



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2023

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Corrigé

Exercice 1 - Somme d'une série

Dans tout l'exercice, $x \in]0, 1[$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. a) Il s'agit d'encadrer l'intégrale d'une fonction monotone sur un segment de longueur 1 : on encadre la fonction, puis on intègre.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue et décroissante sur $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$. Pour tout $t \in [k, k+1]$ on a donc :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}.$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes vérifiant $k \leq k+1$), en intégrant sur $[k, k+1]$, intervalle de longueur 1 :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}.$$

- b) On somme les encadrements de la question 1a pour k allant de 1 à $n-1$ (possible car $n \geq 2$), puis on utilise la relation de Chasles.

Par Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \int_1^n \frac{dt}{t}.$$

À gauche, avec le changement d'indice $j = k + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} = S_n - 1.$$

À droite :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = S_{n-1} = S_n - \frac{1}{n}.$$

Conclusion

$$\text{pour tout entier } n \geq 2, \quad S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dt}{t} \leq S_n - \frac{1}{n}.$$

c) On calcule l'intégrale et on isole S_n dans chacune des deux inégalités.

On a $\int_1^n \frac{dt}{t} = [\ln t]_1^n = \ln n$. L'inégalité de gauche de 1b donne $S_n \leq \ln n + 1$, celle de droite donne $\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n$.

Conclusion

$$\text{pour tout entier } n \geq 2,$$

$$\ln n + \frac{1}{n} \leq S_n \leq \ln n + 1.$$

d) On divise l'encadrement par $\ln n$ et on applique le théorème d'encadrement.

Pour $n \geq 2$, $\ln n > 0$, donc :

$$1 + \frac{1}{n \ln n} \leq \frac{S_n}{\ln n} \leq 1 + \frac{1}{\ln n}.$$

Comme $\ln n \rightarrow +\infty$ et $n \ln n \rightarrow +\infty$, les deux membres extrêmes tendent vers 1. Par encadrement, $\frac{S_n}{\ln n} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n.$$

2. Informatique.

a) On suit l'évolution des variables k et s pour repérer ce que vaut s à chaque passage dans la boucle.

Code exécuté (pour de petites valeurs de a) :

Python

```
def rang(a):
    k = 1
    s = 1
    while s < a:
        k = k + 1
        s = s + 1 / k
    return k
```

Au départ, $k = 1$ et $s = 1 = S_1$. Si, au début d'un passage dans la boucle, $s = S_k$, alors après les deux affectations k est remplacé par $k + 1$ et s par $S_k + \frac{1}{k+1} = S_{k+1}$. Par récurrence, à chaque test de la condition de la boucle, on a $s = S_k$.

La boucle s'arrête dès que $S_k \geq a$. D'après 1c, $S_k \geq \ln k \rightarrow +\infty$, donc il existe un rang où $S_k \geq a$ et la boucle se termine (en arithmétique exacte).

Conclusion

l'appel `rang(50)` renvoie le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $S_k \geq 50$, c'est-à-dire le premier rang à partir duquel la somme partielle de la série harmonique dépasse 50.

À titre de contrôle, l'exécution de `rang(5)` renvoie 83 et celle de `rang(10)` renvoie 12367, valeurs compatibles avec l'encadrement de 1c.

b) On utilise l'encadrement de 1c pour estimer l'entier renvoyé par `rang(50)`, donc le nombre de passages dans la boucle.

Notons k_0 l'entier renvoyé par `rang(50)`. On a $S_{k_0} \geq 50$, et d'après 1c, $S_{k_0} \leq \ln k_0 + 1$. Donc $\ln k_0 \geq 49$, soit :

$$k_0 \geq e^{49} \approx 1,9 \times 10^{21}.$$

Conclusion

la boucle `while` devrait être exécutée plus de 10^{21} fois. Même à raison d'un milliard de passages par seconde, il faudrait plus de 10^{12} secondes, soit plusieurs dizaines de milliers d'années : l'appel `rang(50)` ne renverra pas de résultat en un temps raisonnable.

Remarque complémentaire (observation sur le calcul en nombres flottants, non exigée) : lorsque s est compris entre 32 et 64, deux nombres flottants consécutifs sont espacés de $2^{-47} \approx 7,1 \times 10^{-15}$. Dès que $\frac{1}{k}$ devient inférieur à la moitié de cet écart, c'est-à-dire pour k de l'ordre de 3×10^{14} , l'instruction $s = s + 1/k$ ne modifie plus s , qui reste bloqué vers $34 < 50$: en pratique, la boucle ne s'arrêterait jamais.

3. a) Il s'agit d'une somme géométrique de raison t .

