



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2013

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie I : Étude d'une fonction f définie par une intégrale

1. Fixons $x > 0$. On utilise une comparaison avec une intégrale exponentielle convergente.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{x+t}$ est continue et positive sur $[0; +\infty[$, car $x+t \geq x > 0$. Il n'y a donc aucune difficulté à la borne 0. Pour tout $t \geq 0$:

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{x+t} \leq \frac{e^{-t}}{x}.$$

Or $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{1}{x}$ converge. Le critère de comparaison des intégrales de fonctions positives assure donc la convergence de l'intégrale définissant $f(x)$, pour tout $x > 0$.

2. On minore l'intégrale sur un segment où l'exponentielle possède une borne inférieure strictement positive.

Par positivité de l'intégrande et par $e^{-t} \geq e^{-1}$ pour $0 \leq t \leq 1$:

$$f(x) \geq \int_0^1 \frac{e^{-t}}{x+t} dt \geq e^{-1} \int_0^1 \frac{1}{x+t} dt.$$

La primitive du dernier intégrande est $\ln(x+t)$. Ainsi :

$$f(x) \geq e^{-1}(\ln(x+1) - \ln x) = e^{-1} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $1 + \frac{1}{x} \rightarrow +\infty$ et son logarithme tend vers $+\infty$. Cette minoration donne donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

3. On reprend la comparaison de la question 1 en contrôlant aussi la stricte positivité.

Pour $x > 0$, l'intégrande est strictement positif et continu sur $[0; 1]$. Son intégrale sur ce segment est strictement positive, donc $f(x) > 0$. D'autre part :

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, $0 < f(x) \leq \frac{1}{x}$. Comme $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4. On calcule d'abord l'intégrale auxiliaire sur un segment, puis on estime l'erreur par rapport à $\frac{1}{x}$.

Pour $A > 0$, une intégration par parties sur $[0; A]$ donne :

$$\int_0^A te^{-t} dt = [-te^{-t}]_0^A + \int_0^A e^{-t} dt = 1 - (A+1)e^{-A}.$$

Les croissances comparées donnent $(A+1)e^{-A} \rightarrow 0$. L'intégrale impropre converge donc, et $\int_0^{+\infty} te^{-t} dt = 1$.

Les deux intégrales définissant $f(x)$ et $\frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x} dt$ convergent. Leur différence s'écrit donc :

$$f(x) - \frac{1}{x} = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x} \right) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt.$$

La dernière intégrale est absolument convergente, car son intégrande en valeur absolue est majoré par $\frac{te^{-t}}{x^2}$. Il en résulte :

$$\left| f(x) - \frac{1}{x} \right| = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{x(x+t)} dt \leq \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \frac{1}{x^2}.$$

En multipliant cette inégalité par $x > 0$, on obtient $|xf(x) - 1| \leq \frac{1}{x}$. Ainsi $xf(x) \rightarrow 1$, ce qui signifie $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Partie II : Une autre expression intégrale de f

A — Dérivabilité et expression de la dérivée de f sous forme d'une intégrale

5. Dans les trois sous-questions, $x > 0$, $h \neq 0$ et $h > -\frac{x}{2}$. En particulier,

$$x + h > \frac{x}{2} > 0, \text{ donc } f(x + h) \text{ est bien définie.}$$

5.a. On applique une comparaison exponentielle, avec x fixé.

Pour tout $t \geq 0$:

$$0 \leq \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} \leq \frac{e^{-t}}{x^2}.$$

L'intégrande est continu sur $[0; +\infty[$, et l'intégrale du majorant vaut $\frac{1}{x^2}$. Par

comparaison, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt$ converge.

5.b. On simplifie exactement l'expression avant de la majorer ; aucune approximation n'est nécessaire.

Puisque $h \neq 0$:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) = -\frac{1}{(x+h+t)(x+t)}.$$

En ajoutant $\frac{1}{(x+t)^2}$:

$$\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} = \frac{h}{(x+h+t)(x+t)^2}.$$

Les dénominateurs sont positifs. De plus, $x+h+t > \frac{x}{2}$ et $x+t \geq x$. Il vient :

$$\left| \frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right| = \frac{|h|}{(x+h+t)(x+t)^2} \leq \frac{2|h|}{x^3}.$$

C'est la majoration demandée, valable pour tout $t \geq 0$.

5.c. On intègre la majoration précédente après multiplication par e^{-t} .

