



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2011

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Partie I : Somme de variables aléatoires suivant la loi exponentielle de paramètre 1

1. Une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1 admet la densité

$$p(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est positive, continue sauf éventuellement en 0, et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Les moments d'ordre un et deux existent : les intégrales $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$ et

$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$ sont finies, par les intégrales gamma du cours. Les formules de la loi exponentielle donnent $E(X) = 1$ et $V(X) = 1$; en particulier, $E(X^2) = 2$.

2. a. Chaque X_k admet un moment d'ordre deux. Une somme finie de ces variables admet donc une espérance et une variance. Par linéarité de l'espérance,

$$E(S_n) = \sum_{k=1}^n E(X_k) = n.$$

Les X_k sont mutuellement indépendantes ; leurs covariances deux à deux sont nulles. La variance de leur somme est donc la somme des variances :

$$V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = n.$$

2. b. Méthode 1 — Somme d'exponentielles indépendantes.

Les variables $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et exponentielles de même paramètre 1. Le résultat du cours sur les sommes d'exponentielles donne $S_n \sim \gamma(n)$, de taux 1. Comme $\Gamma(n) = (n-1)!$, une densité est

$$p_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Pour $n = 1$, on lit $x^0 = 1$, y compris au point 0; la valeur d'une densité en ce seul point n'influence pas la loi.

Méthode 2 — Récurrence et convolution.

Pour $n = 1$, la formule est celle de la question 1. Supposons qu'elle soit vraie pour un entier $n \geq 1$. Le lemme des coalitions assure que S_n , fonction de $X_1, \dots, X_n$, est indépendant de X_{n+1} . Les deux variables sont à densité; la formule de convolution s'applique. Pour $x > 0$, seuls les $u \in [0; x]$ contribuent et

$$p_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{u^{n-1}e^{-u}}{(n-1)!} e^{-(x-u)} du = \frac{e^{-x}}{(n-1)!} \frac{x^n}{n} = \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

Pour $x < 0$, la densité est nulle car les deux variables sont positives. On choisit sa valeur en 0 conformément à la formule. La récurrence établit le résultat pour tout $n \geq 1$.

La première méthode utilise directement une loi usuelle; la seconde explique l'apparition de la factorielle et peut servir pour une somme dont la loi n'est pas connue.

3. Question adaptée au programme actuel : la valeur sur l'événement négligeable $\{U = 1\}$ est précisée pour définir une variable réelle partout.

On a $P(0 \leq U < 1) = 1$, donc $Y \geq 0$ presque sûrement. Pour $y < 0$, $P(Y \leq y) = 0$. Pour $y \geq 0$, les transformations suivantes sont valables sur $\{U < 1\}$:

$$-\ln(1 - U) \leq y \iff 1 - U \geq e^{-y} \iff U \leq 1 - e^{-y}.$$

Comme $1 - e^{-y} \in [0; 1[$, la fonction de répartition de la loi uniforme donne

$$P(Y \leq y) = 1 - e^{-y}.$$

La fonction de répartition obtenue est celle de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Y \sim \mathcal{E}(1)$.

4. Code adapté en Python.

On simule des uniformes indépendantes, puis on applique à chacune la transformation de la question 3. Les transformations séparées préservent leur indépendance ; la somme simule donc S_n .

Python

```
import numpy as np

def simuler_S(n):
    s = 0.0
    for k in range(n):
        u = np.random.random()
        s = s - np.log(1.0 - u)
    return s
```

Le paramètre n est un entier strictement positif choisi par l'utilisateur, par exemple `simuler_S(5)`. La variable `s` contient la somme des valeurs déjà simulées ; `range(n)` effectue exactement les n tirages nécessaires. La sortie est une réalisation simulée de S_n . Le générateur renvoie une valeur inférieure à 1, donc l'argument du logarithme est strictement positif.

Ce code a été exécuté pour plusieurs valeurs de n , y compris $n = 1$. Les vérifications numériques sont cohérentes avec les moments de la question 2 ; elles ne constituent pas une preuve de la loi.

