



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2021

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

PARTIE A : Étude de deux suites

Dans tout le corrigé, on note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

de sorte que $u_n = H_n - \ln(n+1)$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.

1. a. Il s'agit d'encadrer l'accroissement de $\ln$ entre t et $t+1$. Deux méthodes classiques conviennent.

Méthode 1 — Inégalité des accroissements finis.

Soit $t > 0$. La fonction $\ln$ est continue sur $[t; t+1]$ et dérivable sur $]t; t+1[$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$. Pour tout $x \in [t; t+1]$, on a $t \leq x \leq t+1$, donc, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$:

$$\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t}.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à $\ln$ sur $[t; t+1]$, intervalle de longueur 1, donne alors :

$$\frac{1}{t+1} \times ((t+1) - t) \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t} \times ((t+1) - t).$$

Méthode 2 — Écriture intégrale.

Soit $t > 0$. Comme $\ln$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$, on a

$\ln(t+1) - \ln(t) = \int_t^{t+1} \frac{dx}{x}$. L'encadrement $\frac{1}{t+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{t}$, valable pour tout $x \in [t; t+1]$, s'intègre sur $[t; t+1]$ (bornes dans l'ordre croissant, croissance de l'intégrale) et donne, puisque l'intervalle est de longueur 1 :

$$\frac{1}{t+1} \leq \int_t^{t+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{t}.$$

La première méthode n'utilise que la dérivée; la seconde donne une interprétation géométrique (aire sous l'hyperbole comparée à deux rectangles) qui se réutilise pour comparer sommes et intégrales.

Conclusion

$$\forall t \in]0; +\infty[, \quad \frac{1}{t+1} \leq \ln(t+1) - \ln(t) \leq \frac{1}{t}.$$

b. On étudie le signe des différences successives, puis on montre que les suites sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1}$, donc :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+2) - \ln(n+1)).$$

La question 1.a avec $t = n+1 > 0$ donne $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$: la suite (u_n) est croissante.

De même :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)).$$

La question 1.a avec $t = n > 0$ donne $\ln(n+1) - \ln(n) \geq \frac{1}{n+1}$, donc $v_{n+1} - v_n \leq 0$: la suite (v_n) est décroissante.

Enfin,

$$v_n - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$$

par continuité de $\ln$ en 1.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes (l'une croissante, l'autre décroissante, de différence tendant vers 0). D'après le théorème des suites adjacentes, elles convergent vers une même limite réelle, notée γ .

Conclusion

(u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, et elles convergent vers une même limite γ .

2. On veut montrer que $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$. Pour $n \geq 2$, $\ln(n) > 0$ et :

$$\frac{H_n}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + v_n}{\ln(n)} = 1 + \frac{v_n}{\ln(n)}.$$

Comme (v_n) converge vers γ (donc est bornée) et que $\ln(n) \rightarrow +\infty$, on a $\frac{v_n}{\ln(n)} \rightarrow 0$.

Ainsi $\frac{H_n}{\ln(n)} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u_p)_{p \geq 1}$ est croissante et converge vers γ : pour tout $p \geq n$, $u_n \leq u_p$, et le passage à la limite quand $p \rightarrow +\infty$ dans cette inégalité large donne $u_n \leq \gamma$. De même, (v_p) décroissante de limite γ donne $v_p \leq v_n$ pour $p \geq n$, puis $\gamma \leq v_n$.

Ainsi $u_n \leq \gamma \leq v_n$. Le réel $m_n = \frac{u_n + v_n}{2}$ est le milieu du segment $[u_n; v_n]$, qui contient γ . Précisément :

si $\gamma \leq m_n$, alors $|m_n - \gamma| = m_n - \gamma \leq m_n - u_n = \frac{v_n - u_n}{2};$

si $\gamma \geq m_n$, alors $|m_n - \gamma| = \gamma - m_n \leq v_n - m_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leq \gamma \leq v_n \text{ et } \left| \frac{u_n + v_n}{2} - \gamma \right| \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n).$$

b. Code adapté en Python.

D'après 3.a, $\frac{u_n + v_n}{2}$ est une approximation de γ à 10^{-5} près dès que

$\frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq 10^{-5}$. Cette quantité tend vers 0 (question 1.b), donc un tel n existe et la boucle ci-dessous termine. On peut même le localiser : d'après 1.a avec $t = n$, $\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \leq \frac{1}{2n}$, donc tout $n \geq 50000$ convient.

On calcule H_n par accumulation, en incrémentant n tant que la précision n'est pas atteinte.

Python

```
import numpy as np
```

```
def approx():
```

```

n = 1
H = 1                                # H contient H_n
while np.log(1 + 1/n) / 2 > 10**(-5): # tant que (v_n - u_n)/2 > 10^(-5)
    n = n + 1
    H = H + 1/n
u = H - np.log(n + 1)
v = H - np.log(n)
return (u + v) / 2

```

Variables : n est l'indice courant, H la somme partielle H_n . À la sortie de la boucle while, on a $\frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq 10^{-5}$, et la fonction renvoie $\frac{u_n + v_n}{2}$.

Ce code a été exécuté : il s'arrête pour un indice n voisin de 50000 et renvoie 0,57721566 ..., en accord avec la valeur connue $\gamma \approx 0,5772156649$ (l'écart observé est de l'ordre de 10^{-10} , bien inférieur à 10^{-5} ; les erreurs d'arrondi machine sur la somme sont négligeables à cette précision). Cette exécution illustre le résultat, la garantie de précision venant de 3.a.

Conclusion

la fonction approx ci-dessus renvoie une approximation de γ à 10^{-5} près.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une série

4. Soit $x \in [0; +\infty[$. Pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} = \frac{(k+x) - k}{k(k+x)} = \frac{x}{k(k+x)}.$$

Ce terme est positif et, comme $k+x \geq k > 0$, il vérifie $0 \leq \frac{x}{k(k+x)} \leq \frac{x}{k^2}$.

La série

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

est une série de Riemann convergente ($2 > 1$), donc

$$\sum \frac{x}{k^2}$$

converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série

$$\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

converge.

Conclusion

pour tout $x \geq 0$, la série converge, et $S(x)$ est bien défini, avec de plus $S(x) \geq 0$.

5. a. Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls, donc $S(0) = 0$.

Pour $x = 1$, la somme partielle d'ordre $N \geq 1$ est télescopique :

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion

$S(0) = 0$ et $S(1) = 1$.

b. On établit les deux égalités séparément, puis on passe à la limite.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{k + \frac{1}{2}} = \frac{2}{2k+1}$:

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = H_n - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

On sépare dans H_{2n+1} les termes d'indice pair et impair :

$$H_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}H_n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = H_{2n+1} - \frac{1}{2}H_n - 1$$

et :

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right) = H_n - 2H_{2n+1} + H_n + 2 = 2 - 2(H_{2n+1} - H_n) = 2 - 2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k}.$$

Pour la seconde égalité, on isole le terme d'indice $2n+1$ et on pose $k = n+j$:

$$2 \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{k} = \frac{2}{2n+1} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{n+j} = \frac{2}{2n+1} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{2}{1 + \frac{j}{n}}.$$

D'où l'égalité demandée.

Calcul de $S\left(\frac{1}{2}\right)$. Par définition, $S\left(\frac{1}{2}\right)$ est la limite quand $n \rightarrow +\infty$ du membre de gauche. Il suffit donc de trouver la limite du membre de droite.