Par les questions 1 et 5.a, les intégrales de chacun des trois termes ci-dessous convergent. La linéarité donne donc :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} \left[\frac{1}{h} \left(\frac{1}{x+h+t} - \frac{1}{x+t} \right) + \frac{1}{(x+t)^2} \right] dt.$$

Sur chaque segment $[0; A]$, l'inégalité triangulaire pour les intégrales et la question 5.b donnent une majoration par $\frac{2|h|}{x^3} \int_0^A e^{-t} dt$. Le même majorant assure la convergence absolue de l'intégrale de l'expression entre crochets. En passant à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$:

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt \right| \leq \frac{2|h|}{x^3} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{2|h|}{x^3}.$$

6. On utilise la définition de la dérivée et la majoration de la question 5.c.

Fixons $x > 0$. Pour tout h non nul assez proche de 0, par exemple $|h| < \frac{x}{2}$, les hypothèses de la question 5 sont vérifiées. Son majorant $\frac{2|h|}{x^3}$ tend vers 0. Par encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

Cette limite finie montre que f est dérivable en x . Puisque $x > 0$ est arbitraire, f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et :

$$f'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt.$$

La preuve repose sur une estimation du taux d'accroissement; elle ne suppose aucun échange entre dérivation et intégration impropre.

7. On effectue une intégration par parties uniquement sur le segment $[\varepsilon; A]$, où $0 < \varepsilon \leq 1 \leq A$.

Prenons $u(t) = e^{-t}$ et $v(t) = -\frac{1}{x+t}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur ce segment, avec $u'(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = \frac{1}{(x+t)^2}$. Ainsi :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \left[-\frac{e^{-t}}{x+t} \right]_{\varepsilon}^A - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

L'évaluation des bornes donne exactement :

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = -\frac{e^{-A}}{x+A} + \frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt.$$

Cette identité reste valable si $\varepsilon = A = 1$, les deux intégrales étant alors nulles.

8. On passe aux limites dans l'identité de la question 7, puis on utilise la formule de f' .

Pour $x > 0$ fixé, les deux intégrales convergent sur $[0; +\infty[$ par les questions 1 et 5.a. Les intégrandes sont continus en 0. Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, puis $A \rightarrow +\infty$:

$$\frac{e^{-\varepsilon}}{x+\varepsilon} \rightarrow \frac{1}{x} \text{ et } \frac{e^{-A}}{x+A} \rightarrow 0.$$

On obtient donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{(x+t)^2} dt = \frac{1}{x} - f(x).$$

La question 6 donne alors $f'(x) = -\frac{1}{x} + f(x)$, pour tout $x > 0$.

9. On déduit la régularité de l'identité différentielle précédente, sans redériver une intégrale.

La dérivabilité de f implique sa continuité sur $]0; +\infty[$. L'égalité $f' = f - \frac{1}{x}$ montre donc d'abord que f' est continue : f est de classe C^1 .

Son membre de droite est dérivable, puisque f et $x \mapsto \frac{1}{x}$ le sont sur cet intervalle. Ainsi :

$$f''(x) = f'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Enfin, f' et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sont continues. Par conséquent, f'' est continue et f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$.

B — Intervention d'une fonction auxiliaire g

10. On applique la règle de dérivation d'un produit et l'identité de la question 8.

Les fonctions $x \mapsto e^{-x}$ et f sont dérivables sur $]0; +\infty[$. Leur produit g est donc dérivable et :

$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) = -\frac{e^{-x}}{x}.$$

Cela établit la formule demandée pour tout $x > 0$.

11. On commence par la convergence, commune aux deux méthodes.

Pour $u \geq x > 0$, $0 \leq \frac{e^{-u}}{u} \leq \frac{e^{-u}}{x}$. L'intégrande est continu sur $[x; +\infty[$ et l'intégrale du majorant vaut $\frac{e^{-x}}{x}$. Ainsi $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ converge.

Méthode 1 — Intégration de la dérivée de g

Cette méthode exploite directement la fonction auxiliaire introduite dans l'énoncé. Par la question 3 :

$$0 < g(A) = e^{-A}f(A) \leq \frac{e^{-A}}{A},$$

donc $g(A) \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$.

La question 10 montre que g' est continue sur $]0; +\infty[$. Pour $A > x$, le théorème fondamental du calcul intégral sur $[x; A]$ donne :

$$g(A) - g(x) = \int_x^A g'(u) du = - \int_x^A \frac{e^{-u}}{u} du.$$

En passant à la limite dans cette égalité, avec la convergence déjà établie :

$$g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Puisque $g(x) = e^{-x} f(x)$, on en déduit $f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

Méthode 2 — Changement de variable affine

Cette approche obtient la représentation directement à partir de l'intégrale initiale. Sur $[0; A]$, posons $u = x + t$; alors $du = dt$, et les bornes deviennent x et $x + A$:

$$\int_0^A \frac{e^{-t}}{x+t} dt = e^x \int_x^{x+A} \frac{e^{-u}}{u} du.$$

Les deux intégrales impropres convergent. Le passage à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$ donne $f(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$, puis $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$.