5. Code adapté en Python. Question adaptée au programme actuel : la définition de N_t est également précisée sur l'éventuel événement exceptionnel.

Justifions d'abord que le nombre de sommes inférieures ou égales à t est presque sûrement fini. Avec probabilité 1, tous les X_k sont strictement positifs : le complément est une union dénombrable d'événements de probabilité nulle. Les sommes S_n sont donc strictement croissantes sur cet événement.

Pour $m \geq 1$, la densité de la question 2 donne

$$P(S_m \leq t) = \int_0^t \frac{x^{m-1} e^{-x}}{(m-1)!} dx \leq \frac{t^m}{m!}.$$

Pour m assez grand, le rapport des deux majorants successifs est $t/(m+1) \leq 1/2$. Ces majorants tendent donc vers 0 par comparaison avec une suite géométrique. Les événements $\{S_m \leq t\}$ décroissent à un événement de probabilité nulle, par continuité monotone des probabilités. Il existe ainsi presque sûrement une première somme strictement supérieure à t .

On simule cette première somme, puis les suivantes jusqu'au dépassement :

Python

```
import numpy as np

def simuler_N(t):
    n = 0
    u = np.random.random()
    s = -np.log(1.0 - u)
    while s <= t:
        n = n + 1
        u = np.random.random()
        s = s - np.log(1.0 - u)
    return n
```

Le paramètre t est un réel strictement positif choisi par l'utilisateur, par exemple `simuler_N(2.0)`. Au premier test, s représente S_1 et n vaut 0. Au début de chaque test, s représente S_{n+1} . Si $s \leq t$, cette somme est encore comptée, puis la suivante est simulée. À la sortie, $S_{n+1} > t$ et, si $n \geq 1$, $S_n \leq t$. La fonction renvoie donc exactement le nombre d'arrivées avant ou à l'instant t dans le modèle simulé. Si $S_1 > t$, elle renvoie immédiatement 0.

La terminaison est presque sûre dans le modèle probabiliste, d'après la justification précédente. Le code a été exécuté pour plusieurs valeurs positives de t ; ses sorties sont des entiers positifs ou nuls. Des tirages fixés ont aussi vérifié le comptage, notamment lorsqu'une somme est exactement égale à t .

Partie II : Polynômes de Laguerre

6. Pour $n = 0$, $f_0(x) = e^{-x}$ et la dérivée d'ordre zéro est la fonction elle-même. Donc $L_0(x) = 1$.

Pour $n = 1$, $f_1(x) = xe^{-x}$ et $f_1'(x) = (1 - x)e^{-x}$; ainsi $L_1(x) = 1 - x$.

Pour $n = 2$, $f_2(x) = x^2e^{-x}/2$, d'où

$$f_2'(x) = (x - x^2/2)e^{-x}, \quad f_2''(x) = (1 - 2x + x^2/2)e^{-x}.$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = 1 - x, \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$$

7. Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. La formule de Leibniz pour leur dérivée d'ordre n donne, en affectant k dérivations à l'exponentielle,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^n)^{(n-k)} (e^{-x})^{(k)}.$$

Or $(x^n)^{(n-k)} = n!x^k/k!$ et $(e^{-x})^{(k)} = (-1)^k e^{-x}$. Par substitution puis multiplication par e^x ,

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k.$$

La formule inclut $n = 0$, où la somme se réduit à 1.

8. La somme de la question 7 est une somme finie de monômes. Son coefficient de x^n est $(-1)^n \binom{n}{n} / n! = (-1)^n / n!$, qui est non nul. Il n'existe aucun terme de degré supérieur.

Ainsi L_n est un polynôme de degré exactement n , de coefficient dominant $(-1)^n / n!$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9. On dérive le produit qui définit f_{n+1} :

$$f'_{n+1}(x) = \frac{(n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!} = \frac{x^n e^{-x}}{n!} - \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)!}.$$

Donc $f'_{n+1} = f_n - f_{n+1}$ sur $\mathbb{R}$. Cette identité vaut aussi en $x = 0$, car aucune division par x n'a été effectuée.