Méthode 1 — Sommes de Riemann.

La fonction $g : t \mapsto \frac{2}{1+t}$ est continue sur $[0; 1]$. D'après le théorème sur les sommes de Riemann :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g\left(\frac{j}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{2}{1+t} dt = [2 \ln(1+t)]_0^1 = 2 \ln 2.$$

Comme $\frac{2}{2n+1} \rightarrow 0$, on obtient $S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 0 - 2 \ln 2$.

Méthode 2 — Utilisation de la constante γ .

D'après la partie A, $H_p = \ln(p) + v_p$ avec $v_p \rightarrow \gamma$. Donc :

$$H_{2n+1} - H_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right) + v_{2n+1} - v_n = \ln\left(2 + \frac{1}{n}\right) + v_{2n+1} - v_n.$$

Comme (v_{2n+1}) est une suite extraite de (v_n) , elle converge aussi vers γ , et par continuité de $\ln$ en 2, $H_{2n+1} - H_n \rightarrow \ln 2$. La première égalité donne alors $S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \ln 2$.

La méthode 1 est celle suggérée par la forme de l'énoncé ; la méthode 2 réinvestit la partie A et montre que $H_{2n} - H_n \rightarrow \ln 2$, résultat classique très utile.

Conclusion

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 \ln 2.$$

6. a. Soient $x, y \geq 0$. Les séries définissant $S(x)$ et $S(y)$ convergent (question 4), donc, par linéarité des séries convergentes, la série de terme général

$$\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) - \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+y}\right) = \frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+y} = \frac{y-x}{(k+x)(k+y)}$$

converge et a pour somme $S(y) - S(x)$.

Si $y = x$, l'égalité demandée s'écrit $0 = 0$. Si $y \neq x$, la série

$$\sum \frac{y-x}{(k+x)(k+y)}$$

converge, donc (en multipliant par $\frac{1}{y-x}$) la série

$$\sum \frac{1}{(k+x)(k+y)}$$

converge, et par linéarité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(k+x)(k+y)} = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

Notons que cette dernière série converge même pour $x = y$, puisque

$$0 < \frac{1}{(k+x)(k+y)} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Conclusion

$$\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2, \quad S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+y)}.$$

- b.** Soient $0 \leq x \leq y$. Chaque terme $\frac{1}{(k+x)(k+y)}$ est strictement positif, donc la somme de la série est positive (et même strictement positive). Comme $y - x \geq 0$, la question 6.a donne $S(y) - S(x) \geq 0$.

Conclusion

S est croissante sur $[0; +\infty[$ (et même strictement croissante).

- c. Soient $x \geq 0$ et $h \neq 0$ tel que $x + h \geq 0$. La question 6.a avec $y = x + h$ donne, après division par $h \neq 0$:

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)(k+x+h)}.$$

La série

$$\sum \frac{1}{(k+x)^2}$$

converge par comparaison à

$$\sum \frac{1}{k^2}$$

(car $0 < \frac{1}{(k+x)^2} \leq \frac{1}{k^2}$). Par linéarité :

$$\begin{aligned} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} w_k, \quad \text{où} \quad w_k = \frac{1}{(k+x)(k+x+h)} - \frac{1}{(k+x)^2} \\ &= \frac{-h}{(k+x)^2(k+x+h)}. \end{aligned}$$

Majoration de $|w_k|$: on a $k+x \geq k > 0$ et $k+x+h \geq k > 0$ (car $x+h \geq 0$), donc $(k+x)^2(k+x+h) \geq k^3$ et :

$$|w_k| \leq \frac{|h|}{k^3}.$$

La série

$$\sum \frac{1}{k^3}$$

converge (Riemann, $3 > 1$), donc

$$\sum w_k$$

converge absolument. Pour tout $N \geq 1$, l'inégalité triangulaire donne

$$\left| \sum_{k=1}^N w_k \right| \leq \sum_{k=1}^N |w_k| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3},$$

et le passage à la limite quand $N \rightarrow +\infty$ donne :

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2} \right| \leq |h| \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

Dérivabilité. Le membre de droite tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$ (le réel

$$\sum \frac{1}{k^3}$$

est fixé). Par encadrement, le taux d'accroissement $\frac{S(x+h) - S(x)}{h}$ tend vers

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(k+x)^2}$$

quand $h \rightarrow 0$ (avec $h \neq 0$ et $x+h \geq 0$). Pour $x > 0$, cela concerne h de signe quelconque ; pour $x = 0$, seulement $h > 0$, ce qui correspond à la dérivabilité à droite en 0, c'est-à-dire la dérivabilité sur l'intervalle $[0; +\infty[$ en son extrémité.

Conclusion

S est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$\forall x \geq 0, S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}.$$

7. a. Soit $x \geq 0$. Par linéarité (les deux séries convergent),

$$S(x+1) - S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+x+1} \right).$$

La somme partielle d'ordre N est télescopique :

$$\sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{k+x} - \frac{1}{k+1+x} \right) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{N+1+x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x}.$$

Conclusion

$$\forall x \geq 0, S(x+1) = S(x) + \frac{1}{x+1}.$$

b. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n = 1$: $S(1) = 1 = H_1$ (question 5.a). Si $S(n) = H_n$ pour un $n \geq 1$, alors 7.a avec $x = n$ donne $S(n+1) = H_n + \frac{1}{n+1} = H_{n+1}$.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

c. On encadre $S(x)$ par des valeurs aux entiers voisins, puis par des logarithmes.

Encadrement de H_n . Pour $n \geq 1$, les monotonies de la question 1.b donnent

$u_n \geq u_1 = 1 - \ln 2 > 0$ et $v_n \leq v_1 = 1$. Donc :

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n).$$

Encadrement de $S(x)$. Soit $x \geq 1$ et $N = \lfloor x \rfloor \geq 1$, de sorte que $N \leq x < N+1$. Par croissance de S (question 6.b) et d'après 7.b :

$$H_N = S(N) \leq S(x) \leq S(N+1) = H_{N+1}.$$

Comme $N+1 > x$, on a $H_N \geq \ln(N+1) \geq \ln(x)$; comme $N+1 \leq x+1$, on a $H_{N+1} \leq 1 + \ln(N+1) \leq 1 + \ln(x+1)$. Ainsi, pour tout $x \geq 1$:

$$\ln(x) \leq S(x) \leq 1 + \ln(x+1).$$

Conclusion. Pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$ et :

$$1 \leq \frac{S(x)}{\ln(x)} \leq \frac{1 + \ln(x) + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)} = 1 + \frac{1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\ln(x)}.$$

Le numérateur $1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ tend vers 1 et $\ln(x) \rightarrow +\infty$, donc le majorant tend vers 1.

Par encadrement, $\frac{S(x)}{\ln(x)} \rightarrow 1$.

Conclusion

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x).$$

8. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La somme étant finie, on intègre terme à terme par linéarité de l'intégrale sur le segment $[0; 1]$:

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - [\ln(k+x)]_0^1 \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)).$$

La dernière somme est télescopique et vaut $\ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$.

Conclusion

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) dx = H_n - \ln(n+1) = u_n.$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons, pour $x \in [0; 1]$,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$$

et

$$\rho_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x}{k(k+x)}$$

(reste d'ordre n d'une série convergente).