Comme $t \in [0, x]$ et $x < 1$, on a $t \neq 1$. Par la formule des sommes géométriques :

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} t^j = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0, x]$,

$$\sum_{k=1}^n t^{k-1} = \frac{1-t^n}{1-t}.$$

b) On intègre l'égalité de 3a sur le segment $[0, x]$.

Les fonctions $t \mapsto t^{k-1}$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ et $t \mapsto \frac{t^n}{1-t}$ sont continues sur $[0, x]$, puisque $1-t \geq 1-x > 0$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^n \int_0^x t^{k-1} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

D'une part, $\int_0^x t^{k-1} dt = \frac{x^k}{k}$. D'autre part, $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$.

Conclusion

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

c) On majore l'intégrande par une quantité dont l'intégrale tend vers 0.

Pour $t \in [0, x]$, on a $0 < 1-x \leq 1-t$, donc $0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}$. Par positivité et croissance de l'intégrale ($0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}.$$

Comme $0 < x < 1$, $x^{n+1} \rightarrow 0$, et $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$: le majorant tend vers 0. Par encadrement :

Conclusion

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0.$$

d) On passe à la limite dans l'égalité de 3b.

D'après 3b et 3c, la suite des sommes partielles

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$$

converge vers $-\ln(1-x) - 0$.

Conclusion

la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$$

converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Exercice 2 - Des variables aléatoires

Les variables X_k sont indépendantes, de loi uniforme sur $]0, 1[$, et $Z_n = \min(X_1, \dots, X_n)$ pour $n \geq 2$. On rappelle que pour $x \in [0, 1]$, $P(X_k > x) = 1 - x$.

1. Soit $n \geq 2$.

a) On passe par l'événement contraire : le minimum est strictement supérieur à x si et seulement si tous les X_i le sont.

Pour tout réel x , $\{Z_n > x\} = \bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}$, d'où
 $F_n(x) = 1 - P(Z_n > x) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}\right)$.

Cas $x < 0$: chaque X_i est à valeurs dans $]0, 1[$, donc Z_n aussi, et $F_n(x) = P(Z_n \leq x) = 0$.

Cas $x > 1$: de même, $F_n(x) = 1$.

Cas $x \in [0, 1]$: par indépendance (mutuelle) des X_i ,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i > x\}\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i > x) = (1 - x)^n.$$

Conclusion

$$F_n(x) = 0 \text{ si } x < 0, F_n(x) = 1 - (1 - x)^n \text{ si } x \in [0, 1], F_n(x) = 1 \text{ si } x > 1.$$

b) On vérifie que F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf éventuellement en un nombre fini de points.

F_n est de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ (fonctions constantes ou polynomiales). Elle est continue en 0 : la limite à gauche vaut 0 et $F_n(0) = 1 - 1^n = 0$; elle est continue en 1 : $F_n(1) = 1 - 0 = 1$, égal à la limite à droite. Donc F_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion

F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ privé de $\{0, 1\}$, donc Z_n est une variable aléatoire à densité.

c) Une densité s'obtient en dérivant F_n là où elle est dérivable, en choisissant des valeurs positives arbitraires aux points restants.

Sur $] -\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$, $F'_n(x) = 0$. Sur $]0, 1[$, $F'_n(x) = n(1 - x)^{n-1}$. En 0 et en 1, on peut choisir n'importe quelles valeurs positives ; on choisit $n(1 - 0)^{n-1} = n$ et $n(1 - 1)^{n-1} = 0$. La fonction obtenue est positive.

Conclusion

une densité de Z_n est $f_n(x) = n(1-x)^{n-1}$ si $x \in [0, 1]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

2. Informatique.

On simule n variables indépendantes de loi uniforme sur $]0, 1[$ avec `random(n)`, puis on prend leur minimum avec la fonction `min` de `numpy`.

Code exécuté :

Python

```
def VarZ(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    return min(random(n))
```

`random(n)` renvoie un vecteur de n réalisations indépendantes de la loi uniforme sur $]0, 1[$, qui joue le rôle de $(X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$; `min` en renvoie la plus petite coordonnée, c'est-à-dire une réalisation de Z_n .

Contrôle expérimental : la moyenne de 20000 appels `VarZ(10)` a donné environ 0,0914, proche de $E(Z_{10}) = \int_0^1 10x(1-x)^9 dx = \frac{1}{11} \approx 0,0909$. Ce n'est qu'une observation, pas une preuve.