La première méthode utilise une primitive et sa limite à l'infini ; la seconde est particulièrement utile pour reconnaître une translation dans l'intégrande.

12. On transfère l'équivalent de f grâce à la représentation exacte de la question 11.

Pour tout $x > 0$:

$$\frac{\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du}{e^{-x}/x} = \frac{e^{-x} f(x)}{e^{-x}/x} = x f(x).$$

Par la question 4, ce quotient tend vers 1. Ainsi :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}.$$

13. Les termes $b_n = n^2 \int_n^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ sont positifs. Deux comparaisons classiques permettent de conclure.

Méthode 1 — Comparaison par équivalence

La question 12, appliquée aux entiers $n \rightarrow +\infty$, donne $b_n \sim ne^{-n}$. La série de terme général $ne^{-n} = nq^n$, où $q = e^{-1} \in]0; 1[$, converge par la formule de la série géométrique dérivée :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Puisque les deux suites de termes sont positives et équivalentes, leurs séries sont de même nature. La série proposée converge.

Méthode 2 — Majoration directe

Pour $u \geq n \geq 1$, on a $\frac{1}{u} \leq \frac{1}{n}$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq b_n \leq n^2 \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} e^{-u} du = ne^{-n}.$$

Le majorant est le terme d'une série convergente, comme établi dans la première méthode. La comparaison des séries à termes positifs donne donc à nouveau la convergence.

L'équivalence indique le comportement précis du terme général ; la majoration suffit ici à déterminer la nature de la série sans utiliser cet équivalent.

Partie III : Étude d'une densité

14. On vérifie les trois conditions : positivité, continuité sauf éventuellement en un nombre fini de points et normalisation.

La question 3 assure $f(1) > 0$; le facteur $\frac{1}{f(1)}$ est donc bien défini et positif. Pour $t \geq 0$, $e^{-t} > 0$ et $1+t > 0$, donc $h(t) \geq 0$. Pour $t < 0$, $h(t) = 0$.

La fonction h est continue sur $] -\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Elle possède seulement une éventuelle discontinuité en 0, ce qui est compatible avec la définition d'une densité.

Enfin, par la définition de $f(1)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt = \frac{f(1)}{f(1)} = 1.$$

L'intégrale converge par la question 1. Ainsi h est une densité de probabilité.

15. On justifie l'existence de l'espérance avant de calculer le moment par une décomposition de l'intégrande.

Puisque la densité est nulle sur $] -\infty; 0[$, $X \geq 0$ presque sûrement. De plus, pour $t \geq 0$:

$$0 \leq th(t) = \frac{1}{f(1)} \frac{t}{1+t} e^{-t} \leq \frac{e^{-t}}{f(1)}.$$

Le majorant est intégrable. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} |t|h(t) dt < +\infty$, et X admet une espérance finie.

En utilisant $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ et la linéarité entre intégrales convergentes :

$$E(X) = \frac{1}{f(1)} \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t} e^{-t} dt = \frac{1}{f(1)} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t} dt \right).$$

Donc
$$E(X) = \frac{1 - f(1)}{f(1)} = \frac{1}{f(1)} - 1.$$

Le résultat est cohérent avec $X \geq 0$: en effet, $f(1) < 1$, car $\frac{e^{-t}}{1+t} < e^{-t}$ pour $t > 0$, et la différence a une intégrale strictement positive.

Problème 2

Partie I : Un exemple

1. On exprime l'action de A_0 sur une colonne pour déterminer son noyau.

Pour $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$, la définition $A_0 = U_0 {}^t(V_0)$ donne :

$$A_0 Z = U_0 ({}^t(V_0)Z) = (z_1 - z_2 + 2z_3 - z_4)U_0.$$

Comme $U_0 \neq 0$, $A_0 Z = 0$ équivaut à $z_1 - z_2 + 2z_3 - z_4 = 0$. Cette équation s'écrit $z_1 = z_2 - 2z_3 + z_4$, donc :

$$Z = z_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posons $W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces trois colonnes engendrent le noyau.

Elles sont libres : si $\alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3 = 0$, les deuxième, troisième et quatrième coordonnées donnent successivement $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Ainsi $E_0(A_0) = \text{Ker } A_0 = \text{Vect}(W_1, W_2, W_3)$ et (W_1, W_2, W_3) en est une base. Ce noyau

contient des colonnes non nulles ; 0 est donc valeur propre de A_0 et son espace propre est de dimension 3.