La fonction S est dérivable donc continue sur $[0; 1]$, et S_n est continue sur $[0; 1]$:

$\int_0^1 S(x) dx$ existe et, d'après 8.a,

$$\int_0^1 S(x) dx - u_n = \int_0^1 (S(x) - S_n(x)) dx = \int_0^1 \rho_n(x) dx.$$

Pour $x \in [0; 1]$ et $k \geq n+1$, $0 \leq \frac{x}{k(k+x)} \leq \frac{x}{k^2}$ (question 4). En sommant ces inégalités pour k de $n+1$ à N puis en faisant tendre N vers $+\infty$ (les séries convergent) :

$$0 \leq \rho_n(x) \leq x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

On intègre cet encadrement de fonctions continues sur $[0; 1]$ (croissance de l'intégrale), avec $\int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2}$.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_0^1 S(x) \, dx - u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

c. Le reste

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

d'une série convergente tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Par encadrement,

$\int_0^1 S(x) \, dx - u_n \rightarrow 0$, c'est-à-dire $u_n \rightarrow \int_0^1 S(x) \, dx$. Or $u_n \rightarrow \gamma$ (question 1.b) ; par unicité de la limite :

Conclusion

$$\int_0^1 S(x) \, dx = \gamma.$$

PARTIE C : Application en probabilité

9. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 (elle est nulle sur $] -\infty; 1[$ et égale à $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, continue, sur $[1; +\infty[$).

Pour $A \geq 1$, $\int_1^A \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = 1 - \frac{1}{A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et vaut $0 + 1 = 1$.

Conclusion

f est une densité de probabilité.

10. a. Soit F la fonction de répartition de X : $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Si $x < 1$, $F(x) = 0$. Si $x \geq 1$, $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2} = 1 - \frac{1}{x}$.

Conclusion

$F(x) = 0$ si $x < 1$ et $F(x) = 1 - \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$.

b. X admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt$ converge, c'est-à-dire si $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ converge. Or $\int_1^A \frac{dt}{t} = \ln(A) \rightarrow +\infty$: cette intégrale (de Riemann, exposant 1) diverge.

Conclusion

X n'admet pas d'espérance.

11. a. On décompose l'événement $(Y \leq x)$ selon la valeur de la partie entière de X .

Soit $x \in [0; 1[$. D'abord, $P(X < 1) = F(1) - P(X = 1) \leq F(1) = 0$, donc l'événement $(X < 1)$ est négligeable.

Soit $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \geq 1$ et notons $k = \lfloor X(\omega) \rfloor \in \mathbb{N}^*$, de sorte que $k \leq X(\omega) < k + 1$ et $Y(\omega) = X(\omega) - k$. Alors $Y(\omega) \leq x$ équivaut à $X(\omega) \leq k + x$. Réciproquement, si $k \leq X(\omega) \leq k + x$ pour un $k \in \mathbb{N}^*$, alors, comme $k + x < k + 1$, on a $\lfloor X(\omega) \rfloor = k$ et $Y(\omega) \leq x$. On obtient :

$$(Y \leq x) \cap (X \geq 1) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (k \leq X \leq k+x).$$

Ces événements sont deux à deux incompatibles, puisque les intervalles

$[k; k+x] \subset [k; k+1[$ sont disjoints. Par σ -additivité, puis comme $(X < 1)$ est négligeable :

$$P(Y \leq x) = P((Y \leq x) \cap (X \geq 1)) + P((Y \leq x) \cap (X < 1)) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x) + 0.$$

Pour $k \geq 1$, comme X est à densité, $P(X = k) = 0$, donc :

$$P(k \leq X \leq k+x) = F(k+x) - F(k) = \left(1 - \frac{1}{k+x}\right) - \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}.$$

Conclusion

$$P(Y \leq x) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(k \leq X \leq k+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) = S(x).$$

b. Notons G la fonction de répartition de Y . Comme $0 \leq Y < 1$ (propriété de la partie entière) :

si $x < 0$, $(Y \leq x) = \emptyset$ et $G(x) = 0$;

si $x \in [0; 1[$, $G(x) = S(x)$ d'après 11.a;

si $x \geq 1$, $(Y \leq x) = \Omega$ et $G(x) = 1$.

Conclusion

$$G(x) = 0 \text{ si } x < 0, G(x) = S(x) \text{ si } 0 \leq x < 1, G(x) = 1 \text{ si } x \geq 1.$$

c. On vérifie que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sauf en un nombre fini de points.

Continuité. G est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ (constante), et sur $]0; 1[$ car S y est dérivable. En $0 : G(0) = S(0) = 0$, la limite à gauche vaut 0 et la limite à droite vaut $S(0) = 0$ par continuité de S . En $1 : G(1) = 1$, la limite à droite vaut 1 et la limite à gauche vaut $\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = S(1) = 1$ (continuité de S et question 5.a). Donc G est continue sur $\mathbb{R}$.

Régularité. G est de classe C^1 sur $] -\infty; 0[$, sur $]1; +\infty[$ et sur $]0; 1[$, car S' est continue (résultat admis par l'énoncé).

Ainsi Y est une variable à densité, et une densité s'obtient en dérivant G là où elle est C^1 et en choisissant des valeurs arbitraires positives aux points 0 et 1.

Conclusion

Y est à densité, et une densité de Y est g définie par

$$g(x) = S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$$

si $x \in [0; 1[$, et $g(x) = 0$ sinon.

12. Existence. g est nulle hors de $[0; 1[$ et, sur $[0; 1]$, la fonction $x \mapsto xS'(x)$ est continue.

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|g(x) dx = \int_0^1 xS'(x) dx$ est l'intégrale d'une fonction continue sur un segment : elle converge. Y admet donc une espérance (on peut aussi dire : Y est bornée, à valeurs dans $[0; 1]$), et $E(Y) = \int_0^1 xS'(x) dx$.

Calcul. Les fonctions $x \mapsto x$ et S sont de classe C^1 sur le segment $[0; 1]$ (S' est continue). Par intégration par parties :

$$E(Y) = \int_0^1 xS'(x) \, dx = [xS(x)]_0^1 - \int_0^1 S(x) \, dx = 1 \cdot S(1) - 0 \cdot S(0) - \gamma = 1 - \gamma,$$

en utilisant $S(1) = 1$ (question 5.a) et $\int_0^1 S = \gamma$ (question 8.c).

Conclusion

Y admet une espérance et $E(Y) = 1 - \gamma$.

PROBLÈME 2

Rappel utile dans tout le problème : un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension d possède au plus d valeurs propres distinctes, car des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. S'il en possède exactement d , il est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1.

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

1. a. Calcul de $\varphi_n(1)$. Pour $P = 1$, $P' = P'' = 0$, donc $\varphi_n(1) = X$.

