



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2012

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, n est un entier tel que $n \geq 2$.

On confond polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$ ou sur $]0; +\infty[$ ou sur $]0; +\infty[$.

On note $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Partie I : Interpolation polynomiale

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On note

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad P \longmapsto \varphi(P) = (P(a_1), \dots, P(a_n)).$$

1. Montrer que φ est un isomorphisme.
2. En déduire que, pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ unique tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad P(a_i) = b_i.$$

3. Exemple : déterminer le polynôme P_0 de $\mathbb{R}_3[X]$ tel que :

$$P_0(0) = 1, \quad P_0(1) = 3, \quad P_0(2) = 11, \quad P_0(3) = 31.$$

Partie II : Polynômes spéciaux

On considère l'ensemble E des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad P(x) > 0 \quad \text{et} \quad P'(x) > 0.$$

1. Donner un exemple d'élément de E .
2. Montrer que E est stable par multiplication par un réel strictement positif, par addition et par multiplication, c'est-à-dire que, pour tout $\alpha \in]0; +\infty[$ et tous $P, Q \in E$, on a :

$$\alpha P \in E, \quad P + Q \in E, \quad PQ \in E.$$

Est-ce que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$?

3. Soit $P \in E$. On note $P_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_0^x P(t) \, dt$.

Montrer : $P_1 \in E$.

4. Soit $P \in E$. Montrer :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad P(x) \geq P(0).$$

Pour tout $P \in E$, on note $\tilde{P} : [0; +\infty[\rightarrow [P(0); +\infty[, \quad x \mapsto \tilde{P}(x) = P(x)$.

5. Montrer que l'application $\tilde{P}$ est bijective.
6. Si, de plus, P est de degré au moins 2, est-ce que l'application réciproque $\tilde{P}^{-1}$ de $\tilde{P}$ est une application polynomiale ?

Partie III : Matrices symétriques positives

On note S_n^+ l'ensemble des matrices symétriques A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tUAU \geq 0.$$

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? Justifier.
2. a. Montrer que, si A est dans S_n^+ , alors toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$.
2. b. Réciproquement, montrer que, si toutes les valeurs propres de A sont dans $[0; +\infty[$, alors A est dans S_n^+ .

Partie IV : Matrice symétrique positive solution d'une équation polynomiale spéciale

Soit $P \in E$ de degré $n - 1$ (l'ensemble E a été défini dans la partie II), et soit $A \in S_n^+$ admettant n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, appartenant toutes à $[P(0); +\infty[$.

On note D la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes diagonaux sont successivement $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, et Q une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = QDQ^{-1}$.

On se propose de résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_n^+$.

1. On suppose que l'équation $P(S) = A$ a une solution dans S_n^+ . Soit S appartenant à S_n^+ telle que $P(S) = A$. On note $\Delta = Q^{-1}SQ$.
 1. a. Montrer que $SA = AS$ et en déduire que $\Delta D = D\Delta$.

1. b. Démontrer que Δ est diagonale et que les éléments diagonaux de Δ sont tous positifs ou nuls.
2. Établir que l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_n^+$, admet une solution et une seule, et que celle-ci est $Q\Delta Q^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale que l'on exprimera à l'aide de $\tilde{P}^{-1}(\lambda_1), \dots, \tilde{P}^{-1}(\lambda_n)$, où $\tilde{P}$ a été définie dans la partie II.
3. Exemple : on prend ici $n = 4$, $P = X^3 + X + 1$ et

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 21 \end{pmatrix}.$$

3. a. Vérifier $P \in E$.
3. b. Déterminer les valeurs propres de A et montrer : $A \in S_4^+$.
3. c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que $A = QDQ^{-1}$.
3. d. Résoudre l'équation $P(S) = A$, d'inconnue $S \in S_4^+$.

PROBLÈME 2

Partie I : Formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\cos t)^n dt.$$

1. Calculer W_0 et W_1 .
2. a. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
2. b. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$: $W_n > 0$.
3. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

3. b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$(n+1)W_{n+1}W_n = W_1W_0.$$

4. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$W_n \geq W_{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

4. b. En déduire : $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$, puis :

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

5. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 0$:

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.$$

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 1$:

$$A_n = \frac{1}{n!} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

On note, pour tout entier n tel que $n \geq 2$:

$$a_n = -1 - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

6. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 2} a_n$$

converge.

7. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geq 2$:

$$a_n = \ln(A_n) - \ln(A_{n-1}).$$

8. En déduire que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que sa limite ℓ est strictement positive.

9. a. Justifier :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\ell} n^n e^{-n} \sqrt{n}.$$

9. b. En utilisant l'expression de W_{2n} à l'aide de factorielles, en déduire la valeur de ℓ et l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Partie II : Étude de variables aléatoires

Soit un réel a strictement positif et la fonction $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par :

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{a^2} e^{-x^2/(2a^2)} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant f_a comme densité.

2. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X .
3. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
4. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$.
5. a. On considère une variable aléatoire V suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0; 1]$.
Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(V)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X .
5. b. En déduire un programme en Python, utilisant le générateur aléatoire de NumPy, simulant la variable aléatoire X , le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

La commande `input(message)` affiche la chaîne `message` et renvoie la saisie de l'utilisateur sous forme de chaîne ; `float(chaine)` la convertit en réel. La commande

`numpy.random.random()` renvoie un réel aléatoire dans $[0; 1[$. La commande `print(valeur)` affiche valeur.

Pour tout entier n tel que $n \geq 2$, on considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue, dans U_n , des tirages d'une boule avec remise. Les tirages successifs sont indépendants et, à chaque tirage, les n boules sont équiprobables. On s'arrête dès que l'on obtient une boule déjà obtenue.

On note T_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

6. Justifier : $P(T_n > n + 1) = 0$.

7. Déterminer, pour tout entier k tel que $k \leq n$: $P(T_n > k)$.

On considère la variable aléatoire $Y_n = \frac{T_n}{\sqrt{n}}$. On se propose d'étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$.

Soit $y \in [0; +\infty[$. On note k_n l'entier naturel égal à la partie entière de $y\sqrt{n}$.

On a donc : $k_n \leq y\sqrt{n} < 1 + k_n$.

8. Justifier : $P(Y_n > y) = P(T_n > k_n)$.

9. En utilisant I 9. b., montrer :

$$P(Y_n > y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-k_n} \left(1 - \frac{k_n}{n}\right)^{k_n - n}.$$

10. a. Déterminer le développement limité d'ordre 2 de $t \mapsto -t + (t - 1) \ln(1 - t)$ en 0.

10. b. En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-k_n + (k_n - n) \ln \left(1 - \frac{k_n}{n} \right) \right) = -\frac{y^2}{2}.$$

11. Montrer que la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 2}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité dont on précisera une densité.