme de 2000 rectangles donnant la répartition de 20000 valeurs d'une simulation de la variable aléatoire T_{500} de la question 4. La figure 2 est un zoom de la partie de droite de la figure 1.

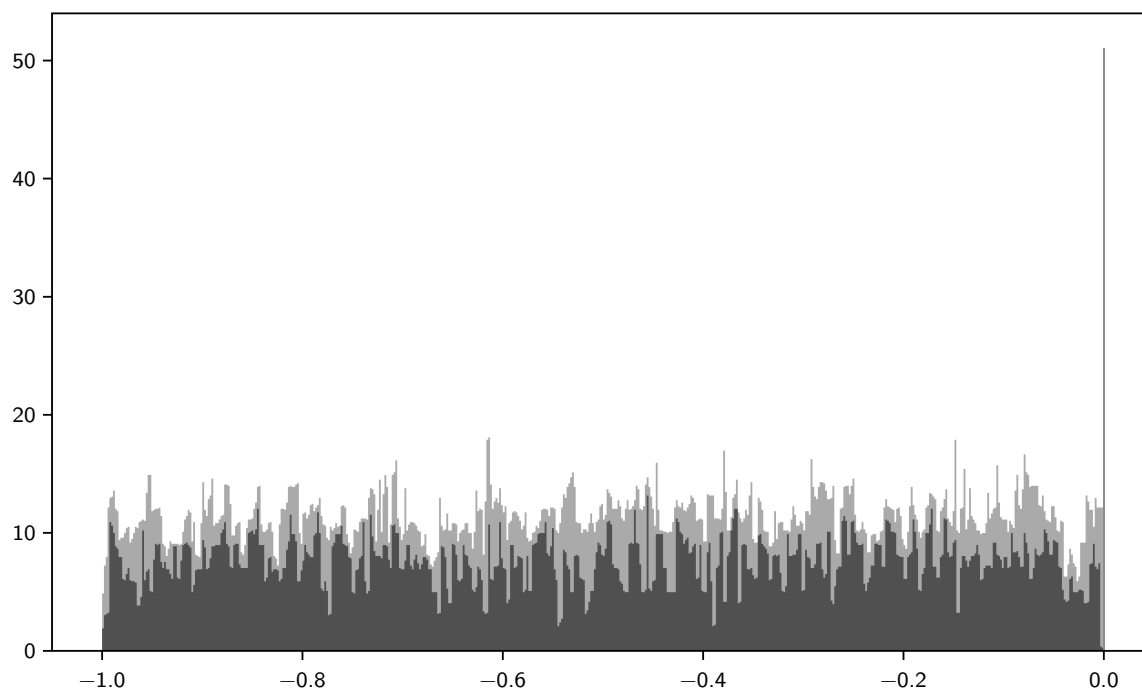


FIGURE 1 – Répartition de 20000 valeurs prises par T_{500}

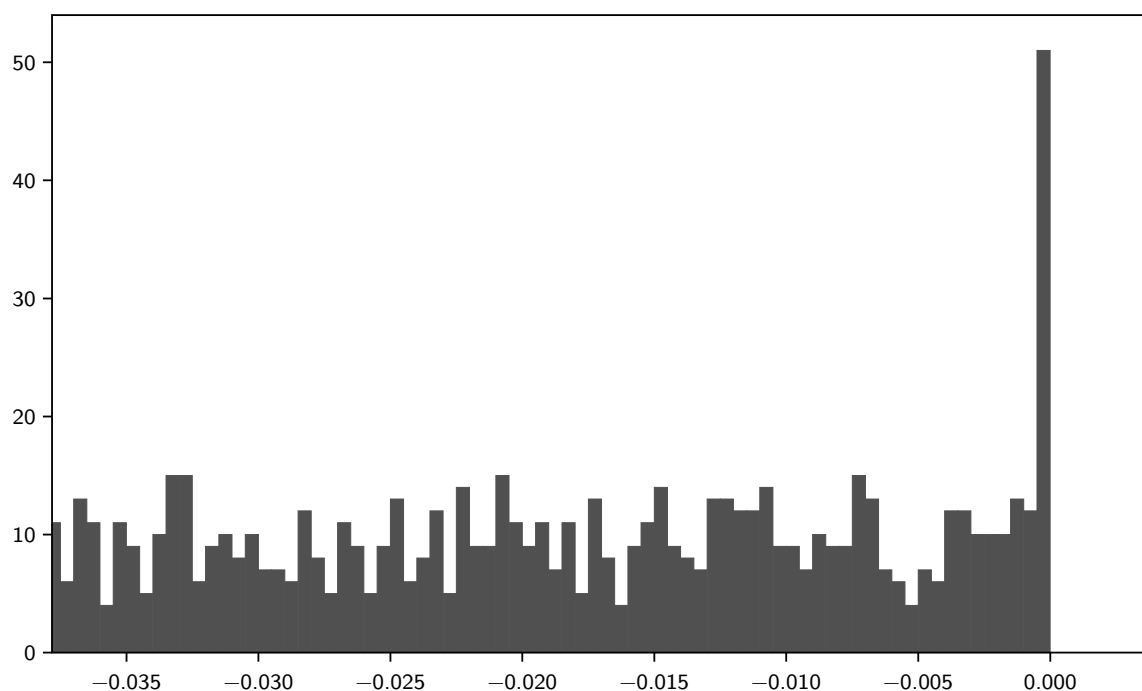


FIGURE 2 – Zoom de la partie droite de la figure 1

Valeurs lues sur la figure 2 : les rectangles ont une largeur de 0,0005. Le rectangle le plus à gauche, partiellement visible, a une hauteur d'environ 11 ; les rectangles suivants, de $[-0,0375 ; -0,037]$ à $[-0,001 ; -0,0005]$, ont des hauteurs comprises entre 4 et 15 ; le rectangle le plus à droite, $[-0,0005 ; 0]$, a une hauteur d'environ 51.