Calcul de $\varphi_n(X^i)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a $(X^i)' = iX^{i-1}$ et $(X^i)'' = i(i-1)X^{i-2}$ (ce dernier terme est nul si $i = 1$, et l'égalité $X(X-1)^2 \cdot i(i-1)X^{i-2} = i(i-1)X^{i-1}(X-1)^2$ reste valable pour $i = 1$ puisque les deux membres sont nuls). On développe :

$$\begin{aligned} ((2n-1)X+1)(X-1) &= (2n-1)X^2 - (2n-2)X - 1, & X(X-1)^2 &= X^3 - 2X^2 \\ &+ X. \end{aligned}$$

Donc :

$$((2n-1)X+1)(X-1) iX^{i-1} = i(2n-1)X^{i+1} - i(2n-2)X^i - iX^{i-1},$$

$$X(X-1)^2 i(i-1)X^{i-2} = i(i-1)X^{i+1} - 2i(i-1)X^i + i(i-1)X^{i-1}.$$

On regroupe dans $\varphi_n(X^i) = X^{i+1} - \frac{1}{n^2}(\dots) + \frac{1}{n^2}(\dots)$:

coefficient de X^{i+1} : $1 - \frac{i(2n-1) - i(i-1)}{n^2} = \frac{n^2 - 2ni + i^2}{n^2} = \frac{(n-i)^2}{n^2};$

coefficient de X^i : $\frac{i(2n-2) - 2i(i-1)}{n^2} = \frac{2ni - 2i^2}{n^2} = \frac{2i(n-i)}{n^2};$

coefficient de X^{i-1} : $\frac{i + i(i-1)}{n^2} = \frac{i^2}{n^2}.$

Conclusion

$$\varphi_n(1) = X \text{ et}$$

$$\forall i \in [1; n], \varphi_n(X^i) = \frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1}.$$

Remarque : la formule reste vraie pour $i = 0$ si l'on convient que le terme $\frac{0^2}{n^2} X^{-1}$ est nul, puisqu'elle donne alors $\frac{n^2}{n^2} X = X$. On utilisera cette convention dans la suite.

b. Linéarité. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne

$$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q' \text{ et } (\lambda P + Q)'' = \lambda P'' + Q''; \text{ chaque terme de } \varphi_n(P) \text{ dépend linéairement de } P, \text{ donc } \varphi_n(\lambda P + Q) = \lambda \varphi_n(P) + \varphi_n(Q).$$

Stabilité. Par linéarité, il suffit de vérifier que les images des vecteurs de la base canonique sont dans $\mathbb{R}_n[X]$. D'après 1.a, $\varphi_n(1) = X \in \mathbb{R}_n[X]$ car $n \geq 1$. Pour

$1 \leq i \leq n-1$, $\varphi_n(X^i)$ est combinaison linéaire de X^{i+1} , X^i , X^{i-1} , donc de degré au plus $i+1 \leq n$. Pour $i = n$, les coefficients de X^{n+1} et de X^n sont nuls, donc

$\varphi_n(X^n) = X^{n-1} \in \mathbb{R}_n[X]$. Toute combinaison linéaire de ces images est donc dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion

φ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. a. Pour $n = 2$, la question 1.a donne :

$$\varphi_2(1) = X, \quad \varphi_2(X) = \frac{1}{4}X^2 + \frac{2}{4}X + \frac{1}{4}, \quad \varphi_2(X^2) = 0 \cdot X^3 + 0 \cdot X^2 + \frac{4}{4}X = X.$$

Les colonnes de A_2 sont les coordonnées de ces polynômes dans $(1, X, X^2)$: $(0, 1, 0)$, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ et $(0, 1, 0)$.

Conclusion

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Il s'agit de déterminer les réels λ pour lesquels le système $A_2V = \lambda V$ admet une solution non nulle, sans utiliser de déterminant. Deux méthodes naturelles.

Méthode 1 — Résolution du système $A_2V = \lambda V$ selon λ .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le système $A_2V = \lambda V$ s'écrit :

$$\frac{y}{4} = \lambda x, \quad x + \frac{y}{2} + z = \lambda y, \quad \frac{y}{4} = \lambda z.$$

Cas $\lambda = 0$: le système équivaut à $y = 0$ et $z = -x$; il admet la solution non nulle $(1, 0, -1)$, donc 0 est valeur propre et

$$E_0(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Cas $\lambda \neq 0$: les première et troisième équations donnent $x = z = \frac{y}{4\lambda}$; la deuxième devient

$$\frac{y}{2\lambda} + \frac{y}{2} - \lambda y = 0, \quad \text{soit} \quad y \frac{1 + \lambda - 2\lambda^2}{2\lambda} = 0, \quad \text{avec} \quad 1 + \lambda - 2\lambda^2 = -(2\lambda + 1)(\lambda - 1).$$

Si $\lambda \notin \left\{ -\frac{1}{2}, 1 \right\}$, alors $y = 0$, puis $x = z = 0$: seule la solution nulle existe, et λ n'est pas valeur propre. Si $\lambda = 1$, les solutions sont $x = z = \frac{y}{4}$, c'est-à-dire

$$V \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, les solutions sont $x = z = -\frac{y}{2}$, c'est-à-dire

$$V \in \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Méthode 2 — Vecteurs propres explicites et argument de dimension.

On vérifie par le calcul :

$$A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 0, 1 et $-\frac{1}{2}$ sont valeurs propres de A_2 . Comme $A_2 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ possède au plus 3 valeurs propres distinctes, son spectre est exactement $\left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$. Chaque sous-espace propre est alors de dimension au moins 1, et la somme de leurs dimensions est au plus 3 (ils sont en somme directe), donc chacun est de dimension 1, engendré par le vecteur trouvé.

La méthode 1 est systématique et trouve les valeurs propres sans les connaître à l'avance ; la méthode 2 est plus rapide lorsque le spectre est donné, et repose sur le comptage des valeurs propres.

Diagonalisabilité. A_2 est une matrice d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable.

Conclusion

$$\text{Sp}(A_2) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}, A_2 \text{ est diagonalisable, et}$$

$$E_{-1/2}(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad E_0(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad E_1(A_2) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

- c. A_2 représente φ_2 dans la base $\mathcal{B}_2$: φ_2 et A_2 ont le même spectre, et P est vecteur propre de φ_2 si et seulement si sa colonne de coordonnées est vecteur propre de A_2 pour la même valeur propre. Les vecteurs propres trouvés correspondent aux polynômes :

$$1 - 2X + X^2 = (X - 1)^2 \quad (\lambda = -\frac{1}{2}), \quad 1 - X^2 \quad (\lambda = 0), \quad 1 + 4X + X^2 \quad (\lambda = 1).$$

Ce sont trois vecteurs propres associés à trois valeurs propres distinctes : ils forment une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3, donc une base.

Conclusion

$\text{Sp}(\varphi_2) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$ et $((X-1)^2, 1-X^2, 1+4X+X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ_2 .

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P = (X-1)^n$, polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. On a $P' = n(X-1)^{n-1}$ et $X(X-1)^2 P'' = n(n-1)X(X-1)^n$ (pour $n=1$, les deux membres de cette dernière égalité sont nuls). Donc :

$$\begin{aligned} \varphi_n(P) &= X(X-1)^n - \frac{1}{n^2}((2n-1)X+1)n(X-1)^n + \frac{n(n-1)}{n^2}X(X-1)^n \\ &= (X-1)^n \left[X - \frac{(2n-1)X+1}{n} + \frac{(n-1)X}{n} \right]. \end{aligned}$$

Le crochet vaut $\frac{nX - (2n-1)X - 1 + (n-1)X}{n} = \frac{-1}{n}$.

Conclusion

$\varphi_n((X-1)^n) = -\frac{1}{n}(X-1)^n$ avec $(X-1)^n \neq 0$: $(X-1)^n$ est vecteur propre de φ_n associé à la valeur propre $-\frac{1}{n}$.