10. Toutes les fonctions considérées sont de classe $\mathcal{C}^\infty$. On dérive $n+1$ fois l'identité de la question 9 :

$$f_{n+1}^{(n+2)} = f_n^{(n+1)} - f_{n+1}^{(n+1)}.$$

En dérivant $L_{n+1} = e^x f_{n+1}^{(n+1)}$, il vient

$$L'_{n+1} = e^x (f_{n+1}^{(n+1)} + f_{n+1}^{(n+2)}) = e^x f_n^{(n+1)}.$$

De même, $L'_n = e^x f_n^{(n)} + e^x f_n^{(n+1)} = L_n + e^x f_n^{(n+1)}$. On conclut :

$$L'_{n+1} = L'_n - L_n.$$

11. Comme $(n+1)! = (n+1)n!$ et $n+1 > 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1} e^{-x}}{(n+1)n!} = \frac{x}{n+1} f_n(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. La formule est valable en 0 et pour $n = 0$.

12. On dérive $n+1$ fois l'identité $(n+1)f_{n+1} = x f_n$. Dans la formule de Leibniz, seules les dérivées d'ordre zéro et un de x subsistent :

$$(n+1)f_{n+1}^{(n+1)} = xf_n^{(n+1)} + (n+1)f_n^{(n)}.$$

En multipliant par e^x et en utilisant $e^x f_n^{(n+1)} = L'_n - L_n$, on obtient

$$(n+1)L_{n+1} = x(L'_n - L_n) + (n+1)L_n = xL'_n + (n+1-x)L_n.$$

13. Méthode 1 — Utiliser les deux relations précédentes.

On dérive la relation de la question 12 :

$$(n+1)L'_{n+1} = xL''_n + (n+2-x)L'_n - L_n.$$

La question 10 transforme le membre de gauche en $(n+1)L'_n - (n+1)L_n$. En regroupant les termes, on trouve

$$xL''_n + (1-x)L'_n + nL_n = 0,$$

qui est l'identité demandée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Comparer les coefficients.

Posons $c_k = (-1)^k \binom{n}{k} / k!$ pour $0 \leq k \leq n$. Pour $0 \leq k < n$, le coefficient de x^k dans $xL''_n + (1-x)L'_n + nL_n$ est

$$(k+1)^2 c_{k+1} + (n-k)c_k.$$

L'identité $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}(n-k)/(k+1)$ donne

$$c_{k+1} = -\frac{n-k}{(k+1)^2} c_k.$$

Le coefficient précédent est donc nul. Pour $k = n$, le coefficient vaut $(n-n)c_n = 0$; aucun degré supérieur n'apparaît. Si $n = 0$, toutes les dérivées de $L_0 = 1$ sont nulles et l'identité se vérifie également.

La première méthode exploite la construction différentielle; la seconde permet de reconnaître directement une équation différentielle satisfaite par un polynôme explicite.

Partie III : Produit scalaire, orthogonalité, endomorphisme

14. Méthode 1 — Décomposer le polynôme en monômes.

Écrivons

$$A(x) = \sum_{k=0}^d b_k x^k,$$

avec des coefficients réels ; si $A = 0$, la convergence est immédiate. Pour $x \geq 0$, l'inégalité triangulaire donne

$$|A(x)|e^{-x} \leq \sum_{k=0}^d |b_k| x^k e^{-x}.$$

Pour chaque entier $k \geq 0$, l'intégrale gamma $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \Gamma(k+1) = k!$ est finie.

La somme du membre de droite est finie et intégrable, donc l'intégrale de $|A(x)|e^{-x}$ converge par comparaison. L'intégrale demandée est ainsi absolument convergente.

Méthode 2 — Dominer par une exponentielle intégrable.

Les croissances comparées donnent $|A(x)|e^{-x/2} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, en les appliquant à chaque monôme puis à la somme finie. Il existe donc $R > 0$ tel que, pour $x \geq R$, $|A(x)|e^{-x/2} \leq 1$. Ainsi

$$|A(x)|e^{-x} \leq e^{-x/2}$$

sur $[R; +\infty[$, et $\int_R^{+\infty} e^{-x/2} dx = 2e^{-R/2} < +\infty$. Sur $[0; R]$, l'intégrande est continue.