3. On étudie la limite de $F_n(x)$ pour tout réel x fixé et on la compare à une fonction de répartition.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Si $x < 0$: $F_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Si $0 < x \leq 1$: $0 \leq 1-x < 1$, donc $(1-x)^n \rightarrow 0$ et $F_n(x) \rightarrow 1$.

Si $x > 1$: $F_n(x) = 1 \rightarrow 1$.

Soit Z la variable certaine égale à 0; sa fonction de répartition est $F(x) = 0$ si $x < 0$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 0$. Elle est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, et l'on vient de voir que

$F_n(x) \rightarrow F(x)$ pour tout $x \neq 0$. Le point 0, point de discontinuité de F , n'a pas à être examiné (d'ailleurs $F_n(0) = 0$ ne tend pas vers $F(0) = 1$).

Conclusion

la suite $(Z_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers la variable aléatoire certaine égale à 0.

4. Soit $n \geq 2$ et $T_n = Z_n - X_n$.

a) On traduit l'événement $\{Z_n = X_n\}$ à l'aide de Z_{n-1} , puis on utilise le résultat admis sur la densité g de la différence entre un minimum et une variable uniforme indépendante. Le cas $n = 2$, pour lequel $Z_{n-1} = X_1$ n'entre pas dans le cadre du résultat admis, est traité à part.

Cas $n \geq 3$.

On a $Z_n = \min(Z_{n-1}, X_n)$, donc $Z_n = X_n$ si et seulement si $X_n \leq Z_{n-1}$:

$$\{Z_n = X_n\} = \{Z_{n-1} - X_n \geq 0\}.$$

La variable X_n suit la loi uniforme sur $]0, 1[$ et est indépendante de $X_1, \dots, X_{n-1}$. Comme $n - 1 \geq 2$, le résultat admis s'applique en remplaçant n par $n - 1$ et U par X_n :

$Z_{n-1} - X_n$ est à densité g_{n-1} . Donc :

$$P(Z_n = X_n) = \int_0^{+\infty} g_{n-1}(x) dx = \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx = \left[-\frac{(1-x)^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n}.$$

Cas $n = 2$: il s'agit de montrer que $P(X_2 \leq X_1) = \frac{1}{2}$, puisque

$\{Z_2 = X_2\} = \{X_2 \leq X_1\}$. On découpe $[0, 1[$ en intervalles de même longueur. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et, pour $j \in \{0, \dots, N-1\}$, $I_j = [\frac{j}{N}, \frac{j+1}{N}[$. Ces intervalles sont deux à deux disjoints, de réunion $[0, 1[$, et $P(X_i \in I_j) = \frac{1}{N}$.

Si $X_2 \in I_j$ et $X_1 \in I_k$ avec $j < k$, alors $X_2 < X_1$. Inversement, si $X_2 \leq X_1$ avec $X_2 \in I_j$ et $X_1 \in I_k$, alors $j \leq k$. Les événements $\{X_2 \in I_j\} \cap \{X_1 \in I_k\}$ étant deux à deux disjoints,

on obtient, par indépendance de X_1 et X_2 :

$$\sum_{0 \leq j < k \leq N-1} \frac{1}{N^2} \leq P(X_2 \leq X_1) \leq \sum_{0 \leq j \leq k \leq N-1} \frac{1}{N^2}.$$

Il y a $\frac{N(N-1)}{2}$ couples (j, k) avec $j < k$ et $\frac{N(N+1)}{2}$ couples avec $j \leq k$, d'où :

$$\frac{N-1}{2N} \leq P(X_2 \leq X_1) \leq \frac{N+1}{2N}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $P(X_2 \leq X_1) = \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$\text{pour tout } n \geq 2, \quad P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n}.$$

b) On utilise le fait qu'une variable à densité ne charge aucun point.

Si T_n était à densité, on aurait $P(T_n = a) = 0$ pour tout réel a . Or

$$P(T_n = 0) = P(Z_n = X_n) = \frac{1}{n} > 0 \text{ d'après 4a.}$$

Conclusion

T_n n'est pas une variable aléatoire à densité.

Complément utile pour la question 5 (cas $n \geq 3$) : comme $Z_n = \min(Z_{n-1}, X_n)$, on a

$T_n = \min(Z_{n-1} - X_n, 0)$. Pour $x < 0$, $\{T_n \leq x\} = \{Z_{n-1} - X_n \leq x\}$, donc

$$P(T_n \leq x) = \int_{-\infty}^x g_{n-1}(t) dt, \text{ qui vaut } \int_{-1}^x (1 - (-t)^{n-1}) dt \text{ pour } x \in [-1, 0].$$

La fonction de répartition de T_n est donc continue sur $] -\infty, 0[$, nulle avant -1 , et présente en 0 un saut d'amplitude $\frac{1}{n}$. En particulier, T_n n'est pas non plus discrète : sinon, sa fonction de

répartition étant continue sur $] -\infty, 0[$, chaque point de $[-1, 0[$ aurait une probabilité

nulle et l'on aurait $P(T_n < 0) = 0$, alors que $P(T_n < 0) = 1 - \frac{1}{n} > 0$.