4. a. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en évaluant en 1, les deux derniers termes de $\varphi_n(P)$ s'annulent grâce au facteur $(X - 1)$:

$$(\varphi_n(P))(1) = 1 \cdot P(1) - 0 + 0 = P(1).$$

Avec $P = X^i$, on obtient $(\varphi_n(X^i))(1) = 1^i = 1$.

Conclusion

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, (\varphi_n(X^i))(1) = 1.$$

- b. Notons $A_n = (a_{p,q})_{0 \leq p, q \leq n}$, de sorte que

$$\varphi_n(X^q) = \sum_{p=0}^n a_{p,q} X^p$$

pour tout q . En évaluant en 1 et d'après 4.a :

$$\sum_{p=0}^n a_{p,q} = (\varphi_n(X^q))(1) = 1.$$

Conclusion

la somme des coefficients de chaque colonne de A_n vaut 1.

- c. Deux méthodes classiques permettent de conclure.

Méthode 1 — Transposée.

Soit $U \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ la colonne dont tous les coefficients valent 1. La q -ième coordonnée

de ${}^t A_n U$ est

$$\sum_p a_{p,q} = 1$$

(question 4.b), donc ${}^t A_n U = U$ avec $U \neq 0$. Ainsi ${}^t A_n - I_{n+1}$ n'est pas injective, donc son rang est strictement inférieur à $n + 1$. Comme une matrice et sa transposée ont le même rang,

$$\text{rg}(A_n - I_{n+1}) = \text{rg}({}^t(A_n - I_{n+1})) = \text{rg}({}^t A_n - I_{n+1}) < n + 1,$$

donc $A_n - I_{n+1}$ n'est pas inversible : 1 est valeur propre de A_n , donc de φ_n .

Méthode 2 — Forme linéaire d'évaluation.

Soit $\psi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto P(1)$, forme linéaire non nulle ($\psi(1) = 1$). D'après le calcul de 4.a, $\psi \circ \varphi_n = \psi$, donc $\psi \circ (\varphi_n - \text{id}) = 0$, c'est-à-dire $\text{Im}(\varphi_n - \text{id}) \subset \text{Ker}(\psi)$. Or $\text{Ker}(\psi)$ est un hyperplan, distinct de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\varphi_n - \text{id}$ n'est pas surjectif ; par le théorème du rang en dimension finie, il n'est pas injectif : $\text{Ker}(\varphi_n - \text{id}) \neq \{0\}$.

La méthode 1 exploite la propriété matricielle de 4.b (colonnes de somme 1, situation fréquente pour les matrices de transition) ; la méthode 2 travaille directement sur l'endomorphisme et évite la transposition.

Conclusion

1 est valeur propre de φ_n .

5. a. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q = (X - 1)P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. On a $Q' = P + (X - 1)P'$ et $Q'' = 2P' + (X - 1)P''$. Par définition de φ_{n+1} :

$$(n + 1)^2 \varphi_{n+1}(Q) = (n + 1)^2 X(X - 1)P - ((2n + 1)X + 1)(X - 1)[P + (X - 1)P']$$

$$+ X(X-1)^2[2P' + (X-1)P''].$$

On met $(X-1)$ en facteur. Le facteur restant est :

$$[(n+1)^2X - (2n+1)X - 1]P + (X-1)P'[-(2n+1)X - 1 + 2X] + X(X-1)^2P''.$$

Or $(n+1)^2X - (2n+1)X - 1 = n^2X - 1$ et $-(2n+1)X - 1 + 2X = -((2n-1)X + 1)$.

Le facteur restant vaut donc :

$$n^2XP - ((2n-1)X + 1)(X-1)P' + X(X-1)^2P'' - P = n^2\varphi_n(P) - P.$$

Conclusion

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], (n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) = (X-1)(n^2\varphi_n(P) - P).$$

b. Soit $P \neq 0$ tel que $\varphi_n(P) = \lambda P$. D'après 5.a :

$$\begin{aligned} (n+1)^2\varphi_{n+1}((X-1)P) &= (X-1)(n^2\lambda - 1)P, \quad \text{donc} \quad \varphi_{n+1}((X-1)P) \\ &= \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}(X-1)P. \end{aligned}$$

De plus $(X-1)P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ et $(X-1)P \neq 0$ (produit de deux polynômes non nuls).

Conclusion

$$(X-1)P \text{ est vecteur propre de } \varphi_{n+1} \text{ associé à la valeur propre } \frac{n^2\lambda - 1}{(n+1)^2}.$$

6. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, notons $\lambda_j^{(n)} = \frac{-n + j(j+1)}{n^2}$. Comme $j \mapsto j(j+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, on a $\lambda_0^{(n)} < \lambda_1^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$: ces $n+1$ réels sont distincts. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{H}(n)$: $\text{Sp}(\varphi_n) = \{\lambda_j^{(n)} ; j \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.

Initialisation ($n = 1$). D'après 1.a, $\varphi_1(1) = X$ et $\varphi_1(X) = 0 \cdot X^2 + 0 \cdot X + 1 = 1$. Donc $\varphi_1(X+1) = X+1$ et $\varphi_1(X-1) = 1-X = -(X-1)$: 1 et -1 sont valeurs propres de φ_1 , qui en a au plus 2 ($\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$). Ainsi $\text{Sp}(\varphi_1) = \{-1, 1\} = \{\lambda_0^{(1)}, \lambda_1^{(1)}\}$ puisque $\lambda_0^{(1)} = -1$ et $\lambda_1^{(1)} = 1$.

Hérédité. Supposons $\mathcal{H}(n)$ pour un $n \geq 1$. Pour $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\lambda_j^{(n)}$ est valeur propre de φ_n ; d'après 5.b, le réel

$$\frac{n^2 \lambda_j^{(n)} - 1}{(n+1)^2} = \frac{-n + j(j+1) - 1}{(n+1)^2} = \frac{-(n+1) + j(j+1)}{(n+1)^2} = \lambda_j^{(n+1)}$$

est valeur propre de φ_{n+1} . De plus, d'après 4.c, 1 est valeur propre de φ_{n+1} , et

$$\lambda_{n+1}^{(n+1)} = \frac{-(n+1) + (n+1)(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Ainsi les $n+2$ réels distincts $\lambda_0^{(n+1)}, \dots, \lambda_{n+1}^{(n+1)}$ sont valeurs propres de φ_{n+1} . Comme $\dim \mathbb{R}_{n+1}[X] = n+2$, φ_{n+1} n'a pas d'autre valeur propre : $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \text{Sp}(\varphi_n) = \left\{ \frac{-n + j(j+1)}{n^2} ; j \in \llbracket 0; n \rrbracket \right\}.$$

- b. D'après 6.a, φ_n possède $n+1$ valeurs propres distinctes, et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$. Les sous-espaces propres sont en somme directe, chacun de dimension au moins 1, et la somme de leurs dimensions est au plus $n+1$: chacun est de dimension exactement 1, et la somme de leurs dimensions vaut $n+1$.

Conclusion

φ_n est diagonalisable et chacun de ses $n + 1$ sous-espaces propres est de dimension 1.