2.a. On utilise l'associativité du produit matriciel.

$${}^t(V_0)U_0 = (1 \times 1 + (-1) \times 2 + 2 \times 3 + (-1) \times 4) = (1).$$

Par conséquent :

$$A_0U_0 = U_0({}^t(V_0)U_0) = U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Puisque $U_0 \neq 0$, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

2.b. Méthode 1 — Construction d'une base de vecteurs propres

La question 1 donne une base de trois vecteurs propres associés à 0. La question 2.a donne le vecteur propre non nul U_0 associé à 1.

Pour vérifier directement leur indépendance, supposons $\alpha W_1 + \beta W_2 + \gamma W_3 + \delta U_0 = 0$. En appliquant A_0 , les trois premiers termes sont annulés et le dernier devient δU_0 . Ainsi $\delta = 0$, puis $\alpha = \beta = \gamma = 0$ par la liberté établie en question 1.

La famille (W_1, W_2, W_3, U_0) est donc libre de cardinal 4 dans un espace de dimension 4 : c'est une base de vecteurs propres. Ainsi A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Méthode 2 — Reconnaissance d'un projecteur

L'égalité ${}^t(V_0)U_0 = (1)$ donne :

$$A_0^2 = U_0({}^t(V_0)U_0){}^t(V_0) = U_0{}^t(V_0) = A_0.$$

Pour toute colonne Z , écrivons $Z = (Z - A_0Z) + A_0Z$. L'égalité $A_0^2 = A_0$ implique $Z - A_0Z \in \text{Ker } A_0$ et $A_0Z \in \text{Ker}(A_0 - I_4)$.

Si une colonne T appartient aux deux noyaux, alors $A_0T = 0$ et $A_0T = T$, donc $T = 0$.

On a ainsi :

$$\mathbb{R}^4 = \text{Ker } A_0 \oplus \text{Ker}(A_0 - I_4).$$

En réunissant une base de chaque noyau, on obtient une base de vecteurs propres. Cela prouve à nouveau la diagonalisabilité de A_0 .

La première méthode exploite les vecteurs propres déjà calculés ; la seconde montre directement pourquoi tout projecteur possède une base adaptée à son noyau et à son image.

2.c. On place les vecteurs propres dans les colonnes de P , dans le même ordre que les valeurs propres dans D .

Choisissons :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

et

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de P sont (W_1, W_2, W_3, U_0) , dont la question 2.b a établi qu'elles forment une base. Ainsi P est inversible, sans qu'il soit nécessaire de calculer un déterminant.

Les égalités $A_0 W_1 = A_0 W_2 = A_0 W_3 = 0$ et $A_0 U_0 = U_0$ se regroupent en $A_0 P = P D$. En multipliant à droite par P^{-1} , on obtient $A_0 = P D P^{-1}$, avec les deux matrices demandées.

Partie II : Trace d'une matrice carrée

3. On vérifie directement la linéarité à partir des coefficients diagonaux.

Soient $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le coefficient diagonal d'indice i de $\alpha A + \beta B$ vaut $\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}$. Ainsi :

$$\text{Tr}(\alpha A + \beta B) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{i,i} + \beta b_{i,i}) = \alpha \text{Tr}(A) + \beta \text{Tr}(B).$$

La trace est donc une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.

4. On développe les coefficients diagonaux des deux produits. Toutes les sommes sont finies.

Pour $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$:

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{j,i},$$

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{j,i} a_{i,j}.$$

L'ordre des deux sommes finies peut être inversé, et les coefficients réels commutent. Les expressions sont donc égales : $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

5. On calcule les coefficients diagonaux de ${}^tAA$.

Par définition de la transposée, $({}^tA)_{i,j} = a_{j,i}$. Le coefficient diagonal d'indice i du produit est donc :

$$({}^tAA)_{i,i} = \sum_{j=1}^n ({}^tA)_{i,j} a_{j,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

En sommant sur i , on obtient :

$$\text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

En particulier, cette trace est positive ou nulle, et vaut 0 si et seulement si tous les coefficients de A sont nuls.

Partie III : Une caractérisation des matrices de rang 1

6. On conserve les hypothèses $U \neq 0$ et $V \neq 0$ dans les trois sous-questions.

6.a. On contrôle les dimensions du produit et sa formule coefficient par coefficient.