- c) Informatique. On simule $X_1, \dots, X_n$ par un même vecteur, dont on calcule le minimum et dont on retranche la dernière coordonnée.

Code exécuté :

Python

```
def VarT(n):
    from numpy import min
    from numpy.random import random
    X = random(n)
    return min(X) - X[n-1]
```

Le vecteur X contient une réalisation de $(X_1, \dots, X_n)$; les indices Python commençant à 0, la coordonnée $X[n-1]$ correspond à X_n . Il est indispensable d'utiliser le même vecteur X pour le minimum et pour X_n : deux appels distincts à `random` fourniraient des variables indépendantes et ne simuleraient pas T_n .

Contrôle expérimental : sur 20000 appels `VarT(500)`, la proportion de valeurs nulles a été d'environ 0,0024, à comparer à $\frac{1}{500} = 0,002$; toutes les valeurs observées sont dans $[-1, 0]$.

5. a) On lit l'allure générale de l'histogramme de la figure 1.

Non : les 20000 valeurs simulées de T_{500} se répartissent de façon pratiquement uniforme sur tout l'intervalle $[-1, 0]$ (environ 10 valeurs par rectangle de largeur 0,0005), ce qui évoque une variable qui prend un continuum de valeurs et non un ensemble de valeurs isolées.

Cette impression est confirmée par le complément de 4b : T_{500} n'est pas discrète. Elle n'est pas non plus à densité (4b) ; elle combine une partie répartie sur $[-1, 0[$ et une masse $\frac{1}{500}$ en 0.

- b) On compare la hauteur du dernier rectangle à l'effectif attendu.

Sur $[-1, 0[$, d'après le complément de 4b, T_{500} admet une « densité partielle » $t \mapsto 1 - (-t)^{499}$, très proche de 1 sauf au voisinage immédiat de -1 . Un rectangle de

largeur 0,0005 situé dans $[-1, 0[$ contient donc en moyenne environ $20000 \times 0,0005 = 10$ valeurs, ce qui correspond aux hauteurs observées (entre 4 et 15 sur la figure 2).

Le rectangle le plus à droite, $[-0,0005 ; 0]$, contient en plus toutes les valeurs égales à 0. D'après 4a, $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500}$, ce qui représente en moyenne $20000 \times \frac{1}{500} = 40$ valeurs. On attend donc environ $40 + 10 = 50$ valeurs dans ce rectangle.

Conclusion

la hauteur lue, voisine de 51, est cohérente avec $P(T_{500} = 0) = \frac{1}{500}$ obtenu en 4a. (La simulation de contrôle de 4c a donné 60 valeurs dans ce rectangle, fluctuation compatible avec l'ordre de grandeur attendu ; une simulation ne prouve rien mais illustre le résultat.)

Problème - Formes linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans tout le problème, $n \geq 2$ et $\dim E = n$.

Preliminaire

1. On applique le résultat admis sur la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ avec $F = \mathbb{R}$, espace de dimension 1.

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) = \dim E \times \dim \mathbb{R} = n \times 1 = n.$$

Conclusion

E et E^* ont la même dimension n .

2. Soit $\varphi \in E^*$.

- a) $\text{Im } \varphi$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$, qui est de dimension 1. Sa dimension est donc inférieure ou égale à 1.

Conclusion

$\dim \operatorname{Im} \varphi \in \{0, 1\}$.

b) On traite les deux cas de 2a.

Si $\dim \operatorname{Im} \varphi = 0$, alors $\operatorname{Im} \varphi = \{0\} : \varphi(x) = 0$ pour tout $x \in E$, donc φ est nulle.

Si $\dim \operatorname{Im} \varphi = 1 = \dim \mathbb{R}$, alors le sous-espace $\operatorname{Im} \varphi$ de $\mathbb{R}$ est égal à $\mathbb{R}$ (sous-espace de même dimension finie), donc φ est surjective.

Conclusion

φ est soit nulle, soit surjective.

c) On applique le théorème du rang.

Si φ n'est pas nulle, elle est surjective d'après 2b, donc $\operatorname{rg} \varphi = 1$. E étant de dimension finie, le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Ker} \varphi = \dim E - \operatorname{rg} \varphi = n - 1$.