7. a. Par linéarité de φ_n et d'après 1.a (avec la convention de la remarque pour $i = 0$) :

$$\varphi_n(\Pi_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \left[\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} \right].$$

Les termes en X^{n+1} (pour $i = n$) et en X^{-1} (pour $i = 0$) ont un coefficient nul. Pour $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le coefficient de X^m provient de $i = m - 1$ (si $m \geq 1$), de $i = m$ et de $i = m + 1$ (si $m \leq n - 1$) :

$$c_m = \frac{1}{n^2} \left[\binom{n}{m-1}^2 (n-m+1)^2 + \binom{n}{m}^2 2m(n-m) + \binom{n}{m+1}^2 (m+1)^2 \right].$$

On utilise les relations, valables pour $1 \leq m \leq n$ et $0 \leq m \leq n - 1$ respectivement :

$$\begin{aligned} (n-m+1) \binom{n}{m-1} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = m \binom{n}{m}, & (m+1) \binom{n}{m+1} \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!} = (n-m) \binom{n}{m}. \end{aligned}$$

Elles restent compatibles avec les cas extrêmes : pour $m = 0$, le terme absent ($i = -1$) correspond à $m \binom{n}{m} = 0$; pour $m = n$, le terme absent ($i = n + 1$) correspond à $(n-m) \binom{n}{m} = 0$. Donc, pour tout $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$c_m = \frac{1}{n^2} \binom{n}{m}^2 [m^2 + 2m(n-m) + (n-m)^2] = \frac{1}{n^2} \binom{n}{m}^2 (m + (n-m))^2 = \binom{n}{m}^2.$$

Conclusion

$$\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n.$$

- b. Π_n est non nul (son coefficient constant vaut 1) et vérifie $\varphi_n(\Pi_n) = \Pi_n$: il appartient au sous-espace propre $E_1(\varphi_n)$, qui est de dimension 1 d'après 6.b.

Conclusion

$$E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(\Pi_n).$$

8. a. Les R_j sont des vecteurs propres associés aux $n + 1$ valeurs propres distinctes $\lambda_0, \dots, \lambda_n$: la famille $(R_0, \dots, R_n)$ est libre, de cardinal $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il existe donc $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$P = \sum_{j=0}^n \alpha_j R_j.$$

Pour tout j , une récurrence immédiate donne $\varphi_n^k(R_j) = \lambda_j^k R_j$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: c'est vrai pour $k = 1$, et si $\varphi_n^k(R_j) = \lambda_j^k R_j$, alors $\varphi_n^{k+1}(R_j) = \varphi_n(\lambda_j^k R_j) = \lambda_j^{k+1} R_j$. Par linéarité de φ_n^k :

$$\varphi_n^k(P) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \varphi_n^k(R_j) = \sum_{j=0}^n \alpha_j (\lambda_j)^k R_j.$$

Conclusion

les coordonnées $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ de P dans la base $(R_0, \dots, R_n)$ conviennent.

- b. Énoncé rectifié : l'hypothèse $n \geq 2$ a été ajoutée. En effet, pour $n = 1$, on a $\lambda_0 = -1$ et φ_1 échange 1 et X (question 6.a), donc $\varphi_1^k(1)$ vaut alternativement X et 1 : la suite de polynômes $(\varphi_1^k(1))$ ne converge pas (sa valeur en 0 alterne entre 0 et 1), alors que la conclusion demandée l'exigerait. La partie B n'utilise ce résultat que pour $n \geq 2$.

On suppose donc $n \geq 2$. Encadrement des valeurs propres. La suite $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq n}$ est strictement croissante (question 6.a), avec

$$\lambda_0 = -\frac{1}{n} \geq -\frac{1}{2}, \quad \lambda_{n-1} = \frac{-n + (n-1)n}{n^2} = \frac{n-2}{n} < 1, \quad \lambda_n = 1.$$

Donc, pour $0 \leq j \leq n-1$, $-1 < \lambda_j < 1$, et $(\lambda_j)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

Passage à la limite. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après 8.a :

$$(\varphi_n^k(P))(x) = \alpha_n R_n(x) + \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j (\lambda_j)^k R_j(x) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \alpha_n R_n(x),$$

car la somme est finie et chacun de ses termes tend vers 0.

Enfin, R_n est vecteur propre associé à $\lambda_n = 1$, donc $R_n \in E_1(\varphi_n) = \text{Vect}(\Pi_n)$ (question 7.b) : il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = c \Pi_n$. En posant $\alpha = c \alpha_n$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\varphi_n^k(P))(x) \rightarrow \alpha \Pi_n(x).$$

Conclusion

pour $n \geq 2$, la suite de polynômes $(\varphi_n^k(P))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha \Pi_n$, avec $\alpha = c \alpha_n$.

PARTIE B : Étude d'une expérience aléatoire

Modélisation. « Échanger au hasard une boule de l'urne rouge avec une boule de l'urne bleue » est interprété de la façon usuelle : à chaque épreuve, on tire une boule uniformément dans l'urne rouge et, indépendamment, une boule uniformément dans l'urne bleue, ces tirages ne dépendant du passé qu'à travers la composition actuelle des urnes, puis on échange les deux boules.

Si, à l'issue d'une épreuve, l'urne rouge contient j boules rouges, elle contient $n - j$ boules bleues ; l'urne bleue contient alors les $n - j$ autres boules rouges et $n - (n - j) = j$ boules bleues (c'est la remarque de l'énoncé).

9. Initialement, l'urne rouge ne contient que des boules rouges et l'urne bleue que des boules bleues. La première épreuve échange donc nécessairement une boule rouge (qui quitte l'urne rouge) avec une boule bleue (qui y entre) : l'urne rouge contient alors $n - 1$ boules rouges, quel que soit le résultat.

Conclusion

Z_1 est la variable certaine égale à $n - 1$: $P(Z_1 = n - 1) = 1$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. La variable Z_k est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, donc $((Z_k = j))_{0 \leq j \leq n}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

$$P(Z_{k+1} = i) = \sum_{j=0}^n P((Z_{k+1} = i) \cap (Z_k = j)),$$

avec

$$P((Z_{k+1} = i) \cap (Z_k = j)) = P(Z_k = j) P_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = i)$$

lorsque $P(Z_k = j) > 0$, ce terme étant nul lorsque $P(Z_k = j) = 0$.

Probabilités de transition. Supposons $P(Z_k = j) > 0$. Sachant $(Z_k = j)$, l'urne rouge contient j rouges et $n - j$ bleues, l'urne bleue $n - j$ rouges et j bleues. Le nombre de rouges dans l'urne rouge :

diminue de 1 si l'on tire une rouge dans l'urne rouge et une bleue dans l'urne bleue, avec probabilité $\frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n}$ (indépendance des deux tirages) ;

augmente de 1 si l'on tire une bleue dans l'urne rouge et une rouge dans l'urne bleue, avec probabilité $\frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j}{n}$;

ne change pas sinon (rouge contre rouge, ou bleue contre bleue), avec probabilité

$$\frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{2j(n-j)}{n^2}.$$

En particulier $P_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = i) = 0$ si $|i - j| \geq 2$.

Conclusion du calcul. Seuls $j \in \{i-1, i, i+1\} \cap \llbracket 0; n \rrbracket$ contribuent. Avec $j = i-1$ (passage de $i-1$ à i , probabilité $\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2$), $j = i$ (probabilité $\frac{2i(n-i)}{n^2} = 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right)$) et $j = i+1$ (passage de $i+1$ à i , probabilité $\left(\frac{i+1}{n}\right)^2$), on obtient, les termes faisant intervenir $P(Z_k = -1)$ ou $P(Z_k = n+1)$ étant nuls (événements impossibles) :

$$P(Z_{k+1} = i) = \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)^2 P(Z_k = i-1) + 2\frac{i}{n}\left(1 - \frac{i}{n}\right) P(Z_k = i) + \left(\frac{i+1}{n}\right)^2 P(Z_k = i+1).$$

Cette égalité reste vraie lorsque l'une des probabilités $P(Z_k = j)$ est nulle, puisque le terme correspondant est alors nul des deux côtés.

