



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2019

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PARTIE A : Étude d'endomorphismes de polynômes

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes (ou fonctions polynomiales) à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n , et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

Dans toute cette partie, a désigne un réel quelconque.

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\Psi_a(P) = 2P + (X - a)P'.$$

Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, on définit également la fonction $\Phi_a(P)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi_a(P)(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x (t-a)P(t) dt & \text{si } x \neq a, \\ \frac{P(a)}{2} & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Enfin on définit, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, le polynôme Q_k par $Q_k = (X - a)^k$.

1. Montrer que l'application $\Psi_a : P \mapsto \Psi_a(P)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de Ψ_a dans la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - 3.a. Montrer que Ψ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.
 - 3.b. Justifier que Ψ_a est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - 3.c. Calculer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Psi_a(Q_k)$.
 - 3.d. En déduire une base de chacun des sous-espaces propres de Ψ_a .
- 4.a. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$, exprimer $((X - a)^2 P(X))'$ en fonction de $\Psi_a(P)$.
- 4.b. En déduire, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$: $\Phi_a(\Psi_a(P)) = P$.

4.c. En déduire que $\Phi_a : P \mapsto \Phi_a(P)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\Phi_a^{-1} = \Psi_a$.

4.d. Montrer que Φ_a est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

PARTIE B : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Dans la suite du problème, on fixe $a = 0$ et on prolonge l'application Φ_0 précédente à l'ensemble des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$, que l'on note plus simplement Φ .

On considère f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On définit la fonction $\Phi(f)$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

5. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

5.a. Justifier que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x)$.

5.b. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier qu'il existe deux réels α_x et β_x appartenant à $[0, x]$ tels que :

$$f(\alpha_x) \int_0^x t dt \leq \int_0^x t f(t) dt \leq f(\beta_x) \int_0^x t dt.$$

5.c. En déduire : $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

5.d. Montrer que l'on a aussi : $\lim_{x \rightarrow 0, x < 0} \frac{h(x)}{x^2} = \frac{f(0)}{2}$.

6. Montrer que la fonction $\Phi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (\Phi(f))'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 2\Phi(f)(x)).$$

7.a. Montrer que, si f est une fonction paire (respectivement impaire), alors $\Phi(f)$ est encore une fonction paire (respectivement impaire).

7.b. Montrer que, si f est une fonction positive, alors $\Phi(f)$ est encore une fonction positive.

8. On admet le résultat suivant : si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(f)(x) = 0$.

8.a. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(g)$ où $g : x \mapsto f(x) - \ell$, montrer :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell, \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.$$

8.b. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. En utilisant $\Phi(h)$ où $h : x \mapsto f(-x)$, montrer :

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell, \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(f)(x) = \frac{\ell}{2}.$$

PARTIE C : Une application en probabilité

Dans cette partie, on pourra utiliser des résultats de la partie B.

On considère F la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

On pose $G = 2\Phi(F)$; ainsi, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2} \int_0^x tF(t) dt & \text{si } x \neq 0, \\ F(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

9. Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq G(x) \leq F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad 0 \leq F(x) \leq G(x).$$

10. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ et exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $G'(x)$ à l'aide de x , $F(x)$ et $G(x)$.

11. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} G'(x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que g est une densité de probabilité d'une variable aléatoire V puis que G est la fonction de répartition de V .

12. On définit la fonction h_1 sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

12.a. Montrer que h_1 est une densité de probabilité.

Soit X_1 une variable aléatoire admettant h_1 pour densité.

12.b. Montrer que X_1 admet une espérance, notée $E(X_1)$, et que l'on a : $E(X_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

12.c. On note H_1 la fonction de répartition de X_1 et on pose $H_2 = 2\Phi(H_1)$.

Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad H_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

D'après la question 11., H_2 est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité que l'on note X_2 . Déterminer une densité h_2 de X_2 , puis montrer que X_2 admet une espérance (que l'on ne cherchera pas à calculer).

PARTIE D : Étude d'un espace vectoriel et d'un produit scalaire

On note E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ et E_2 l'ensemble des fonctions f de E telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dx$ converge.