Conclusion

$\operatorname{Ker} \varphi$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$, c'est-à-dire un hyperplan de E .

Partie I - Des exemples

3. Ici $E = \mathbb{R}_p[x]$, de dimension $p+1 \geq 2$, qui joue le rôle de l'espace de dimension $n = p+1$.

a) Il faut vérifier que g est bien définie, à valeurs réelles et linéaire.

Pour $P \in E$, la fonction P est continue sur $[0, 1]$, donc $g(P) = \int_0^1 P(t) dt$ est un réel bien défini. Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'intégrale :

$$g(\lambda P + Q) = \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t)) dt = \lambda g(P) + g(Q).$$

Conclusion

g est une forme linéaire sur E , donc $g \in E^*$.

b) On montre que g n'est pas nulle et on applique 2c.

Pour le polynôme constant 1, $g(1) = \int_0^1 dt = 1 \neq 0$, donc g n'est pas nulle. D'après 2c appliqué à E , de dimension $p+1$, $\text{Ker } g$ est un hyperplan de E .

Conclusion

$\dim \text{Ker } g = p$.

c) On vérifie que les Q_k sont dans $\text{Ker } g$, que la famille est libre, puis on compare son cardinal à la dimension trouvée en 3b.

Appartenance : pour $k \in \{1, \dots, p\}$, $Q_k \in \mathbb{R}_p[x]$ et

$$g(Q_k) = \int_0^1 t^k dt - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0. \text{ Donc } Q_k \in \text{Ker } g.$$

Liberté : soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k Q_k = 0.$$

Alors, pour tout réel x ,

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k x^k - \sum_{k=1}^p \frac{\lambda_k}{k+1} = 0.$$

Un polynôme nul a tous ses coefficients nuls ; le coefficient de x^k , pour $k \in \{1, \dots, p\}$, est λ_k . Donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$, et la famille $(Q_1, \dots, Q_p)$ est libre.

Base : c'est une famille libre de p vecteurs de $\text{Ker } g$, qui est de dimension p d'après 3b.

Conclusion

$(Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\text{Ker } g$.

4. Ici encore $E = \mathbb{R}_p[x]$.

a) Pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda f(P) + f(Q),$$

et f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Conclusion

$f \in E^*$.

b) On écrit P dans la base canonique et on remarque que $P(0)$ est son coefficient constant.

Soit

$$P = \sum_{k=0}^p a_k x^k \in E.$$

Alors $f(P) = P(0) = a_0$. Donc $P \in \text{Ker } f$ si et seulement si $a_0 = 0$, c'est-à-dire

$$P = \sum_{k=1}^p a_k x^k.$$

Conclusion

$$\text{Ker } f = \{P \in \mathbb{R}_p[x] : P(0) = 0\} = \text{Vect}(x, x^2, \dots, x^p).$$

La famille $(x, \dots, x^p)$ étant libre (sous-famille de la base canonique), $\text{Ker } f$ est de dimension p : c'est bien un hyperplan, conformément à 2c, puisque $f(1) = 1 \neq 0$.

5. Retour au cadre général : $f, g \in E^*$ non nulles, $\text{Ker } f \subset \text{Ker } g$.

a) On utilise l'inclusion et l'égalité des dimensions.

D'après 2c, $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ sont deux hyperplans de E , tous deux de dimension $n - 1$. Un sous-espace inclus dans un autre de même dimension finie lui est égal.

Conclusion

$$\text{Ker } f = \text{Ker } g.$$

b) Comme f n'est pas nulle, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$, c'est-à-dire $x_0 \notin \text{Ker } f$.

Conclusion

un tel x_0 existe (et l'on a $f(x_0) \neq 0$).

c) Deux approches classiques permettent d'établir cette somme directe.

Méthode 1 — Intersection nulle et dimensions.

Intersection : soit $y \in \text{Ker } f \cap \text{Vect}(x_0)$. On écrit $y = \lambda x_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $0 = f(y) = \lambda f(x_0)$, et comme $f(x_0) \neq 0$, $\lambda = 0$, donc $y = 0_E$. Ainsi $\text{Ker } f \cap \text{Vect}(x_0) = \{0_E\}$ et la somme est directe.

Dimension : $x_0 \neq 0_E$ (car $f(x_0) \neq 0$), donc $\dim \text{Vect}(x_0) = 1$ et

$\dim(\text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0)) = (n-1) + 1 = n = \dim E$. Un sous-espace de E de dimension n est égal à E .

Méthode 2 — Décomposition explicite (analyse-synthèse).