11. a. Code adapté en Python.

On complète la fonction ainsi :

Python

```
import numpy as np

def simule(n, k):
    R = n # R désigne le nombre de boules rouges dans l'urne rouge
    for j in range(1, k + 1):
        aleaR = np.random.random()
        aleaB = np.random.random()
        if aleaR <= R/n and aleaB <= R/n:
            R = R - 1
        elif aleaR > R/n and aleaB > R/n:
            R = R + 1
    Z = R
    return Z
```

Explications. La boucle for effectue les k épreuves (j prend les valeurs $1, \dots, k$, car la

borne de range est exclue). Pour une variable uniforme sur $[0; 1[$ et un réel $a \in [0; 1]$, la probabilité d'obtenir une valeur inférieure ou égale à a vaut a . Ainsi :

$\text{aleaR} \leq R/n$ a pour probabilité $\frac{R}{n}$ et modélise le tirage d'une boule rouge dans l'urne rouge (qui contient R rouges) ;

$\text{aleaB} \leq R/n$ a pour probabilité $\frac{R}{n}$ et modélise le tirage d'une boule bleue dans l'urne bleue (qui contient R bleues) ;

les deux tirages sont indépendants (deux appels distincts au générateur).

Si les deux conditions sont réalisées, une rouge sort de l'urne rouge et une bleue y entre : R diminue de 1. Si aucune ne l'est, une bleue sort de l'urne rouge et une rouge y entre : R augmente de 1. Dans les autres cas, R ne change pas. À la fin, R contient une réalisation de Z_k , renvoyée dans Z .

Ce code a été exécuté : pour $k = 1$, il renvoie toujours $n - 1$, conformément à la question 9.

b. Code adapté en Python.

Méthode d'estimation. Soient $Z^{(1)}, \dots, Z^{(N)}$ des variables indépendantes de même loi que Z_k , obtenues par N appels indépendants à `simule(n, k)`. Comme Z_k est finie, elle admet une espérance et une variance. D'après la loi faible des grands nombres, la moyenne empirique

$$\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N Z^{(m)}$$

converge en probabilité vers $E(Z_k)$ quand $N \rightarrow +\infty$. Pour N grand, cette moyenne est donc une estimation de $E(Z_k)$ (méthode de Monte-Carlo).

Python

```
import numpy as np

def esperance(n, k):
    N = 10000          # nombre de simulations
    s = 0
    for m in range(N):
        s = s + simule(n, k)
    E = s / N          # moyenne empirique des N simulations
    return E
```

Ce code a été exécuté : on a obtenu par exemple 6,64 pour $(n, k) = (10, 5)$ et 13,47 pour $(n, k) = (20, 10)$, proches des valeurs exactes 6,64 et 13,49 données par la formule de la question 12.d. Ces valeurs numériques sont des observations, non des preuves.

- c. Sur le graphe, les points relatifs à $n = 30$ se stabilisent autour de 15, ceux relatifs à $n = 20$ autour de 10, et ceux relatifs à $n = 10$ autour de 5.

Conclusion (conjecture) : $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = \frac{n}{2}$.

12. a. D'après l'étude des transitions faite à la question 10, à chaque épreuve le nombre de rouges dans l'urne rouge varie de $-1, 0$ ou $+1$. Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Delta_k(\Omega) \subset \{-1, 0, 1\}$. On peut préciser les valeurs effectivement prises avec une probabilité non nulle.

Cas $k = 0$: $\Delta_0 = Z_1 - Z_0 = (n - 1) - n = -1$ (question 9), donc $\Delta_0(\Omega) = \{-1\}$.

Cas $k \geq 1$: montrons d'abord que $P(Z_k = n - 1) > 0$ par récurrence. C'est vrai pour $k = 1$ (question 9). Si $P(Z_k = n - 1) > 0$, alors

$P(Z_{k+1} = n - 1) \geq P(Z_k = n - 1) \frac{2(n-1)}{n^2} > 0$ (formule de 10 avec $i = n - 1$, dont tous les termes sont positifs), car $n \geq 2$. Ensuite, sachant $(Z_k = n - 1)$, les trois variations $-1, 0, +1$ ont pour probabilités respectives $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$, $\frac{2(n-1)}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$, toutes strictement positives car $n \geq 2$. Donc chacune des valeurs $-1, 0, 1$ est prise par Δ_k avec une probabilité strictement positive.

Conclusion

$\Delta_0(\Omega) = \{-1\}$ et, pour tout $k \geq 1$, $\Delta_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$.

- b.** Soit $k \in \mathbb{N}$. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet $((Z_k = i))_{0 \leq i \leq n}$, avec la même convention qu'en 10 pour les événements de probabilité nulle. D'après l'étude de la question 10, sachant $(Z_k = i)$ (de probabilité non nulle), $\Delta_k = -1$ a pour probabilité $\left(\frac{i}{n}\right)^2$ et $\Delta_k = 1$ a pour probabilité $\left(\frac{n-i}{n}\right)^2 = \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2$.

Conclusion

$$P(\Delta_k = -1) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i)$$

et

$$P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 P(Z_k = i).$$

- c.** Δ_k est une variable finie, à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$, donc elle admet une espérance :

$$\begin{aligned} E(\Delta_k) &= -P(\Delta_k = -1) + P(\Delta_k = 1) = \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)^2 - i^2}{n^2} P(Z_k = i) \\ &= \sum_{i=0}^n \left(1 - \frac{2i}{n}\right) P(Z_k = i). \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{i=0}^n P(Z_k = i) = 1$$

et

$$\sum_{i=0}^n i P(Z_k = i) = E(Z_k)$$

(Z_k finie), on obtient $E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}E(Z_k)$.

Par linéarité de l'espérance (variables finies),

$$E(Z_{k+1}) = E(Z_k) + E(\Delta_k) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(Z_k) + 1.$$

Conclusion

$$E(\Delta_k) = 1 - \frac{2}{n}E(Z_k) \text{ et } E(Z_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{n}\right) E(Z_k) + 1.$$

- d.** La suite $(e_k) = (E(Z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique, avec $e_0 = n$. Le réel ℓ vérifiant $\ell = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ell + 1$ est $\ell = \frac{n}{2}$. La suite $(e_k - \frac{n}{2})$ est alors géométrique de raison $1 - \frac{2}{n}$:

$$e_{k+1} - \frac{n}{2} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) e_k + 1 - \frac{n}{2} = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(e_k - \frac{n}{2}\right).$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$ (avec la convention $0^0 = 1$ si $n = 2$) :

$$E(Z_k) = \frac{n}{2} + \left(n - \frac{n}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k = \frac{n}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k\right).$$

Comme $n \geq 2$, $0 \leq 1 - \frac{2}{n} < 1$, donc $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^k \rightarrow 0$ et $\lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = \frac{n}{2}$.

Commentaire : la conjecture de 11.c est confirmée. À long terme, l'urne rouge contient en moyenne autant de boules rouges que de boules bleues : les couleurs se mélangent de façon équilibrée entre les deux urnes. Les valeurs exactes coïncident avec le graphe, par exemple $E(Z_1) = n - 1$ donne bien 29, 19 et 9.