L'intégrale est donc absolument convergente.

La première méthode donne une majoration explicite à partir des coefficients ; la seconde prouve la convergence sans calculer les intégrales des monômes.

- 15.** Pour $P, Q \in E$, le produit PQ est polynomial. La question 14 garantit que $\langle P, Q \rangle$ est un réel bien défini. La linéarité des intégrales convergentes montre la linéarité par rapport à chacun des deux arguments, et $PQ = QP$ donne la symétrie.

De plus,

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)^2 e^{-x} dx \geq 0.$$

Montrons que cette quantité est strictement positive si P n'est pas le polynôme nul. Un polynôme non nul possède un nombre fini de racines ; il existe donc $x_0 > 0$ tel que $P(x_0) \neq 0$. La continuité de P assure l'existence de $\delta \in]0; x_0[$ tel que $|P(x)| \geq |P(x_0)|/2$ sur $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$. Par positivité de l'intégrale,

$$\langle P, P \rangle \geq \frac{|P(x_0)|^2}{4} \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} e^{-x} dx > 0.$$

Réciproquement, $P = 0$ donne $\langle P, P \rangle = 0$. L'application est donc bilinéaire, symétrique et définie positive : c'est un produit scalaire sur E . Cette preuve ne nécessite pas que E soit de dimension finie.

- 16.** Si P est polynomial, ses dérivées P' et P'' le sont aussi ; $xP'' - (x-1)P'$ appartient donc à E .

Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité de la dérivation donne

$$T(aP + bQ) = x(aP'' + bQ'') - (x-1)(aP' + bQ') = aT(P) + bT(Q).$$

L'application $T : E \rightarrow E$ est linéaire : c'est un endomorphisme de E .

- 17.** Par dérivation du produit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(xP'(x)e^{-x})' = P'(x)e^{-x} + xP''(x)e^{-x} - xP'(x)e^{-x}.$$

Le membre de droite vaut $[xP''(x) - (x-1)P'(x)]e^{-x} = T(P)(x)e^{-x}$. Ainsi la fonction indiquée est bien une primitive de $x \mapsto T(P)(x)e^{-x}$.

- 18.** Les polynômes $T(P)Q$ et $xP'Q'$ appartiennent à E . La question 14 assure la convergence absolue des deux intégrales qui vont intervenir.

Pour $R > 0$, les fonctions Q et $x \mapsto xP'(x)e^{-x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; R]$. Une intégration par parties sur ce segment donne, grâce à la question 17,

$$\int_0^R T(P)(x)Q(x)e^{-x} dx = [xP'(x)Q(x)e^{-x}]_0^R - \int_0^R xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx.$$

Le terme en 0 est nul grâce au facteur x . Le terme en R tend vers 0 car $xP'(x)Q(x)$ est un polynôme et l'exponentielle domine toute puissance à l'infini. On peut donc faire tendre R vers $+\infty$ dans cette égalité d'intégrales convergentes :

$$\langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx.$$

- 19.** La question 18 appliquée à (P, Q) donne une expression symétrique en P et Q , puisque $P'(x)Q'(x) = Q'(x)P'(x)$. En l'appliquant aussi à (Q, P) ,

$$\langle T(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} xP'(x)Q'(x)e^{-x} dx = \langle T(Q), P \rangle.$$

La symétrie du produit scalaire implique $\langle T(Q), P \rangle = \langle P, T(Q) \rangle$. Par conséquent,

$$\langle T(P), Q \rangle = \langle P, T(Q) \rangle.$$

- 20.** La question 13 énonce $xL_n'' - (x-1)L_n' + nL_n = 0$. Les deux premiers termes définissent $T(L_n)$. Donc

$$T(L_n) = -nL_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Chaque L_n est non nul d'après son degré et son coefficient dominant. Il est ainsi un vecteur propre de T associé à la valeur propre $-n$. Pour $n = 0$, cette égalité signifie $T(L_0) = 0$.

21. Soient $j, k \in \{0, \dots, N\}$ distincts. Les questions 19 et 20 donnent

$$-j\langle L_j, L_k \rangle = \langle T(L_j), L_k \rangle = \langle L_j, T(L_k) \rangle = -k\langle L_j, L_k \rangle.$$

Donc $(k - j)\langle L_j, L_k \rangle = 0$. Comme $k - j \neq 0$, on obtient $\langle L_j, L_k \rangle = 0$. Tous les polynômes de la famille sont non nuls; la famille $(L_0, \dots, L_N)$ est orthogonale. Si $N = 0$, il n'y a pas de couple distinct à vérifier et la conclusion reste valable.

22. Soit $P \in E_N$. Si P est constant, alors $T(P) = 0 \in E_N$. Sinon, posons $d = \deg P \leq N$. Le polynôme xP'' a degré au plus $d - 1$ s'il est non nul, et $(x - 1)P'$ a degré au plus d . Leur différence a donc degré au plus d .

Dans tous les cas, $T(P) \in E_N$. Le sous-espace E_N est stable par T , ce qui justifie la définition de T_N .

23. Méthode 1 — Utiliser l'orthogonalité.

La question 8 montre que chaque L_k , pour $0 \leq k \leq N$, appartient à E_N et est non nul. Si

$$\sum_{k=0}^N b_k L_k = 0,$$

le produit scalaire avec L_j donne, grâce à l'orthogonalité,

$$b_j \langle L_j, L_j \rangle = 0.$$

La définition positive implique $\langle L_j, L_j \rangle > 0$, donc $b_j = 0$ pour tout j . La famille est libre. Elle comprend $N + 1$ éléments et $\dim E_N = N + 1$, car $(1, x, \dots, x^N)$ est la base canonique. C'est donc une base de E_N .

Méthode 2 — Utiliser les degrés échelonnés.

Supposons qu'une combinaison

$$\sum_{k=0}^N b_k L_k$$

soit nulle et qu'au moins un coefficient soit non nul. Soit m le plus grand indice tel que $b_m \neq 0$. Le terme $b_m L_m$ possède le coefficient dominant $b_m (-1)^m / m! \neq 0$, alors que tous les autres termes ont degré strictement inférieur à m . La combinaison ne peut donc pas être le polynôme nul. Cette contradiction établit la liberté.

La famille possède $N + 1 = \dim E_N$ éléments de E_N , donc elle est une base. Cette preuve reste valable pour $N = 0$.

La première méthode réutilise la structure de produit scalaire ; la seconde s'applique à toute famille de polynômes de degrés successifs, même sans orthogonalité.

24. D'après la question 20, pour $0 \leq k \leq N$, $T_N(L_k) = -kL_k$. La colonne correspondant à L_k possède donc le coefficient $-k$ à la position de L_k et des zéros aux autres positions. Ainsi

$$\text{Mat}_{(L_0, \dots, L_N)}(T_N) = \text{diag}(0, -1, -2, \dots, -N).$$

Pour $N = 0$, la matrice est la matrice d'ordre un (0) .

25. La matrice précédente est diagonale dans une base de E_N . Ainsi T_N est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, pour tout $N \geq 0$.

En revanche, $L_0 = 1 \neq 0$ et $T_N(L_0) = 0$. Le noyau n'est pas réduit au vecteur nul ; T_N n'est pas injectif, donc n'est pas bijectif.

Plus précisément, si

$$P = \sum_{k=0}^N b_k L_k,$$

alors

$$T_N(P) = \sum_{k=1}^N (-k) b_k L_k.$$

Par unicité des coordonnées,

$$\text{Ker } T_N = \text{Vect}(L_0), \quad \text{Im } T_N = \text{Vect}(L_1, \dots, L_N), \quad \text{rg } T_N = N.$$

Quand $N = 0$, l'image est $\{0\}$, conformément à la formule.

Partie IV : Nature d'une série de maximums

26. Pour $n \geq 1$, g_n est continue sur $[0; +\infty[$ et dérivable sur $]0; +\infty[$. Pour $x > 0$,

$$g'_n(x) = \frac{x^{n-1} e^{-x}}{n!} (n - x).$$

Le premier facteur est strictement positif. La fonction est donc strictement croissante sur $[0; n]$, puis strictement décroissante sur $[n; +\infty[$. La continuité en 0 permet d'inclure cette extrémité dans le premier intervalle. On a aussi $g_n(0) = 0$ et $g_n(x) \rightarrow 0$ à l'infini par croissances comparées.

Le maximum est atteint uniquement en $x = n$ et vaut

$$M_n = \frac{n^n e^{-n}}{n!} > 0.$$

27. Les M_n et μ_n sont strictement positifs, donc leurs logarithmes existent. Calculons d'abord le quotient :

$$\frac{M_{n+1}}{M_n} = \frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} n!}{(n+1)! n^n e^{-n}} = e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ainsi

$$a_n = \ln \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Posons $h = 1/n$, qui tend vers 0. Le développement limité usuel du logarithme à l'ordre trois est

$$\ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3).$$

L'ordre trois est nécessaire car on multiplie par $1/h$. En effectuant le produit,

$$\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+h) = 1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{3} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^2) = 1 + \frac{h^2}{12} + o(h^2).$$

On en déduit le développement demandé :

$$a_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Aucune composition de développements limités n'intervient : on évalue le développement usuel en $h = 1/n$, puis on multiplie par une expression explicite.

28. La question 27 donne $a_n \sim 1/(12n^2)$. En particulier, $a_n > 0$ à partir d'un certain rang, et $|a_n| \sim 1/(12n^2)$.

La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge, son exposant étant strictement supérieur à 1. Le critère d'équivalence pour les séries à termes positifs assure donc la convergence de

$$\sum |a_n|.$$

Les éventuels premiers termes ne changent pas sa nature. Ainsi

$$\sum a_n$$

converge absolument.

29. Les sommes sont télescopiques : pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\ln \mu_{k+1} - \ln \mu_k) = \ln \mu_n - \ln \mu_1.$$

La question 28 assure que le membre de gauche possède une limite réelle

$$A = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

Comme $\mu_1 = e^{-1}$, il vient

$$\ln \mu_n \longrightarrow -1 + A.$$

Par continuité de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$,

$$\mu_n \longrightarrow \ell = \exp(-1 + A) > 0.$$

La limite est finie et strictement positive. Il n'est pas nécessaire d'en déterminer la valeur pour répondre aux questions suivantes.

30. Par définition, $M_n = \mu_n / \sqrt{n}$. Puisque $\mu_n \longrightarrow \ell > 0$,

$$M_n \sim \frac{\ell}{\sqrt{n}}.$$

Tous les termes M_n sont positifs. La série de Riemann

$$\sum 1/\sqrt{n}$$

diverge car son exposant $1/2$ est inférieur ou égal à 1. Le critère d'équivalence donne donc la divergence de

$$\sum M_n,$$

dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$.

La preuve utilise les questions 27 à 29, sans faire appel à une formule asymptotique de la factorielle.

Partie V : Étude d'extremum local pour une fonction de deux variables réelles

31. La fonction $f(x) = xe^{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. Les applications $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto x + y$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$; sur $\Omega =]0; +\infty[^2$, leurs valeurs appartiennent au domaine de f . Les règles de composition et d'addition donnent donc $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

L'ensemble Ω est ouvert : si $x, y > 0$, un disque de rayon inférieur à $\min(x, y)$ centré en (x, y) est contenu dans Ω .

En dérivant par rapport à chaque variable,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = f'(x) - f'(x + y), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = f'(y) - f'(x + y),$$

où $f'(u) = (1 - u)e^{-u}$ pour $u > 0$.

32. Méthode 1 — Étudier les variations de la dérivée.

Pour $x > 0$,

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}.$$

Comme $e^{-x} > 0$, la fonction f' est strictement décroissante sur $]0; 2]$, puis strictement croissante sur $[2; +\infty[$. Sur chacun des intervalles $]0; 2]$ et $[2; +\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$ possède donc au plus une solution. Elle possède ainsi au plus deux solutions dans $]0; +\infty[$, dont a est l'une. Elle admet au plus une solution distincte de a .

En particulier, si $a = 2$, $f'(2) = -e^{-2}$ est le minimum strict de f' et la seule solution est 2. Le raisonnement couvre aussi les autres valeurs de a , sans exiger qu'une seconde

solution existe.

Méthode 2 — Appliquer le théorème de Rolle.

Si l'équation possédait trois solutions distinctes $u < v < w$ dans $]0; +\infty[$, la fonction f' serait continue sur $[u; v]$ et $[v; w]$, dérivable à l'intérieur de ces segments, et prendrait les mêmes valeurs à leurs extrémités. Le théorème de Rolle donnerait deux points distincts $c_1 \in]u; v[$ et $c_2 \in]v; w[$ tels que $f''(c_1) = f''(c_2) = 0$.

Or $f''(x) = (x - 2)e^{-x}$ ne s'annule qu'en 2. Cette contradiction prouve qu'il y a au plus deux solutions, donc au plus une distincte de a .

L'étude des variations localise les solutions possibles; Rolle fournit une méthode de comptage utile lorsque la dérivée possède peu de zéros.

33. D'après la question 31, (x, y) est critique si et seulement si

$$f'(x) = f'(x + y) \quad \text{et} \quad f'(y) = f'(x + y).$$

Supposons (x, y) critique. Comme $x, y > 0$, le nombre $x + y$ est strictement supérieur à chacun de x et y . Dans l'équation $f'(u) = f'(x + y)$, les nombres x et y sont donc deux solutions distinctes de la solution $u = x + y$, sauf s'ils sont égaux. La question 32 impose ainsi $x = y$. Les égalités de dérivées deviennent alors $f'(x) = f'(2x)$.

Réciproquement, si $x = y > 0$ et $f'(x) = f'(2x)$, les deux dérivées partielles de la question 31 sont nulles. Le point (x, y) est critique.

Ainsi l'équivalence demandée est établie dans les deux sens.

34. Il faut résoudre $f'(x) = f'(2x)$ pour $x > 0$. Écartons d'abord les valeurs en dehors de $]1; 2[$.

Si $0 < x \leq 1$, alors $x < 2x \leq 2$; la stricte décroissance de f' sur $]0; 2]$ implique $f'(x) > f'(2x)$. Si $x \geq 2$, alors $2 \leq x < 2x$; sa stricte croissance sur $[2; +\infty[$ implique $f'(x) < f'(2x)$. Aucun de ces cas ne fournit de solution.

Méthode 1 — Ramener à une fonction strictement croissante.

Pour $x > 0$, l'égalité $(1 - x)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-2x}$ est équivalente, en multipliant par $e^{2x} > 0$, à

$$h(x) = (x - 1)e^x - 2x + 1 = 0.$$

Sur $[1; 2]$, h est continue et

$$h'(x) = xe^x - 2 \geq e - 2 > 0.$$

L'inégalité $e > 2$ découle par exemple de la série exponentielle

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/k!.$$

La fonction h est donc strictement croissante sur $[1; 2]$. De plus,

$$h(1) = -1 < 0, \quad h(2) = e^2 - 3 > 0.$$

La dernière inégalité suit de $e > 2$, donc $e^2 > 4$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne une solution $\alpha \in]1; 2[$, et la stricte croissance donne son unicité. Comme il n'y a aucune solution à l'extérieur de cet intervalle, c'est la seule solution positive.

Méthode 2 — Comparer deux fonctions de monotonies opposées.

Pour $x > 1$, on a $2x - 1 > 0$ et l'équation est équivalente à

$$\frac{x - 1}{2x - 1} = e^{-x}.$$

La fonction $u(x) = (x - 1)/(2x - 1)$ est continue sur $[1; 2]$ et $u'(x) = 1/(2x - 1)^2 > 0$. La fonction $v(x) = e^{-x}$ est continue et strictement décroissante sur cet intervalle. Ainsi

$u - v$ est strictement croissante. On a

$$u(1) - v(1) = -e^{-1} < 0, \quad u(2) - v(2) = \frac{1}{3} - e^{-2} > 0,$$

car $e^2 > 3$. Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte croissance donnent une unique intersection dans $]1; 2[$. Les valeurs en dehors de cet intervalle ont déjà été exclues.

La première méthode étudie un seul membre de l'équation ; la seconde utilise directement la rencontre d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Par la question 33, F admet exactement un point critique, (α, α) , avec $1 < \alpha < 2$.

35. On a $f''(u) = (u - 2)e^{-u}$ et le facteur exponentiel est strictement positif. Puisque $\alpha < 2$,

$$f''(\alpha) = (\alpha - 2)e^{-\alpha} < 0.$$

Puisque $\alpha > 1$, $2\alpha > 2$, donc

$$f''(2\alpha) = (2\alpha - 2)e^{-2\alpha} > 0.$$

36. On applique le critère par la hessienne et les signes de ses valeurs propres, après avoir vérifié en question 31 que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω .

Les dérivées partielles secondes sont

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = f''(x) - f''(x + y), \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) = f''(y) - f''(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = -f''(x + y).$$

La hessienne au seul point critique est donc

$$H_F(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f''(\alpha) - f''(2\alpha) & -f''(2\alpha) \\ -f''(2\alpha) & f''(\alpha) - f''(2\alpha) \end{pmatrix}.$$

Posons $b = f''(\alpha) < 0$ et $c = f''(2\alpha) > 0$, d'après la question 35. On obtient

$$H = \begin{pmatrix} b - c & -c \\ -c & b - c \end{pmatrix}. \text{ Des multiplications matricielles explicites donnent}$$

$$H \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (b - 2c) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ces deux vecteurs sont indépendants : une combinaison nulle conduit, en additionnant et en soustrayant les deux coordonnées, à deux coefficients nuls. Ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Les deux valeurs propres de H sont exactement b et $b - 2c$. Elles sont toutes deux strictement négatives.

Le critère de la hessienne assure que (α, α) est un maximum local strict de F . Pour expliciter le caractère strict, les vecteurs précédents, divisés par $\sqrt{2}$, constituent une base orthonormale. Si (h, k) a pour coordonnées (u, v) dans cette base, alors

$$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = bu^2 + (b - 2c)v^2 \leq b(u^2 + v^2) = b(h^2 + k^2).$$

Le développement limité d'ordre deux au point critique, dont le gradient est nul, donne

$$F(\alpha + h, \alpha + k) - F(\alpha, \alpha) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2 + k^2).$$

Comme $b < 0$, pour (h, k) suffisamment proche de $(0, 0)$, la valeur absolue du reste est au plus $(-b)(h^2 + k^2)/4$. Pour $(h, k) \neq (0, 0)$ dans ce voisinage, la différence est donc au plus $b(h^2 + k^2)/4 < 0$. Le voisinage peut être choisi dans Ω puisque $\alpha > 0$.

Enfin, tout extremum local d'une fonction différentiable sur un ouvert est un point critique. La question 34 n'en a fourni qu'un ; il existe donc exactement un extremum local, qui est ce maximum local strict. Sa valeur est

$$F(\alpha, \alpha) = 2\alpha e^{-\alpha} - 2\alpha e^{-2\alpha}.$$

Relevé des adaptations

- Question 3 : précision de la valeur arbitraire de Y sur $\{U = 1\}$, événement de probabilité nulle, pour que la variable aléatoire soit définie comme une variable réelle partout. La transformation et sa loi sont inchangées.
- Question 4 : code adapté en Python ; le générateur uniforme et la transformation logarithmique sont conservés. L'entrée de l'utilisateur est transmise comme argument de la fonction.
- Question 5 : code adapté en Python avec la même simulation par sommes successives ; précision de la convention sur l'événement négligeable où le plus grand entier n'existe pas, et de l'égalité d'événements à un événement négligeable près. Le corrigé justifie que cette exception a probabilité nulle.