Analyse : si $x = y + \lambda x_0$ avec $y \in \text{Ker } f$, alors $f(x) = \lambda f(x_0)$, donc nécessairement $\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)}$ et $y = x - \frac{f(x)}{f(x_0)}x_0$: il y a au plus une décomposition (unicité).

Synthèse : pour $x \in E$, posons $\lambda = \frac{f(x)}{f(x_0)}$ et $y = x - \lambda x_0$. Alors $f(y) = f(x) - \lambda f(x_0) = 0$, donc $y \in \text{Ker } f$, et $x = y + \lambda x_0$ (existence).

La méthode 1 est la plus rapide en dimension finie ; la méthode 2 donne en plus la formule de la projection sur $\text{Ker } f$ parallèlement à $\text{Vect}(x_0)$ et reste valable sans hypothèse de dimension.

Conclusion

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect}(x_0).$$

d) Une application linéaire nulle sur deux sous-espaces supplémentaires est nulle.

$h = g(x_0)f - f(x_0)g$ est une combinaison linéaire de formes linéaires, donc $h \in E^*$.

Sur $\text{Ker } f$: si $y \in \text{Ker } f$, alors $f(y) = 0$ et, d'après 5a, $g(y) = 0$, donc $h(y) = 0$.

Sur $\text{Vect}(x_0)$: $h(x_0) = g(x_0)f(x_0) - f(x_0)g(x_0) = 0$, donc par linéarité $h(\lambda x_0) = 0$ pour tout réel λ .

Pour $x \in E$, on écrit d'après 5c $x = y + \lambda x_0$ avec $y \in \text{Ker } f$, et $h(x) = h(y) + \lambda h(x_0) = 0$.

Conclusion

h est l'application nulle.

e) On exploite $h = 0$ en divisant par $f(x_0) \neq 0$.

De $g(x_0)f = f(x_0)g$ et $f(x_0) \neq 0$, on tire $g = \frac{g(x_0)}{f(x_0)}f$. De plus $g(x_0) \neq 0$: sinon g serait nulle, ce qui est exclu.

Conclusion

f et g sont proportionnelles : il existe un réel $\lambda = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} \neq 0$ tel que $g = \lambda f$. Deux formes linéaires non nulles dont les noyaux sont emboîtés sont donc colinéaires (et ont le même noyau).

Partie II - Hyperplans et formes linéaires

6. Soit H un hyperplan de E .

a) On applique le théorème de la base incomplète.

La famille $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une base de H , donc une famille libre de E . D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en une base de E . Comme $\dim E = n$, toute base de E a n vecteurs : on ajoute exactement un vecteur e_n .

Conclusion

il existe $e_n \in E$ tel que $\beta = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E .

b) Définition correcte : une application linéaire est entièrement et uniquement déterminée par les images des vecteurs d'une base. Comme β est une base de E , il existe une unique application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ prenant les valeurs imposées sur

$e_1, \dots, e_n$; explicitement, si

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

alors $\varphi(x) = x_n$.

Pour l'égalité $\text{Ker } \varphi = H$, deux méthodes sont naturelles.

Méthode 1 — Calcul direct en coordonnées.

Soit

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$$

(coordonnées uniques dans la base β). Alors $\varphi(x) = x_n$, donc $x \in \text{Ker } \varphi$ si et seulement si $x_n = 0$, c'est-à-dire $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$.

Méthode 2 — Inclusion et dimensions.

Pour $i \leq n-1$, $\varphi(e_i) = 0$, donc par linéarité φ s'annule sur $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = H$: $H \subset \text{Ker } \varphi$. Comme $\varphi(e_n) = 1$, φ n'est pas nulle, donc $\text{Ker } \varphi$ est un hyperplan (2c), de dimension $n-1 = \dim H$. D'où l'égalité.

La méthode 1 donne une description complète du noyau ; la méthode 2 illustre le raisonnement « inclusion plus égalité des dimensions », utile lorsqu'aucune base n'est disponible.

Conclusion

φ est bien définie, non nulle, et $\text{Ker } \varphi = H$. Tout hyperplan de E est donc le noyau d'une forme linéaire non nulle.

7. On traduit l'appartenance au noyau coordonnée par coordonnée.

Pour $x \in E$:

$$x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff (f_1(x), \dots, f_p(x)) = (0, \dots, 0) \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, x$$

$$\in \text{Ker } f_i \iff x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i.$$

Conclusion

$$\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i.$$

8. On suppose f surjective.

a) Comme f est surjective, tout vecteur de $\mathbb{R}^p$ admet un antécédent par f ; c'est le cas de $\varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Conclusion

il existe $x \in E$ tel que $f(x) = \varepsilon_1$, c'est-à-dire $f_1(x) = 1$ et $f_i(x) = 0$ pour $i \geq 2$.

b) On évalue une combinaison linéaire nulle des f_i en des antécédents des vecteurs de la base canonique.