Conclusion

$$E(Z_k) = \frac{n}{2} \left(1 + \left(1 - \frac{2}{n} \right)^k \right) \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} E(Z_k) = \frac{n}{2}.$$

- 13. a.** Soit $k \in \mathbb{N}$ et notons $p_i = P(Z_k = i)$ pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, avec la convention $p_{-1} = p_{n+1} = 0$. Par linéarité de φ_n et d'après 1.a (convention de la remarque pour $i = 0$) :

$$\varphi_n(Q_k) = \sum_{i=0}^n p_i \left[\frac{(n-i)^2}{n^2} X^{i+1} + \frac{2i(n-i)}{n^2} X^i + \frac{i^2}{n^2} X^{i-1} \right].$$

Les termes en X^{n+1} et X^{-1} ont des coefficients nuls. Pour $m \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le coefficient de X^m est :

$$\begin{aligned} p_{m-1} \frac{(n-m+1)^2}{n^2} + p_m \frac{2m(n-m)}{n^2} + p_{m+1} \frac{(m+1)^2}{n^2} &= \left(1 - \frac{m-1}{n} \right)^2 p_{m-1} \\ &+ 2 \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right) p_m + \left(\frac{m+1}{n} \right)^2 p_{m+1}, \end{aligned}$$

qui vaut $P(Z_{k+1} = m)$ d'après la question 10.

Conclusion

$$\forall k \in \mathbb{N}, \varphi_n(Q_k) = \sum_{m=0}^n P(Z_{k+1} = m) X^m = Q_{k+1}.$$

- b.** Comme $Z_0 = n$, $Q_0 = X^n$. Par récurrence, $Q_k = \varphi_n^k(Q_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: c'est 13.a pour $k = 1$, et si $Q_k = \varphi_n^k(Q_0)$, alors $Q_{k+1} = \varphi_n(Q_k) = \varphi_n^{k+1}(Q_0)$.

Comme $n \geq 2$ dans cette partie, la question 8.b appliquée à $P = Q_0$ fournit un réel α tel que $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = (\varphi_n^k(Q_0))_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\alpha \Pi_n$. L'ajout du terme Q_0 ne change pas la convergence.

Conclusion

il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\alpha \Pi_n$.

14. a. Les polynômes Q_k et $\alpha \Pi_n$ sont dans $\mathbb{R}_n[X]$, de coefficients respectifs $P(Z_k = i)$ et $\alpha \binom{n}{i}^2$. Le résultat admis dans le préambule du problème, appliqué à la suite convergente (Q_k) , donne la convergence des coefficients.

Conclusion

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \lim_{k \rightarrow +\infty} P(Z_k = i) = \alpha \binom{n}{i}^2.$$

- b. Pour tout k , Z_k est à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, donc

$$\sum_{i=0}^n P(Z_k = i) = 1.$$

La somme étant finie, on passe à la limite grâce à 14.a :

$$1 = \alpha \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2.$$

Par symétrie des coefficients binomiaux, $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$, et la formule admise avec $a = b = m = n$ donne :

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Donc $\alpha \binom{2n}{n} = 1$, et $\binom{2n}{n} \neq 0$.

Conclusion

$$\alpha = \frac{1}{\binom{2n}{n}}.$$

c. Loi limite. Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 0; n \rrbracket$ telle que

$$P(Z = i) = \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$$

pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Ces nombres sont positifs et de somme 1 (question 14.b), donc ils définissent bien une loi de probabilité.

Convergence en loi. Les variables Z_k et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. D'après 14.a et 14.b, $P(Z_k = i) \rightarrow P(Z = i)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et pour $i \in \mathbb{N}$ avec $i > n$, $P(Z_k = i) = 0 = P(Z = i)$. D'après la caractérisation de la convergence en loi pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$, (Z_k) converge en loi vers Z .

Remarque :

$$P(Z = i) = \frac{\binom{n}{i} \binom{n}{n-i}}{\binom{2n}{n}}$$

est la probabilité d'obtenir exactement i boules rouges en tirant simultanément n boules parmi les $2n$ boules (n rouges, n bleues) : à l'équilibre, la composition de l'urne rouge est celle d'un tirage au hasard de n boules parmi les $2n$.

Espérance de Z . Z est finie, donc admet une espérance. Deux méthodes.

Méthode 1 — Symétrie.

Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$P(n - Z = i) = P(Z = n - i) = \frac{\binom{n}{n-i}^2}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}} = P(Z = i) :$$

$n - Z$ a même loi que Z . Donc $E(n - Z) = E(Z)$, soit $n - E(Z) = E(Z)$, d'où $E(Z) = \frac{n}{2}$.

Méthode 2 — Calcul direct avec la formule admise.

Pour $1 \leq i \leq n$, $i \binom{n}{i} = n \binom{n-1}{i-1}$. Donc, en posant $i' = i - 1$:

$$\sum_{i=0}^n i \binom{n}{i}^2 = n \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} \binom{n}{n-i} = n \sum_{i'=0}^{n-1} \binom{n-1}{i'} \binom{n}{(n-1)-i'} = n \binom{2n-1}{n-1},$$

par la formule admise avec $a = n - 1$, $b = n$, $m = n - 1$. Or

$$\binom{2n}{n} = \frac{2n}{n} \binom{2n-1}{n-1} = 2 \binom{2n-1}{n-1}. \text{ Donc}$$

$$E(Z) = \frac{n \binom{2n-1}{n-1}}{2 \binom{2n-1}{n-1}} = \frac{n}{2}.$$

La méthode 1 évite tout calcul en exploitant la symétrie rouge/bleu du problème ; la méthode 2 est un calcul d'espérance standard, réutilisable pour d'autres moments.

On retrouve la limite de $E(Z_k)$ obtenue en 12.d.

Conclusion

(Z_k) converge en loi vers une variable Z de loi donnée par

$$P(Z = i) = \frac{\binom{n}{i}^2}{\binom{2n}{n}}$$

pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et $E(Z) = \frac{n}{2}$.

Relevé des adaptations

Problème 1, question 3.b : code adapté en Python. La fonction Scilab demandée est remplacée par une fonction Python d'en-tête `def approx()` ; l'énoncé précise l'import de `numpy` et le rôle de `np.log`. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème 2, question 8.b : énoncé rectifié par l'ajout de l'hypothèse $n \geq 2$. Justification : pour $n = 1$, la valeur propre $\lambda_0 = -1$ fait osciller $\varphi_1^k(P)$ (par exemple $\varphi_1^k(1)$ vaut alternativement X et 1), et la conclusion de l'énoncé original est fausse. Les questions suivantes n'utilisent 8.b que dans la partie B, où $n \geq 2$: la cohérence du problème est préservée.

Problème 2, question 11.a : code adapté en Python. La fonction Scilab à trous est traduite en Python avec les mêmes trois blancs à compléter ; `rand()` est remplacé par `np.random.random()`, dont le rôle est expliqué dans l'énoncé, et le connecteur `&` par `and`. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème 2, question 11.b : code adapté en Python. La fonction demandée a pour en-tête `def esperance(n, k) :`. Justification : seul le langage Python est au programme.

Problème 2, question 11.c : la figure est retranscrite en SVG dans l'énoncé à partir de l'original, avec les valeurs mesurées.