La matrice U a n lignes et une colonne, tandis que ${}^tV$ a une ligne et n colonnes. Le produit $U{}^tV$ est donc défini et appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Son coefficient de ligne i et de colonne j est :

$$(U{}^tV)_{i,j} = u_i v_j.$$

Ainsi $U{}^tV = (u_i v_j)_{1 \leq i, j \leq n}$; sa colonne numéro j est $v_j U$.

6.b. On somme les coefficients diagonaux obtenus à la question précédente.

$$\text{Tr}(U{}^tV) = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

C'est aussi l'unique coefficient de la matrice de taille 1×1 donnée par ${}^tVU$.

6.c. Méthode 1 — Espace engendré par les colonnes

Chaque colonne de U^tV est un multiple de U , donc le rang est au plus 1. Comme $V \neq 0$, il existe j_0 tel que $v_{j_0} \neq 0$. La colonne $v_{j_0}U$ est alors non nulle puisque $U \neq 0$.

L'espace engendré par les colonnes est donc exactement $\text{Vect}(U)$, de dimension 1. Ainsi $\text{rg}(U^tV) = 1$.

Méthode 2 — Noyau et théorème du rang

Pour toute colonne Z , $(U^tV)Z = ({}^tVZ)U$. Comme $U \neq 0$, ce produit est nul si et seulement si ${}^tVZ = 0$.

La forme linéaire $Z \mapsto {}^tVZ$ est non nulle : si $v_k \neq 0$, sa valeur sur la colonne canonique e_k vaut v_k . Elle est donc de rang 1, et son noyau a dimension $n - 1$ par le théorème du rang.

Le noyau de U^tV étant ce même noyau, son rang vaut $n - (n - 1) = 1$.

La première méthode lit le rang sur les colonnes ; la seconde donne en plus une description du noyau, utile pour les espaces propres étudiés ensuite.

7. Dans les deux sous-questions, $\text{rg}(A) = 1$, donc $A \neq 0$.

7.a. On choisit une colonne non nulle comme base de l'espace des colonnes.

Puisque $A \neq 0$, il existe $j_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_{j_0}(A) \neq 0$. L'espace engendré par toutes les colonnes de A est de dimension 1, par l'hypothèse de rang. Sa colonne non nulle $C_{j_0}(A)$ en est donc une base.

Pour chaque $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe ainsi $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(A) = \alpha_j C_{j_0}(A)$. En particulier, $\alpha_{j_0} = 1$, puisque $C_{j_0}(A) \neq 0$.

7.b. On utilise les scalaires de la question 7.a comme coefficients de la seconde colonne.

Posons $U = C_{j_0}(A)$ et $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. La colonne U est non nulle par son choix ; V est non nulle car $\alpha_{j_0} = 1$.

D'après la question 6.a, la colonne numéro j de $U^t V$ vaut $\alpha_j U = C_j(A)$. Les matrices A et $U^t V$ ont donc toutes leurs colonnes égales : $A = U^t V$.

8. On rassemble les deux implications précédentes.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\text{rg}(A) = 1 \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \quad A = U^t V.$$

L'implication directe est la question 7.b ; la réciproque est la question 6.c. La condition que les deux colonnes soient non nulles est indispensable : si l'une est nulle, leur produit est la matrice nulle, de rang 0.

Partie IV : Une application en probabilités

9. On calcule le produit coefficient par coefficient, en utilisant l'indépendance.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le coefficient de ligne i et de colonne j de $U_X^t(U_Y)$ vaut :

$$P(X = i)P(Y = j) = P((X = i) \cap (Y = j)) = m_{i,j}.$$

Ainsi $M = U_X^t(U_Y)$. Les coordonnées de U_X et de U_Y sont des probabilités, et chacune de ces deux colonnes a une somme de coordonnées égale à 1. Aucune n'est donc nulle.

La question 6.c s'applique et donne $\text{rg}(M) = 1$.

10. On suppose maintenant $\text{rg}(M) = 1$, sans supposer l'indépendance.

10.a. On vérifie l'égalité des colonnes composante par composante par la formule des probabilités totales.

Fixons $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les événements $(Y = j)$, pour $1 \leq j \leq n$, forment un système complet d'événements. Les intersections $(X = i) \cap (Y = j)$ sont donc deux à deux disjointes et leur réunion est $(X = i)$. Ainsi :

$$\sum_{j=1}^n m_{i,j} = \sum_{j=1}^n P((X = i) \cap (Y = j)) = P(X = i).$$

C'est exactement l'égalité de la composante d'indice i dans $C_1(M) + \dots + C_n(M) = U_X$. Elle est valable pour tout i , donc l'égalité matricielle demandée est établie.

10.b. On utilise le rang 1 et la présence d'une colonne non nulle dans l'espace des colonnes.