Par le même argument qu'en 8a, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, il existe $x_j \in E$ tel que $f(x_j) = \varepsilon_j$, c'est-à-dire $f_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et $f_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0_{E^*}.$$

En évaluant en x_j :

$$0 = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i(x_j) = \lambda_j.$$

Ceci vaut pour tout j , donc tous les λ_j sont nuls.

Conclusion

la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est libre dans E^* .

9. On suppose f non surjective.

a) $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ distinct de $\mathbb{R}^p$. S'il était de dimension p , il serait égal à $\mathbb{R}^p$.

Conclusion

$m = \dim \text{Im } f \leq p - 1$.

b) On complète une base de $\text{Im } f$ et on retire le dernier vecteur.

La famille $(e_1, \dots, e_m)$ est libre dans $\mathbb{R}^p$ (si $m = 0$, c'est la famille vide). Par le théorème de la base incomplète, on la complète en une base $(e_1, \dots, e_p)$ de $\mathbb{R}^p$. Posons $H = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{p-1})$.

La famille $(e_1, \dots, e_{p-1})$ est libre (sous-famille d'une base), donc $\dim H = p - 1$: H est un hyperplan de $\mathbb{R}^p$. Comme $m \leq p - 1$, chaque e_i avec $i \leq m$ appartient à H , donc $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, \dots, e_m) \subset H$.

Conclusion

$\text{Im } f$ est inclus dans un hyperplan H de $\mathbb{R}^p$.

c) On applique la question 6 dans $\mathbb{R}^p$, puis on compose par f .

La question 6 a été établie pour un espace quelconque de dimension finie au moins 2 ; elle s'applique à $\mathbb{R}^p$ puisque $p \geq 2$. Il existe donc une forme linéaire non nulle ψ sur $\mathbb{R}^p$ telle que $\text{Ker } \psi = H$.

Posons $a_i = \psi(\varepsilon_i)$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$. Par linéarité, pour tout $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\psi(y) = \sum_{i=1}^p a_i y_i.$$

Les a_i ne sont pas tous nuls, sinon ψ serait nulle.

Pour tout $x \in E$, $f(x) \in \text{Im } f \subset H = \text{Ker } \psi$, donc :

$$0 = \psi(f(x)) = \sum_{i=1}^p a_i f_i(x).$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^p a_i f_i = 0_{E^*}$$

avec des coefficients non tous nuls.

Conclusion

la famille $(f_1, \dots, f_p)$ est liée dans E^* .

10. On suppose $(f_1, \dots, f_p)$ libre dans E^* .

- a) La question 9 établit : si f n'est pas surjective, alors $(f_1, \dots, f_p)$ est liée. Par contraposée, si $(f_1, \dots, f_p)$ est libre, alors f est surjective.

Conclusion

f est surjective.

- b) On combine le théorème du rang et la question 7.

D'après 10a, $\text{Im } f = \mathbb{R}^p$, donc $\text{rg } f = p$. E étant de dimension finie n , le théorème du rang donne $\dim \text{Ker } f = n - p$. D'après 7, $\text{Ker } f = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i$.

Conclusion

$\dim \left(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker } f_i \right) = n - p$. (On retrouve au passage que $p \leq n$, ce qui est cohérent : une famille libre de E^* a au plus $\dim E^* = n$ éléments.)

Partie III - Formes linéaires et structure euclidienne

E est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f_a(x) = \langle a, x \rangle$.

11. Soit $a \in E$.

- a) Le produit scalaire est linéaire par rapport à sa seconde variable : pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f_a(\lambda x + y) = \langle a, \lambda x + y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle = \lambda f_a(x) + f_a(y).$$

Conclusion

f_a est une forme linéaire sur E , donc $f_a \in E^*$.

b) Par définition, $\text{Ker } f_a = \{x \in E : \langle a, x \rangle = 0\}$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs orthogonaux à a : $\text{Ker } f_a = \text{Vect}(a)^\perp$.

Si $a = 0_E$, alors f_a est nulle et $\text{Ker } f_a = E$.

Si $a \neq 0_E$, alors $f_a(a) = \|a\|^2 > 0$, donc f_a n'est pas nulle et, d'après 2c, $\text{Ker } f_a$ est un hyperplan : c'est l'hyperplan orthogonal à la droite $\text{Vect}(a)$.

Conclusion

$\text{Ker } f_a = \text{Vect}(a)^\perp$, égal à E si $a = 0_E$ et hyperplan de E si $a \neq 0_E$.

c) On évalue f_a en a .