Pour toute fonction f de E , on note toujours $\Phi(f)$ la fonction définie dans cette partie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \Phi(f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x t f(t) dt & \text{si } x > 0, \\ \frac{f(0)}{2} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13.a. Justifier : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$

13.b. En déduire que, pour toutes fonctions f et g de E_2 , l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ est absolument convergente.

14. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

On considère l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E_2 \times E_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (f, g) \in E_2 \times E_2, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx.$$

15. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E_2 .

On munit E_2 de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\| \cdot \|$.

16. Soit f une fonction de E_2 .

On note, comme dans la partie B., pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $h(x) = \int_0^x t f(t) dt$.

16.a. Calculer les limites de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^4}$ et de $x \mapsto \frac{(h(x))^2}{x^3}$ en 0.

16.b. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall X > 0, \quad \int_0^X \frac{(h(x))^2}{x^4} dx = -\frac{1}{3} \frac{(h(X))^2}{X^3} + \frac{2}{3} \int_0^X f(x) \Phi(f)(x) dx.$$

16.c. Soit $X > 0$. En étudiant le signe de la fonction polynomiale

$\lambda \mapsto \int_0^X (\lambda f(x) + \Phi(f)(x))^2 dx$, montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante :

$$\int_0^X f(x) \Phi(f)(x) dx \leq \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

16.d. En déduire :

$$\forall X > 0, \quad \left(\int_0^X (\Phi(f)(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \frac{2}{3} \left(\int_0^X (f(x))^2 dx \right)^{1/2}.$$

16.e. Montrer alors que la fonction $\Phi(f)$ appartient à E_2 et que l'on a : $\|\Phi(f)\| \leq \frac{2}{3} \|f\|$.

16.f. En utilisant la relation de la question 16.b., justifier que la limite de

$X \mapsto X(\Phi(f)(X))^2$ en $+\infty$ est finie, puis, en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

16.g. En déduire : $\|\Phi(f)\|^2 = \frac{2}{3} \langle \Phi(f), f \rangle$.

PARTIE E : Étude d'une suite

Dans cette partie, indépendante des précédentes, on étudie un analogue discret de l'application Φ étudiée précédemment.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive. On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k u_k.$$

- 17.** On suppose que l'on dispose d'une fonction Python d'en-tête `def suite_u(n)` : qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de u_n .

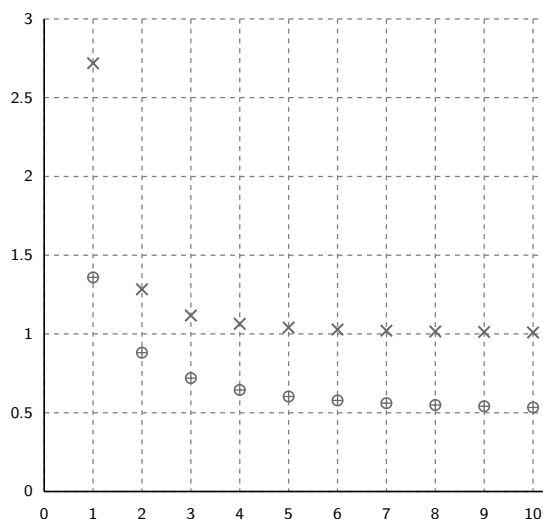
En déduire une fonction Python d'en-tête `def suite_v(n)` : qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et qui renvoie la valeur de v_n .

- 18.** On suppose dans cette question uniquement que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

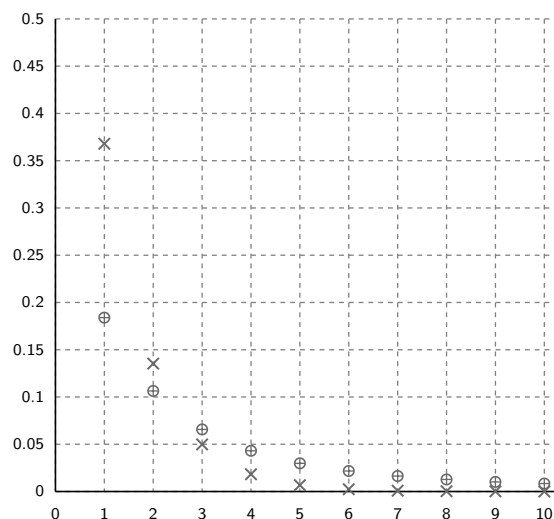
18.a. Justifier que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