La colonne U_X est non nulle, car la somme de ses coordonnées vaut 1. Par la question 10.a, elle appartient à l'espace engendré par les colonnes de M .

Cet espace est de dimension 1. Il est donc égal à $\text{Vect}(U_X)$, et pour chaque j il existe un réel β_j tel que $C_j(M) = \beta_j U_X$.

Ce raisonnement ne divise par aucune probabilité individuelle, qui pourrait être nulle.

10.c. On somme toutes les coordonnées de l'égalité $C_j(M) = \beta_j U_X$.

Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les événements $(X = i)$ forment un système complet d'événements ; ainsi :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^n m_{i,j} = \sum_{i=1}^n \beta_j P(X = i) = \beta_j \sum_{i=1}^n P(X = i) = \beta_j.$$

Par conséquent, $\beta_j = P(Y = j)$ pour tout j ; en particulier, $\beta_j \geq 0$ et

$$\sum_{j=1}^n \beta_j = 1.$$

10.d. On combine les deux dernières sous-questions pour factoriser chaque probabilité jointe.

Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'égalité des coordonnées dans $C_j(M) = \beta_j U_X$ donne :

$$P((X = i) \cap (Y = j)) = m_{i,j} = \beta_j P(X = i) = P(X = i)P(Y = j).$$

Pour des variables finies, cette factorisation pour toutes les valeurs caractérise l'indépendance. On peut aussi le vérifier pour des ensembles de valeurs : si $I, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$, les sommes finies donnent :

$$P((X \in I) \cap (Y \in J)) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} m_{i,j} = \left(\sum_{i \in I} P(X = i) \right) \left(\sum_{j \in J} P(Y = j) \right).$$

Ainsi X et Y sont indépendantes. Avec la question 9, on a donc établi : l'indépendance de X et Y équivaut au rang 1 de leur matrice de probabilités jointes.

Partie V : Une caractérisation des matrices de rang 1 diagonalisables

11. On applique le théorème du rang à la matrice A d'ordre n et de rang 1.

$$\dim(\text{Ker } A) = n - \text{rg}(A) = n - 1.$$

Puisque $n \geq 2$, cette dimension est au moins 1. Le noyau contient donc une colonne non nulle, ce qui montre que 0 est valeur propre de A . Son sous-espace propre associé est $E_0(A) = \text{Ker } A$ et a dimension $n - 1$.

De plus, comme $AZ = ({}^tVZ)U$ et $U \neq 0$, on dispose de la description $\text{Ker } A = \{Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : {}^tVZ = 0\}$.

12. On utilise la formule de la trace de la question 6.b, puis l'associativité des produits.

Le produit ${}^tVU$ a une ligne et une colonne. Son unique coefficient est :

$$\sum_{i=1}^n v_i u_i = \text{Tr}(U^t V) = \text{Tr}(A) = a.$$

Ainsi ${}^tVU = (a)$. Par conséquent :

$$A^2 = (U^t V)(U^t V) = U({}^tVU)^t V = aU^t V = aA.$$

Le polynôme $X^2 - aX$ annule donc A , mais la suite du raisonnement utilisera directement cette identité matricielle.

13. Méthode 1 — Valeurs propres et dimension du noyau

Supposons $a = 0$. La question 12 donne $A^2 = 0$. Si $AZ = \lambda Z$ pour un vecteur propre $Z \neq 0$ et un réel λ , alors :

$$0 = A^2 Z = \lambda^2 Z.$$

Puisque $Z \neq 0$, on a $\lambda^2 = 0$, donc $\lambda = 0$. La seule valeur propre de A est ainsi 0.

Tous les vecteurs propres appartiennent donc à $\text{Ker } A$, de dimension $n - 1$ par la question 11. Ils ne peuvent former une base de l'espace de dimension n . Par définition, A n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Contradiction dans une représentation diagonale

Supposons, par l'absurde, qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$. Alors $A^2 = PD^2P^{-1}$. Comme $A^2 = 0$, la multiplication à gauche par P^{-1} et à droite par P donne $D^2 = 0$.

Si les coefficients diagonaux de D sont $d_1, \dots, d_n$, cela impose $d_k^2 = 0$ pour tout k , donc $D = 0$. On en déduit $A = 0$, ce qui contredit $\text{rg}(A) = 1$.

Ainsi A n'est pas diagonalisable. La première preuve compare la dimension de l'espace

propre avec la dimension totale ; la seconde montre pourquoi une matrice diagonalisable dont le carré est nul doit elle-même être nulle.