- a) La variable aléatoire T_{500} vous semble-t-elle discrète? Justifiez votre avis en une phrase.
- b) Le rectangle le plus à droite de la figure 2 est-il cohérent avec le résultat de la question 4a?

Problème

Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension finie n .

Notations et définition

- On note 0_E le vecteur nul de E .
- Lorsque F est un espace vectoriel on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F .
- Une forme linéaire sur E est une application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- On note, dans ce problème, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E .
- Un hyperplan de E est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ de l'espace vectoriel E .

Lorsque F est un espace vectoriel de dimension finie, on admettra que la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est :

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F.$$

On admettra aussi qu'une intersection de sous-espaces vectoriels de E est encore un sous-espace vectoriel de E .

Enfin, on rappelle le théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut se compléter en une base de E .

Préliminaire

1. Justifier que les espaces vectoriels E et E^* ont la même dimension.
2. Soit φ un élément de E^* .
 - a) Quelles sont les dimensions possibles pour l'image $\text{Im } \varphi$ de φ ?
 - b) En déduire que φ est soit nulle, soit surjective.
 - c) On suppose que φ n'est pas l'application nulle. Démontrer que $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan de E .

Partie I - Des exemples

3. Premier exemple

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On considère l'application $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
$$g(P) = \int_0^1 P(t) \, dt.$$

- a) Démontrer que g est un élément de E^* .
- b) Quelle est la dimension du noyau de g ?
- c) Pour $k \in \{1, \dots, p\}$ on considère la fonction polynôme $Q_k : x \mapsto x^k - \frac{1}{k+1}$.

Démontrer que la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base du noyau de g .

4. Second exemple

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}_p[x]$ des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p .

On considère l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(P) = P(0)$.

a) Démontrer que f est un élément de E^* .

b) Déterminer le noyau de f .

5. Dans cette question, on revient au cadre général.

Soient f et g deux éléments de E^* , non nuls, tels que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

a) Démontrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.

b) Justifier l'existence d'un élément x_0 de E qui n'appartient pas au noyau de f .

c) Démontrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)$, où $\text{Vect}(x_0)$ désigne le sous-espace vectoriel de E engendré par le vecteur x_0 .

d) On pose $h = g(x_0)f - f(x_0)g$. Démontrer que h est nulle.

e) Que peut-on en conclure pour les formes linéaires f et g ?

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. On a vu à la question 2c que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Le but de cette question est de démontrer que tout hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Soit H un hyperplan de E .

a) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1})$ une base de H . Justifier l'existence d'un vecteur e_n dans E tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de l'espace vectoriel E .

b) Soit φ l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ défini par :

$$\varphi(e_i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{si } i = n \end{cases}.$$

Justifier que cette définition est correcte et démontrer que $\text{Ker } \varphi = H$.

Dans la suite de cette partie, on considère un entier $p \geq 2$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de formes linéaires sur E , ainsi que l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (f_1(x), \dots, f_p(x)) \end{array}.$$

On tiendra pour acquis que l'application f est linéaire.

7. Démontrer que : $\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$.

8. On suppose dans cette question que l'application f est surjective.

a) On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. Justifier que ε_1 admet un antécédent x par f .

b) Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^* .

9. On suppose dans cette question que l'application f n'est pas surjective.

a) Que peut-on dire de la dimension m de $\text{Im } f$?

- b)** En complétant une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\text{Im } f$ en une base de $\mathbb{R}^p$, démontrer que $\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.
- c)** En déduire que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* (on pourra utiliser la question 6).
- 10.** On suppose dans cette question que la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans l'espace vectoriel E^* .
- a)** Justifier que f est surjective.
- b)** Démontrer que : $\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \right) = n - p$.

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Pour $a \in E$ on note f_a l'application qui à un élément x de E associe le réel $f_a(x) = \langle a, x \rangle$.

11. Soit $a \in E$.

- a)** Démontrer que f_a est un élément de E^* .
- b)** Déterminer le noyau de f_a .
- c)** Démontrer que si f_a est l'application nulle alors $a = 0_E$.

12. Théorème de représentation des formes linéaires

On considère maintenant l'application $\Phi : E \rightarrow E^*$ définie, pour $a \in E$, par : $\Phi(a) = f_a$.

- a)** Démontrer que Φ est linéaire.

b) Démontrer que Φ est un isomorphisme de E sur E^* .

c) Justifier que pour tout $\varphi \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle.$$

13. Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Dans cette question, p est un entier naturel non nul et on considère $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille p .

a) Démontrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Démontrer que si $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire alors il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que pour toute matrice M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ on ait :

$$\varphi(M) = \text{Tr}(AM).$$