Si f_a est nulle, alors en particulier $f_a(a) = \langle a, a \rangle = \|a\|^2 = 0$. Le produit scalaire étant défini positif, $a = 0_E$.

Conclusion

si f_a est l'application nulle, alors $a = 0_E$.

12. Théorème de représentation des formes linéaires.

a) On utilise la linéarité du produit scalaire par rapport à sa première variable.

Soient $a, b \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$:

$$\Phi(\lambda a + b)(x) = \langle \lambda a + b, x \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \langle b, x \rangle = (\lambda \Phi(a) + \Phi(b))(x).$$

Deux applications égales en tout point sont égales, donc $\Phi(\lambda a + b) = \lambda \Phi(a) + \Phi(b)$.

Conclusion

Φ est linéaire (et à valeurs dans E^* d'après 11a).

b) On montre que Φ est injective, puis on conclut par égalité des dimensions.

Injectivité : si $\Phi(a) = 0_{E^*}$, alors f_a est nulle, donc $a = 0_E$ d'après 11c. Ainsi $\text{Ker } \Phi = \{0_E\}$ et Φ est injective.

Dimensions : d'après la question 1, $\dim E = \dim E^* = n$, finie. Une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie est bijective (par le théorème du rang, $\text{rg } \Phi = n - 0 = n = \dim E^*$, donc Φ est surjective).

Conclusion

Φ est un isomorphisme de E sur E^* .

c) On traduit la bijectivité de Φ .

Soit $\varphi \in E^*$. Par surjectivité de Φ , il existe $a \in E$ tel que $\Phi(a) = \varphi$, c'est-à-dire $\varphi(x) = \langle a, x \rangle$ pour tout $x \in E$. Par injectivité, si $b \in E$ vérifie aussi $\varphi(x) = \langle b, x \rangle$ pour tout x , alors $\Phi(a) = \Phi(b)$ et $a = b$.

Conclusion

pour tout $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

13. Application aux formes linéaires sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) On exprime $\text{Tr}(^tAB)$ à l'aide des coefficients, puis on vérifie les quatre propriétés d'un produit scalaire.

Notons $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$. Le coefficient diagonal d'indice (j, j) de ^tAB est

$$\sum_{i=1}^p a_{ij} b_{ij},$$

donc :

$$\text{Tr}(^tAB) = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^p a_{ij}b_{ij}.$$

Bien défini : $(A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$ est à valeurs réelles.

Symétrie : la formule est symétrique en A et B , donc $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$.

Bilinéarité : pour A fixée,

$$B \mapsto \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$$

est linéaire ; par symétrie, l'application est aussi linéaire en A .

Positivité et caractère défini :

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 0,$$

et cette somme de carrés est nulle si et seulement si tous les a_{ij} sont nuls, c'est-à-dire $A = 0$.

Conclusion

$(A, B) \mapsto \text{Tr}(^tAB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

b) Rectification de l'énoncé : le texte original écrit « $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ » alors que la forme linéaire considérée est définie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (la lettre E désigne dans le problème l'espace général) ; l'énoncé adapté écrit $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

On applique le théorème de représentation 12c à l'espace euclidien $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire de 13a.

$\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie p^2 , muni du produit scalaire de 13a. Si $p \geq 2$, on a $p^2 \geq 2$ et les questions 1, 11 et 12 s'appliquent avec $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Si $p = 1$, leurs démonstrations n'utilisent pas l'hypothèse $n \geq 2$ et restent valables ; on peut aussi conclure directement : $\varphi(m) = \varphi(1) m = \text{Tr}(\varphi(1) m)$ pour toute matrice m de taille 1.

D'après 12c, il existe une (unique) matrice $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que, pour toute $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = \langle B, M \rangle = \text{Tr}({}^t B M)$. Posons $A = {}^t B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Conclusion

pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$ pour toute $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ (et cette matrice A est unique, puisque B l'est).

Relevé des adaptations

- Exercice 2, question 5 : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées (figures 1 et 2) ; une description des valeurs lues sur la figure 2 est ajoutée sous les figures.
- Problème, question 13b : rectification d'une erreur d'énoncé, « $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ » remplacé par « $\varphi : \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ », la forme linéaire étant définie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et non sur l'espace général E .

Aucune autre adaptation n'a été nécessaire : les codes de l'énoncé sont déjà écrits en Python (seule l'indentation a été uniformisée à quatre espaces), et le sujet ne fait intervenir ni nombres complexes, ni convergence de type Slutsky, ni critère d'extremum.