14. On calcule d'abord AU , puis on construit une base de vecteurs propres.

$$AU = U({}^tVU) = aU.$$

Comme $a \neq 0$ et $U \neq 0$, U est un vecteur propre associé à la valeur propre non nulle a . Le sous-espace propre de 0 a dimension $n - 1$ par la question 11.

Soit $(Z_1, \dots, Z_{n-1})$ une base de $\text{Ker } A$. Pour établir que $(Z_1, \dots, Z_{n-1}, U)$ est libre, supposons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_k Z_k + cU = 0.$$

En appliquant A , on obtient $caU = 0$. Puisque $a \neq 0$ et $U \neq 0$, $c = 0$. La liberté des Z_k donne alors $c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$.

Cette famille de n vecteurs est donc une base de vecteurs propres. Ainsi A est diagonalisable, avec une matrice diagonale associée $\text{diag}(0, \dots, 0, a)$.

On peut en outre préciser l'espace propre de a . Si $AZ = aZ$ avec $a \neq 0$, alors $Z = \frac{1}{a}AZ \in \text{Im } A = \text{Vect}(U)$. Comme U est lui-même vecteur propre associé à a , $E_a(A) = \text{Vect}(U)$.

15. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1, les questions 13 et 14 donnent la caractérisation :

$$A \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \iff \text{Tr}(A) \neq 0.$$

La condition est nécessaire par la question 13 et suffisante par la question 14. Lorsqu'elle est vérifiée, les valeurs propres sont 0 et $\text{Tr}(A)$, avec des espaces propres de dimensions respectives $n - 1$ et 1.

Partie VI : Construction d'un produit scalaire et d'un endomorphisme symétrique

16. On vérifie que l'application est bilinéaire, symétrique et définie positive.

La transposition est linéaire, le produit matriciel est linéaire en chacun de ses facteurs et la trace est linéaire par la question 3. Ainsi, pour $M_1, M_2, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\langle \alpha M_1 + \beta M_2, N \rangle = \text{Tr}((\alpha {}^t(M_1) + \beta {}^t(M_2))N) = \alpha \langle M_1, N \rangle + \beta \langle M_2, N \rangle.$$

De même, pour $M, N_1, N_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\langle M, \alpha N_1 + \beta N_2 \rangle = \text{Tr}({}^tM(\alpha N_1 + \beta N_2)) = \alpha \langle M, N_1 \rangle + \beta \langle M, N_2 \rangle.$$

Pour la symétrie, remarquons que la transposition conserve les coefficients diagonaux, donc $\text{Tr}({}^tB) = \text{Tr}(B)$ pour toute matrice carrée B . Il vient :

$$\langle M, N \rangle = \text{Tr}({}^t({}^tMN)) = \text{Tr}({}^tNM) = \langle N, M \rangle.$$

Enfin, par la question 5, si $M = (m_{i,j})$:

$$\langle M, M \rangle = \text{Tr}({}^tMM) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i}^2 \geq 0.$$

Cette somme de carrés vaut 0 si et seulement si tous les coefficients sont nuls, c'est-à-dire si $M = 0$. L'application est donc bien un produit scalaire.

Pour interpréter ce produit scalaire, son expression générale est

$$\langle M, N \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{j,i} n_{j,i}.$$

Il s'agit du produit scalaire usuel entre les listes des n^2 coefficients des deux matrices, dans le même ordre.

17. On utilise les règles de transposition et la normalisation de V .

Puisque $S = V^t V$:

$${}^t S = {}^t (V^t V) = {}^t ({}^t V) {}^t V = V^t V = S.$$

La matrice S est donc symétrique. D'autre part,

$${}^t V V = \left(\sum_{j=1}^n v_j^2 \right) = (1).$$

Ainsi :

$$S^2 = V^t V V^t V = V ({}^t V V) {}^t V = V {}^t V = S.$$

C'est donc une matrice symétrique vérifiant l'identité d'un projecteur. En particulier, $V \neq 0$ et $SV = V$.

18.a. On vérifie d'abord la linéarité, puis la symétrie par rapport au produit scalaire défini à la question 16.

Pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(\alpha M + \beta N) = S(\alpha M + \beta N) = \alpha \Phi(M) + \beta \Phi(N).$$

De plus, SM appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour toute matrice M de cet espace. Ainsi Φ est un endomorphisme.

Comme ${}^t S = S$ par la question 17 :

$$\langle \Phi(M), N \rangle = \text{Tr}({}^t (SM) N) = \text{Tr}({}^t M {}^t S N) = \text{Tr}({}^t M S N) = \langle M, \Phi(N) \rangle.$$

Cette identité pour toutes les matrices M, N prouve que Φ est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

18.b. On compose deux fois Φ et on applique l'identité obtenue à un vecteur propre.