18.b. Pour différentes suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissantes, on représente ci-dessous, à l'aide des fonctions `suite_u` et `suite_v`, les premiers termes des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec le symbole « x » et ceux de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec le symbole « $\oplus$ ».

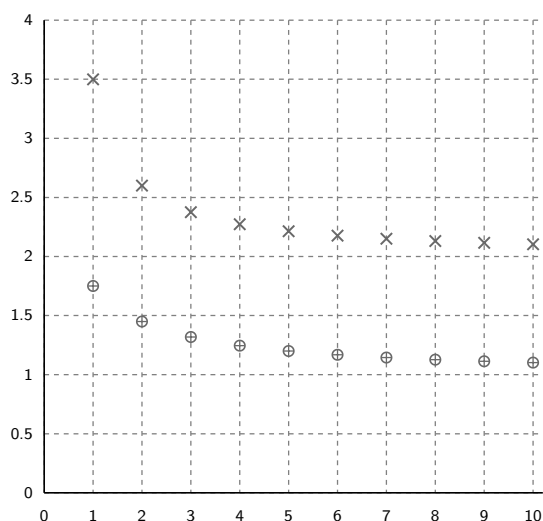
À la vue des graphes suivants, quelles conjectures peut-on faire sur la monotonie, la convergence et la valeur de la limite de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de celle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?



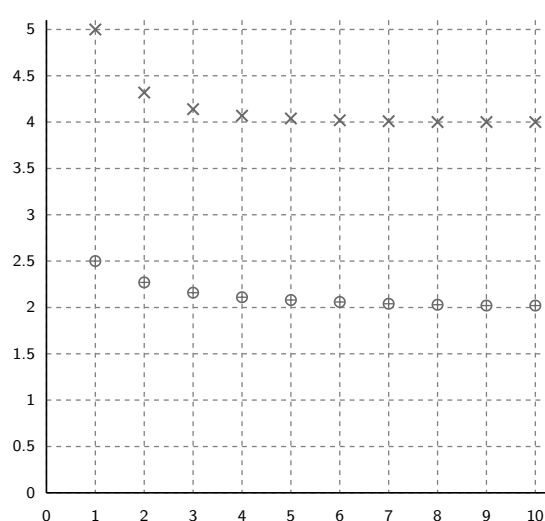
Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{1/n^2}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = e^{-n}$



Cas où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (6n+1)/(3n-1)$



Quatrième exemple

Les trois premières légendes donnent les expressions exactes des suites. Les points du quatrième exemple sont reproduits à partir du graphique ; leurs ordonnées sont lues à environ 0,02 près.

18.c. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_n \geq \frac{u_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{2n} \leq \frac{n+1}{2(2n+1)}v_n + \frac{3n+1}{4(2n+1)}u_{n+1}.$$

18.d. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+2)v_{n+1} = nv_n + u_{n+1} \quad \text{puis} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n}(u_{n+1} - 2v_{n+1}).$$

18.e. Démontrer toutes les conjectures faites à la question 18.b.

19. On suppose dans cette question uniquement que la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge.

19.a. Montrer :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{k=1}^N u_k - Nv_N.$$

19.b. En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

converge.

19.c. Montrer ensuite que Nv_N tend vers une limite finie lorsque l'entier N tend vers $+\infty$, puis, en raisonnant par l'absurde, montrer que cette limite est nulle.

19.d. En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

20. On considère dans cette question une variable aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

20.a. Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète Z , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(Z = n) = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n kP(Y = k).$$

20.b. On suppose dans cette question que Y admet une espérance, notée $E(Y)$.

Montrer : $P(Z = n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{E(Y)}{n^2}$. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ?