



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2010

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Partie I : Résultats généraux sur les matrices stochastiques —

Illustrations

1. a. Pour traduire les sommes des lignes en un produit matriciel, on utilise que chaque coefficient de V vaut 1. Pour toute ligne $i \in \{1, \dots, p\}$:

$$(AV)_i = \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} V_j = \sum_{j=1}^p (A)_{i,j}.$$

Ainsi, $AV = V$ équivaut exactement à l'égalité à 1 de la somme de chaque ligne. En lui ajoutant la positivité de tous les coefficients, on retrouve les deux conditions de la définition :

$$A \in \mathcal{ST}_p \iff (\forall i, j, (A)_{i,j} \geq 0) \text{ et } AV = V.$$

1. b. Le vecteur V est non nul. Pour toute $A \in \mathcal{ST}_p$, la question précédente donne $AV = V = 1 \cdot V$. Par définition d'une valeur propre, 1 est donc une valeur propre de toutes les matrices stochastiques, avec le même vecteur propre V .

2. Méthode 1 — Caractérisation à l'aide de V

Soient $A, B \in \mathcal{ST}_p$. Pour tous i, j :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} (B)_{k,j} \geq 0,$$

car tous les produits sommés sont positifs ou nuls. De plus, $BV = V$ et $AV = V$, donc $ABV = A(BV) = AV = V$. La caractérisation de I.1.a donne $AB \in \mathcal{ST}_p$.

Méthode 2 — Sommes des coefficients

La positivité des coefficients du produit s'établit comme ci-dessus. Pour chaque i , on calcule directement la somme de sa ligne, en permutant seulement deux sommes finies :

$$\sum_{j=1}^p (AB)_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} (B)_{k,j} = \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} \left(\sum_{j=1}^p (B)_{k,j} \right) = \sum_{k=1}^p (A)_{i,k} = 1.$$

Ainsi, AB est stochastique. La première méthode exploite la caractérisation matricielle ; la seconde permet de vérifier directement les deux conditions de la définition.

3. a. La matrice A_1 est triangulaire et ses trois coefficients diagonaux 1 , $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont distincts. Ils sont donc ses trois valeurs propres réelles distinctes. Le critère de diagonalisation en dimension 3 donne, sans calcul de vecteurs propres, que A_1 est diagonalisable.

Les espaces propres de valeurs propres distinctes sont en somme directe. Chacun a une dimension au moins égale à 1 ; la somme des dimensions ne peut pas dépasser 3. Les trois dimensions valent donc exactement 1. En particulier :

$$\dim E_1(A_1) = 1.$$

3. b. (i) Question adaptée au programme actuel : la non-diagonalisation est étudiée sur les réels.

On choisit A_3 . Ses coefficients sont positifs ou nuls et chaque ligne a une somme égale à 1 ; donc $A_3 \in \mathcal{ST}_3$. Comme elle est triangulaire, ses seules valeurs propres sont 1 et $\frac{1}{2}$.

Pour déterminer $E_1(A_3)$, on écrit, avec $X = {}^t(x, y, z)$:

$$A_3 X = X \iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = y, \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = z. \end{cases} \iff x = y = z.$$

Ainsi $E_1(A_3) = \text{Vect}(^t(1, 1, 1))$, de dimension 1.

Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, les première et troisième lignes de $A_3 X = \frac{1}{2}X$ imposent respectivement $x = 0$ et $y = 0$. La deuxième est alors satisfaite et z est libre. Ainsi :

$$E_{1/2}(A_3) = \text{Vect}(^t(0, 0, 1)).$$

La somme des dimensions de ses espaces propres vaut $2 < 3$. Par le critère des dimensions, A_3 n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. b. (ii) On utilise A_2 comme contre-exemple. Cette matrice est stochastique. Pour $X = ^t(x, y, z)$:

$$A_2 X = X \iff \frac{y+z}{2} = y \text{ et } \frac{y+z}{2} = z \iff y = z.$$

La coordonnée x est libre. Par conséquent :

$$E_1(A_2) = \{^t(x, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(^t(1, 0, 0), ^t(0, 1, 1)).$$

Les deux vecteurs sont libres ; cet espace est de dimension 2. L'affirmation proposée est donc fausse.

4. a. Question adaptée au programme actuel : λ et le vecteur propre sont réels.

Comme $AX = \lambda X$, la ligne i choisie dans l'énoncé donne

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire, la positivité des coefficients et le choix de i :

$$|\lambda x_i| \leq \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} |x_j| \leq |x_i| \sum_{j=1}^p (A)_{i,j} = |x_i|.$$

C'est l'inégalité demandée.

4. b. Un vecteur propre est non nul, donc au moins une coordonnée de X est non nulle. Puisque $|x_i|$ est maximal, $|x_i| > 0$. On peut donc diviser l'inégalité de I.4.a par $|x_i|$. Il vient $|\lambda| \leq 1$. Toute valeur propre réelle d'une matrice stochastique appartient ainsi à $[-1, 1]$.

Partie II : Suites de moyennes de puissances de matrices stochastiques

1. a. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 0$, $A^0 = I_p$ est stochastique : ses coefficients sont positifs ou nuls et la somme de chaque ligne vaut 1.

Si $A^n \in \mathcal{ST}_p$, le résultat I.2 appliqué à A^n et A montre que $A^{n+1} = A^n A \in \mathcal{ST}_p$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n \in \mathcal{ST}_p.$$

1. b. Fixons $n \geq 1$ et posons

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

Par II.1.a, les coefficients de chaque A^k sont positifs ou nuls, donc ceux de C_n le sont aussi. Pour chaque ligne i :

$$\sum_{j=1}^p (C_n)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^p (A^k)_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1.$$

Par conséquent, $C_n \in \mathcal{ST}_p$ pour tout $n \geq 1$.

2. Si $x = 1$, la moyenne vaut

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = 1$$

pour chaque $n \geq 1$; sa limite est donc 1.

Si $|x| \leq 1$ et $x \neq 1$, la formule de la somme géométrique finie donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{n(1 - x)}.$$

La quantité $1 - x$ est non nulle et fixe. Comme $|x^n| \leq 1$:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right| \leq \frac{2}{n|1 - x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Cette majoration traite aussi le cas $x = -1$, même si la suite (x^n) ne converge pas. La limite est donc 0 dans tous les cas $x \neq 1$ considérés.

3. Écrivons $d_i = (D)_{i,i}$. Si e_i désigne la colonne i de I_p , l'égalité $AP = PD$ donne $A(Pe_i) = d_i Pe_i$. Puisque P est inversible, $Pe_i \neq 0$. Chaque d_i est donc une valeur propre réelle de A et, par I.4.b, $|d_i| \leq 1$.

Toutes les matrices D^k sont diagonales. Pour $n \geq 1$:

$$(M_n)_{i,i} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} d_i^k, \quad (M_n)_{i,j} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Si $i \leq r$, alors $d_i = 1$ et $(M_n)_{i,i} = 1$. Si $i > r$, alors $d_i \neq 1$ et la question II.2 donne $(M_n)_{i,i} \rightarrow 0$. Cela prouve, coefficient par coefficient, $M_n \rightarrow \Delta$.

Les suites constantes de matrices P et P^{-1} convergent vers elles-mêmes. En appliquant deux fois la propriété admise sur les produits de matrices convergentes :

$$B_n = PM_nP^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\Delta P^{-1} = B.$$

4. a. L'égalité $A = PDP^{-1}$ implique, par récurrence, $A^k = PD^kP^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Pour $k = 0$, les deux membres valent I_p . Pour passer de k à $k + 1$, on utilise $P^{-1}P = I_p$ dans le produit.

Par distributivité :

$$B_n = P \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D^k \right) P^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} PD^kP^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A^k.$$

La question II.1.b donne donc $B_n \in \mathcal{ST}_p$ pour tout $n \geq 1$.

4. b. Pour tous i, j , $(B_n)_{i,j} \geq 0$ et $(B_n)_{i,j} \rightarrow (B)_{i,j}$, d'où $(B)_{i,j} \geq 0$ par passage à la limite dans une inégalité.

Pour chaque ligne i , une somme finie commute avec le passage à la limite :

$$\sum_{j=1}^p (B)_{i,j} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^p (B_n)_{i,j} = 1.$$

Les deux conditions de stochasticité sont vérifiées, donc $B \in \mathcal{ST}_p$.

Partie III : Aspect probabiliste

1. Question adaptée au programme actuel : le préambule définit les lignes de transition aussi pour les urnes dont la probabilité d'occupation est nulle. Une probabilité conditionnelle n'est utilisée que si l'événement conditionnant a une probabilité strictement positive.

Pour chaque urne i , la ligne i de A est, par hypothèse, une loi de probabilité sur $\{1, 2, 3\}$. Ainsi ses coefficients sont positifs ou nuls et leur somme vaut 1. Cela donne exactement $A \in \mathcal{ST}_3$.

2. Pour un instant n et une urne j fixés, les trois événements $(X_n = i), i \in \{1, 2, 3\}$, forment un système complet d'événements. On applique les probabilités totales en ne conditionnant que par ceux de probabilité non nulle :

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ P(X_n = i) > 0}} P(X_n = i) P_{(X_n = i)}(X_{n+1} = j).$$

Les termes associés aux états de probabilité nulle valent 0 dans l'expression $P(X_n = i)(A)_{i,j}$. On peut donc écrire, en utilisant l'hypothèse sur les transitions :

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^3 P(X_n = i)(A)_{i,j} = (L_n A)_j.$$

Cette égalité pour les trois colonnes donne $L_{n+1} = L_n A$.

On obtient ensuite par récurrence $L_n = L_0 A^n$: c'est vrai à $n = 0$, et si $L_n = L_0 A^n$, alors $L_{n+1} = L_n A = L_0 A^{n+1}$.

3. Pour respecter l'ordre des coefficients de D_1 , on cherche successivement des vecteurs propres pour 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$. On écrit $X = {}^t(x, y, z)$.

Pour la valeur propre 1, $A_1 X = X$ donne $x = y$ puis $x + y = 2z$, donc $x = y = z$. Le premier coefficient diagonal de P_1 devant valoir 1, on choisit $v_1 = {}^t(1, 1, 1)$.

Pour la valeur propre $\frac{1}{2}$, la première ligne impose $x = 0$, la deuxième n'ajoute aucune contrainte et la troisième donne $\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = \frac{1}{2}z$, soit $z = 2y$. Le deuxième coefficient diagonal devant valoir 1, on choisit $v_2 = {}^t(0, 1, 2)$.

Pour la valeur propre $\frac{1}{3}$, la première ligne impose $x = 0$ et la deuxième impose $y = 0$; z est libre. On choisit $v_3 = {}^t(0, 0, 1)$.

Ainsi :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice triangulaire a des coefficients diagonaux non nuls ; elle est donc inversible. Pour calculer son inverse, on résout $P_1 X = Y$ avec $Y = {}^t(a, b, c)$. Les lignes donnent :

$$x = a, \quad y = b - a, \quad z = c - x - 2y = c + a - 2b.$$

D'où :

$$P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes choisies vérifient $A_1 P_1 = P_1 D_1$. Comme P_1 est inversible, on en déduit $A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1}$. Tous les coefficients diagonaux de P_1 valent bien 1.

4. Pour tout $n \geq 1$:

$$D_1^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix}.$$

Puisque $2^{-n} \rightarrow 0$ et $3^{-n} \rightarrow 0$, la définition de la convergence matricielle donne :

$$D_1^n \longrightarrow \Delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De la diagonalisation, on déduit $A_1^n = P_1 D_1^n P_1^{-1}$. Le passage à la limite dans les produits donne :

$$A_1^n \longrightarrow P_1 \Delta_1 P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_1.$$

Pour expliciter le produit, $P_1 \Delta_1$ conserve seulement la première colonne ${}^t(1, 1, 1)$ de P_1 . La première ligne de P_1^{-1} vaut $(1, 0, 0)$; leur produit donne donc B_1 .

5. Méthode 1 — Limite matricielle

Écrivons $L_0 = (a, b, c)$, où $a, b, c \geq 0$ et $a + b + c = 1$. La question III.2 et la propriété admise sur le produit par une matrice-ligne fixe donnent :

$$L_n = L_0 A_1^n \longrightarrow L_0 B_1 = (a + b + c, 0, 0) = (1, 0, 0).$$

Ainsi, $P(X_n = 1) \rightarrow 1$, tandis que $P(X_n = 2) \rightarrow 0$ et $P(X_n = 3) \rightarrow 0$, quelle que soit la loi initiale.

Méthode 2 — Probabilité de rester hors de l'urne absorbante

La première ligne de A_1 indique que l'objet situé dans l'urne 1 y reste à l'étape suivante avec probabilité 1. L'urne 1 est donc absorbante. Depuis l'urne 2, la probabilité d'y entrer vaut $\frac{1}{2}$; depuis l'urne 3, elle vaut $\frac{1}{3}$.

Posons $q_n = P(X_n \neq 1)$. La formule des probabilités totales, avec la même convention pour les événements de probabilité nulle qu'en III.2, donne :

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{2}{3}P(X_n = 3) \leq \frac{2}{3}q_n.$$

Par récurrence, $0 \leq q_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n q_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Donc $q_n \rightarrow 0$, ce qui entraîne les trois limites précédentes. Cette preuve explique le résultat : tant que l'objet n'est pas dans l'urne 1, sa probabilité d'y entrer à l'étape suivante est au moins $\frac{1}{3}$.

On peut aussi préciser l'absorption presque sûre. Pour chaque n , $P(X_n = 1, X_{n+1} \neq 1) = 0$. L'union de ces événements sur tous les entiers a donc une probabilité nulle. En dehors de cette union, une entrée dans l'urne 1 est définitive. Les événements « l'objet n'est jamais entré dans l'urne 1 jusqu'à l'instant n » sont décroissants et ont une probabilité au plus q_n , qui tend vers 0. La continuité décroissante des probabilités montre que l'objet atteint l'urne 1 en un temps fini presque sûrement.

La méthode matricielle calcule directement la limite; la méthode probabiliste met en

évidence l'absorption et fournit une majoration de la probabilité de ne pas encore être absorbé.

PROBLÈME 2

On conserve $J =]-1, +\infty[$ et $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$.

Préliminaires

1. La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Pour tout $k \geq 0$, $2k+1 \geq k+1 > 0$, donc :

$$0 \leq \frac{1}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{(k+1)^2}.$$

La série de droite converge par le même critère. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

converge.

Enfin, $\left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$. La troisième série converge absolument, donc elle converge également.

2. Posons

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

et

$$O = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Pour tout $N \geq 1$, la séparation des indices pairs et impairs dans une somme finie donne :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} + \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Toutes ces sommes partielles ont une limite d'après la question 1. En passant à la limite :

$$S = \frac{1}{4}S + O. \text{ Avec la valeur admise } S = \frac{\pi^2}{6} :$$

$$O = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. Pour tout $N \geq 1$, on sépare encore les indices dans la somme finie :

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

La série alternée est convergente par la question 1, donc sa suite de sommes partielles d'indice pair a la même limite que la suite entière. En utilisant les valeurs de la question 2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie I : Éléments d'étude de f

1. Fixons $x > -1$. La fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+t}$ est continue et positive sur $]0, 1]$. Le seul problème éventuel de convergence se situe en 0.

Pour tout $t \in]0, 1]$, $0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$. Or, pour $\varepsilon \in]0, 1[$:

$$\int_{\varepsilon}^1 t^x dt = \frac{1 - \varepsilon^{x+1}}{x+1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1},$$

car $x+1 > 0$. L'intégrale de référence est donc convergente. Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, l'intégrale définissant $f(x)$ converge, pour tout $x \in J$.

2. Pour $x = 0$, une primitive de $\frac{1}{1+t}$ est $\ln(1+t)$ sur $[0, 1]$. Ainsi :

$$f(0) = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2.$$

Pour $x = 1$, on écrit $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$. Par linéarité :

$$f(1) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 1 - \ln 2.$$

3. Les intégrales comparées existent d'après I.1. En intégrant $0 \leq \frac{t^x}{1+t} \leq t^x$, on obtient :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\frac{1}{x+1} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, le théorème d'encadrement donne $f(x) \rightarrow 0$.

4. a. Pour $t \in]0, 1]$, $\ln t \leq 0$. Si $x \leq y$, la multiplication par $\ln t$ donne $x \ln t \geq y \ln t$.

L'exponentielle étant croissante :

$$t^x = \exp(x \ln t) \geq \exp(y \ln t) = t^y.$$

Lorsque $t = 1$, les deux puissances valent 1, ce qui couvre également cette borne.

4. b. Soient $x, y \in J$ tels que $x \leq y$. La question I.4.a et la positivité de $1 + t$ donnent $\frac{t^x}{1+t} \geq \frac{t^y}{1+t}$ pour tout $t \in]0, 1]$. En intégrant sur $[\varepsilon, 1]$, puis en faisant tendre ε vers 0, avec les convergences établies en I.1 :

$$f(x) \geq f(y).$$

La fonction f est donc décroissante sur J .

En fait, elle est strictement décroissante. Si $x < y$, l'inégalité des intégrandes est stricte pour tout $t \in]0, 1[$. Leur différence est continue et strictement positive, par exemple sur $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, et son intégrale sur ce segment est strictement positive. Ainsi $f(x) > f(y)$.

5. Pour $x \in J$, on a aussi $x + 1 \in J$; les deux intégrales sont donc convergentes. Pour $\varepsilon > 0$, la linéarité sur le segment donne :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x}{1+t} dt + \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^{x+1}}{1+t} dt = \int_{\varepsilon}^1 \frac{t^x(1+t)}{1+t} dt = \int_{\varepsilon}^1 t^x dt.$$

En passant à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x+1}.$$

6. Méthode 1 — Encadrement avec la relation fonctionnelle

Pour $x > 0$, la décroissance donne $f(x+1) \leq f(x)$. Avec I.5, on en déduit $\frac{1}{x+1} \leq 2f(x)$.

On applique ensuite I.5 à $x-1 \in J$: $f(x-1) + f(x) = \frac{1}{x}$. Comme $f(x-1) \geq f(x)$, on obtient $2f(x) \leq \frac{1}{x}$. Ainsi :

$$\frac{1}{2(x+1)} \leq f(x) \leq \frac{1}{2x} \quad (x > 0).$$

En multipliant par $2x > 0$, $\frac{x}{x+1} \leq 2xf(x) \leq 1$. L'encadrement donne $2xf(x) \rightarrow 1$, donc $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Méthode 2 — Isolation de la contribution principale dans l'intégrale

Pour $t \in]0, 1]$, l'identité $\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2} + \frac{1-t}{2(1+t)}$ donne :

$$f(x) = \frac{1}{2(x+1)} + R(x), \quad R(x) = \int_0^1 \frac{t^x(1-t)}{2(1+t)} dt.$$

Les intégrales convergent par comparaison avec t^x . Puisque $0 \leq \frac{1-t}{2(1+t)} \leq \frac{1-t}{2}$:

$$0 \leq R(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (t^x - t^{x+1}) dt = \frac{1}{2(x+1)(x+2)}.$$

En divisant par $\frac{1}{2(x+1)} > 0$, on obtient $0 \leq 2(x+1)R(x) \leq \frac{1}{x+2} \rightarrow 0$. Ainsi

$$f(x) \sim \frac{1}{2(x+1)} \sim \frac{1}{2x}.$$

La première méthode utilise les résultats demandés dans l'énoncé. La seconde donne en plus un contrôle explicite de l'erreur autour de $\frac{1}{2(x+1)}$.

7. a. Méthode 1 — Récurrence à partir de I.5

Fixons $x \in J$. Pour $n = 0$, la formule demandée est $f(x) = -f(x+1) + \frac{1}{x+1}$, qui est I.5.

Supposons, pour un entier $n \geq 0$, que :

$$f(x) = (-1)^{n+1}f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

La relation I.5, appliquée à $x+n+1 \in J$, donne

$f(x+n+1) = \frac{1}{x+n+2} - f(x+n+2)$. On remplace ce terme dans l'hypothèse :

$$f(x) = (-1)^{n+2}f(x+n+2) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} + \frac{(-1)^{n+1}}{x+n+2}.$$

C'est la formule au rang $n+1$. Par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Identité géométrique finie sous l'intégrale

Pour tout $t \in]0, 1]$ et tout $n \geq 0$, la somme géométrique finie donne :

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}.$$

On multiplie par t^x et on intègre. Chaque intégrale de puissance est convergente, puisque $x+k > -1$, et l'intégrale du reste est $f(x+n+1)$, également définie. La linéarité ne concerne qu'une somme finie, donc :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{x+k} dt + (-1)^{n+1} f(x+n+1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} + (-1)^{n+1} f(x+n+1).$$

La récurrence exploite la relation entre deux valeurs consécutives de f ; l'identité géométrique explique directement l'origine de la somme et du reste.

7. b. Pour $n \geq 0$, I.3 donne :

$$0 \leq f(x+n+1) \leq \frac{1}{x+n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le terme $(-1)^{n+1} f(x+n+1)$ tend donc vers 0. D'après l'égalité de I.7.a, les sommes partielles vérifient :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1+x} = f(x) - (-1)^{n+1} f(x+n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

Cela établit, par définition de la convergence d'une série, que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1+x}.$$

On a aussi un contrôle de l'erreur : sa valeur absolue est au plus $\frac{1}{x+n+2}$. Aucun échange entre une somme infinie et une intégrale n'a été utilisé.

8. a. Soient $x, y \in J$ et $k \geq 1$. On a $k+1+x > k > 0$ et $k+1+y > k > 0$. En réduisant au même dénominateur :

$$\left| \frac{1}{k+1+x} - \frac{1}{k+1+y} \right| = \frac{|x-y|}{(k+1+x)(k+1+y)} \leq \frac{|x-y|}{k^2}.$$

Pour $k = 0$, la différence vaut exactement $\frac{|x - y|}{(x + 1)(y + 1)}$, car $x + 1$ et $y + 1$ sont strictement positifs.

Pour $N \geq 1$, l'inégalité triangulaire appliquée à une somme finie donne :

$$\left| \sum_{k=0}^N \left(\frac{(-1)^k}{k+1+x} - \frac{(-1)^k}{k+1+y} \right) \right| \leq |x - y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \right).$$

Par I.7.b, les deux sommes partielles du membre de gauche convergent respectivement vers $f(x)$ et $f(y)$. La continuité de la valeur absolue et la valeur de la série de Riemann permettent de passer à la limite :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \left(\frac{1}{(x+1)(y+1)} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

8. b. Fixons $x \in J$. Si $|y - x| < \frac{x+1}{2}$, alors $y + 1 > \frac{x+1}{2} > 0$, donc $y \in J$.
L'inégalité de I.8.a donne :

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \left(\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{\pi^2}{6} \right).$$

La constante entre parenthèses dépend seulement de x . Lorsque $y \rightarrow x$, le membre de droite tend vers 0. Ainsi $f(y) \rightarrow f(x)$: f est continue en x . Ce raisonnement valant pour tout $x \in J$, f est continue sur J .

9. Lorsque $x \rightarrow -1^+$, on a $x + 1 \rightarrow 0^+$, et la continuité de f en 0 donne

$$f(x + 1) \rightarrow f(0) = \ln 2.$$

La relation I.5 s'écrit $f(x) = \frac{1}{x+1} - f(x+1)$. En multipliant par $x + 1 > 0$:

$$(x + 1)f(x) = 1 - (x + 1)f(x + 1) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} 1.$$

Ainsi $f(x) \sim \frac{1}{x+1}$ lorsque $x \rightarrow -1^+$. Puisque $\frac{1}{x+1} \rightarrow +\infty$, on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty.$$

Partie II : Dérivabilité de f

1. Méthode 1 — Calcul exact du reste

Fixons $x, y \in J$ et $k \geq 1$. Posons $a = k + 1 + x$ et $b = k + 1 + y$. On a $a > k$, $b > k$ et $b - a = y - x$. Par dérivation d'une fonction rationnelle sur J :

$$g'_k(x) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

On calcule exactement l'expression demandée :

$$g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x) = (-1)^k \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{x - y}{a^2} \right).$$

Comme $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{x - y}{ab}$, il vient :

$$g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x) = (-1)^k(x - y) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} \right) = \frac{(-1)^{k+1}(x - y)^2}{a^2b}.$$

Les dénominateurs sont strictement positifs et $a^2b > k^3$. Par conséquent :

$$|g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x)| \leq \frac{|x - y|^2}{k^3}.$$

Méthode 2 — Inégalité de Taylor-Lagrange

La fonction g_k est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle ouvert J , et le segment de bornes x et y est contenu dans J . Pour tout u de ce segment :

$$g_k''(u) = \frac{2(-1)^k}{(k+1+u)^3}, \quad |g_k''(u)| \leq \frac{2}{k^3},$$

car $k+1+u > k > 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1, développée en x , donne alors :

$$|g_k(y) - g_k(x) - (y-x)g_k'(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{2}{k^3} |y-x|^2 = \frac{|x-y|^2}{k^3}.$$

L'expression entre valeurs absolues est l'opposé de celle de la question, donc la même majoration s'applique. Le calcul algébrique fournit le reste exact ; Taylor-Lagrange donne une méthode réutilisable pour d'autres fonctions.

2. a. La série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3}$$

est une série de Riemann d'exposant $3 > 1$; elle converge.

Pour $x \in J$ fixé et $k \geq 1$:

$$|g_k'(x)| = \frac{1}{(k+1+x)^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

La série majorante converge, et le terme $g'_0(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ est bien défini. Ainsi

$$\sum_{k \geq 0} g'_k(x)$$

converge absolument pour tout $x \in J$. On note sa somme :

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g'_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1+x)^2}.$$

2. b. On établit directement la dérivabilité en contrôlant un reste, sans invoquer un théorème général de dérivation des séries.

Fixons $x \in J$, puis $y \in J$. Pour $k \geq 0$, notons $R_k(x, y) = g_k(x) - g_k(y) - (x - y)g'_k(x)$. Pour chaque $N \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^N g_k(x) - \sum_{k=0}^N g_k(y) - (x - y) \sum_{k=0}^N g'_k(x) = \sum_{k=0}^N R_k(x, y).$$

La question II.1 et l'inégalité triangulaire donnent :

$$\left| \sum_{k=0}^N g_k(x) - \sum_{k=0}^N g_k(y) - (x - y) \sum_{k=0}^N g'_k(x) \right| \leq |R_0(x, y)| + |x - y|^2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^3}.$$

Les trois sommes du membre de gauche convergent, par I.7.b et II.2.a. La somme de droite converge également. On peut donc passer à la limite dans cette inégalité de sommes finies :

$$|f(x) - f(y) - (x - y)S(x)| \leq |R_0(x, y)| + |x - y|^2 C, \quad C = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} < +\infty.$$

Le calcul algébrique de II.1 vaut aussi pour $k = 0$, puisque $x + 1 > 0$ et $y + 1 > 0$. Il donne :

$$|R_0(x, y)| = \frac{|x - y|^2}{(x + 1)^2(y + 1)}.$$

Si $0 < |y - x| < \frac{x + 1}{2}$, alors $y + 1 > \frac{x + 1}{2}$ et :

$$|f(x) - f(y) - (x - y)S(x)| \leq |x - y|^2 \left(\frac{2}{(x + 1)^3} + C \right).$$

Comme $x - y \neq 0$, on peut diviser par $|x - y|$. En changeant le signe du numérateur si nécessaire :

$$\left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} - S(x) \right| \leq |y - x| \left(\frac{2}{(x + 1)^3} + C \right) \xrightarrow{y \rightarrow x} 0.$$

Le taux d'accroissement possède donc la limite $S(x)$. La fonction f est dérivable en tout $x \in J$ et :

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k + 1 + x)^2}.$$

2. c. La formule précédente, avec $x = 0$, donne :

$$f'(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k + 1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12},$$

où l'on a simplement changé l'indice $n = k + 1$ puis utilisé le résultat des préliminaires.

3. Pour tracer la courbe, on rassemble les résultats démontrés. Le domaine est $] -1, +\infty[$. La fonction est dérivable, strictement positive et strictement décroissante. Elle vérifie :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

La droite d'équation $x = -1$ est donc une asymptote verticale, et la droite d'équation $y = 0$ une asymptote horizontale à droite. Les équivalents précisent que $f(x) \sim \frac{1}{x+1}$ au voisinage de -1 et $f(x) \sim \frac{1}{2x}$ à l'infini.

La courbe passe par $A = (0, \ln 2)$ et $B = (1, 1 - \ln 2)$, dont les ordonnées sont approximativement 0,69 et 0,31. La tangente en A a pour équation :

$$y = \ln 2 - \frac{\pi^2}{12}x.$$

On peut aussi justifier la convexité pour préciser l'allure. Pour $t \in]0, 1]$ fixé, la fonction $u \mapsto t^u$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde vaut $(\ln t)^2 t^u \geq 0$. Elle est donc convexe. Pour tous $x, y \in J$ et $\alpha \in [0, 1]$:

$$t^{\alpha x + (1-\alpha)y} \leq \alpha t^x + (1-\alpha)t^y.$$

On divise par $1+t > 0$, on intègre sur $[\varepsilon, 1]$, puis on fait tendre ε vers 0. Toutes les intégrales convergent d'après I.1, puisque J est un intervalle et $\alpha x + (1-\alpha)y \in J$. Il vient :

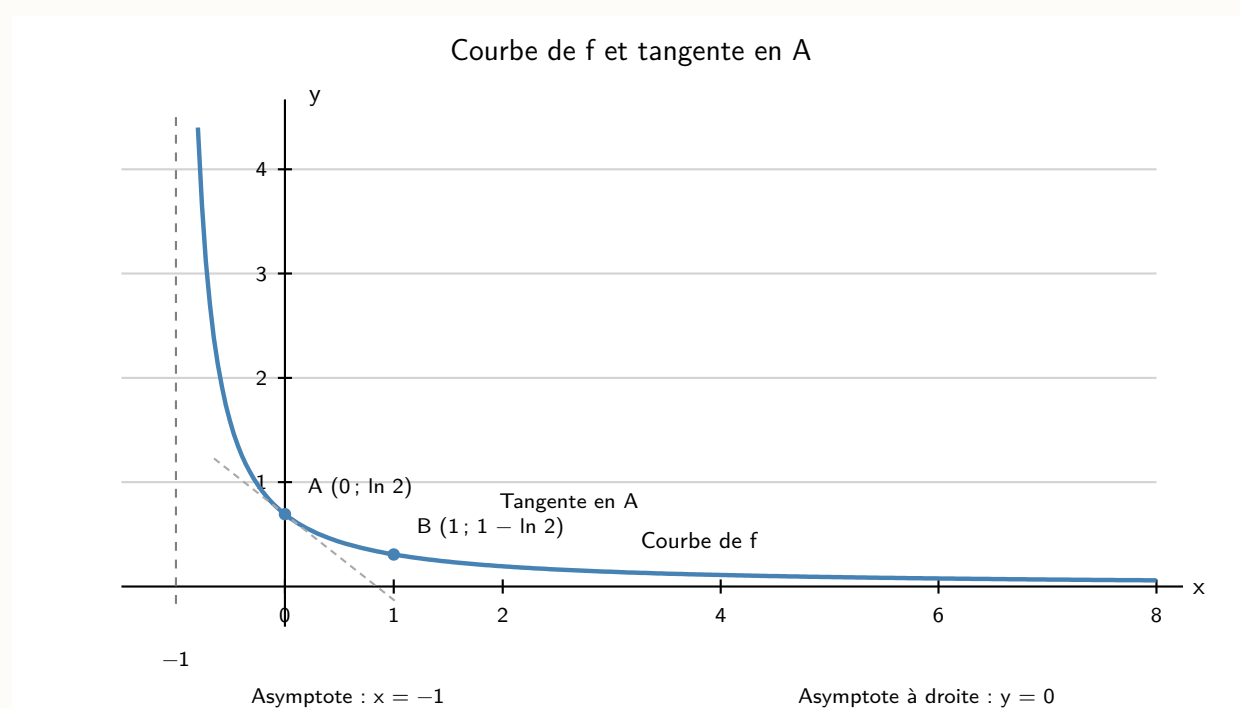
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Cela prouve que f est convexe sans dériver sous le signe intégral. L'inégalité est même stricte pour $x \neq y$ et $0 < \alpha < 1$, car, pour $0 < t < 1$, la dérivée seconde précédente est strictement positive ; l'écart est strictement positif sur un segment intérieur de $]0, 1[$.

Le tableau de variations est donc :

x	-1	0	1	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	$\searrow \ln 2$	$\searrow (1 - \ln 2)$	$\searrow 0$

La figure suivante représente la courbe, les asymptotes et la tangente en A . Les points de la courbe sont calculés à partir de l'intégrale définissant f ; leur tracé numérique illustre les résultats démontrés.



Relevé des adaptations

Problème 1, définitions et notations : suppression du cadre de matrices à coefficients non réels ; toutes les matrices sont définies sur $\mathbb{R}$. Les définitions utiles de convergence et les propriétés admises sont conservées.

Problème 1, partie I, 3.b.(i) : la demande de non-diagonalisation est reformulée sur $\mathbb{R}$. Le même exemple A_3 permet une preuve par les dimensions des espaces propres, conforme au référentiel.

Problème 1, partie I, 4.a et 4.b : la valeur propre et le vecteur propre sont supposés réels.

La majoration $|\lambda| \leq 1$ reste démontrée et suffit à toute la partie II, où la matrice diagonale est réelle.

Problème 1, partie III, préambule et questions 1–2 : les lignes de transition sont spécifiées pour toutes les urnes ; les probabilités conditionnelles sont écrites seulement lorsque l'événement conditionnant a une probabilité non nulle. Cette précision répare une définition qui, dans le texte original, pouvait conditionner par un événement de probabilité nulle. Elle conserve toutes les lois initiales possibles et les questions suivantes.