Pour toute matrice M :

$$\Phi^2(M) = S(SM) = S^2M = SM = \Phi(M).$$

Ainsi $\Phi^2 = \Phi$: Φ est un projecteur.

Si $M \neq 0$ est une matrice propre associée à une valeur propre réelle λ , alors $\Phi(M) = \lambda M$ implique $\Phi^2(M) = \lambda^2 M$. L'identité $\Phi^2 = \Phi$ donne $(\lambda^2 - \lambda)M = 0$, donc $\lambda(\lambda - 1) = 0$.

Toute valeur propre est donc égale à 0 ou à 1.

Les deux valeurs se produisent effectivement. La matrice S est non nulle, puisque $SV = V \neq 0$, et $\Phi(S) = S^2 = S$: 1 est valeur propre.

Pour 0, la matrice $I_n - S$ vérifie $\Phi(I_n - S) = S - S^2 = 0$. Elle est non nulle : les colonnes de $S = V^t V$ engendrent $\text{Vect}(V)$, donc S est de rang 1 par la question 6.c, tandis que I_n est de rang $n \geq 2$. Ainsi $I_n \neq S$.

Par conséquent, le spectre réel de Φ est exactement $\{0, 1\}$.

18.c. Méthode 1 — Décomposition explicite et symétrie

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, écrivons :

$$M = (M - \Phi(M)) + \Phi(M).$$

Comme $\Phi^2 = \Phi$, on a $\Phi(M - \Phi(M)) = 0$, donc $M - \Phi(M) \in \text{Ker } \Phi$. D'autre part, $(\Phi - \iota)(\Phi(M)) = \Phi^2(M) - \Phi(M) = 0$, donc $\Phi(M) \in \text{Ker}(\Phi - \iota)$.

Ces deux sous-espaces ont donc une somme égale à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Leur intersection est réduite à $\{0\}$: si T appartient aux deux, $\Phi(T) = 0$ et $\Phi(T) = T$, ce qui donne $T = 0$.

Pour l'orthogonalité, prenons $K \in \text{Ker } \Phi$ et $L \in \text{Ker}(\Phi - \iota)$. La symétrie de Φ établie à la question 18.a donne :

$$\langle K, L \rangle = \langle K, \Phi(L) \rangle = \langle \Phi(K), L \rangle = \langle 0, L \rangle = 0.$$

Ainsi les deux sous-espaces sont supplémentaires et orthogonaux :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } \Phi \oplus \text{Ker}(\Phi - \iota) \text{ et } \text{Ker } \Phi \perp \text{Ker}(\Phi - \iota).$$

Méthode 2 — Théorème spectral réel

L'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est réel de dimension finie n^2 et est muni du produit scalaire établi à la question 16. La question 18.a montre que Φ y est symétrique. Le théorème spectral réel s'applique donc : il existe une base orthonormale constituée de vecteurs propres de Φ .

Par la question 18.b, les valeurs propres sont 0 et 1. Séparons les vecteurs de cette base selon leur valeur propre. Ceux associés à 0 forment une base de $\text{Ker } \Phi$; ceux associés à 1 forment une base de $\text{Ker}(\Phi - \text{id})$.

Pour justifier qu'ils engendrent bien chaque noyau, écrivons une matrice dans la base propre. L'application de Φ conserve exactement les coordonnées associées à 1 et annule celles associées à 0. L'appartenance à $\text{Ker } \Phi$ impose donc la nullité des coordonnées associées à 1. De même, l'égalité $\Phi(M) = M$ impose la nullité des coordonnées associées à 0.

Les deux familles réunies sont une base de l'espace, d'où la supplémentarité. Comme la base entière est orthonormale, les deux sous-espaces sont orthogonaux. Cela redonne les deux conclusions demandées.

La première méthode explique la décomposition pour chaque matrice et vaut pour tout projecteur symétrique ; la seconde relie cette décomposition au théorème spectral. Dans les deux cas, Φ est le projecteur orthogonal sur $\text{Ker}(\Phi - \text{id})$.

Relevé des adaptations

Aucune question ne nécessite de modification mathématique : toutes les demandes des deux problèmes sont conservées et résolues avec les outils du référentiel.

Problème 2, questions 5, 6.a–6.c, 7.b, 9, 12 et 16, ainsi que les définitions de A_0 et de S : la notation historique de la transposée est harmonisée en ${}^tA$, ${}^tU$, ${}^tV$ ou ${}^tM$, selon la matrice concernée. Le préambule définit cette notation. Seule la notation change ; les produits matriciels et les demandes sont inchangés.