



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2009

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Partie I — Calcul d'une intégrale

On note (a, b) un couple de réels strictement positifs.

1. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ converge.

2. a. Établir, pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-bx}}{x} dx = \int_{b\varepsilon}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

À cet effet, on pourra utiliser des changements de variable.

b. En déduire, pour tout (ε, X) appartenant à $]0, +\infty[^2$ tel que $\varepsilon \leq X$:

$$\int_{\varepsilon}^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

3. a. Montrer que l'application $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-y}}{y} & \text{si } y \neq 0, \\ 1 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

est continue sur $[0, +\infty[$.

b. En déduire : $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln \frac{b}{a}$.

c. Établir, pour tout $X \in]0, +\infty[$:

$$\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

d. En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}.$

Partie II — Étude d'un produit scalaire

On note E l'ensemble des applications $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, bornées, de classe C^1 , telles que $f(0) = 0$.

- Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel des applications de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
- On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4 définies, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = \cos x, \quad f_3(x) = e^x - 1, \quad f_4(x) = 1 - e^{-x}.$$

Pour chacune de ces applications, indiquer, en le justifiant, si elle est ou non un élément de E .

3. a. Montrer, pour tout $f \in E$: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = f'(0).$

b. Montrer que, pour tout $(f, g) \in E^2$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$ converge.

On note $(\cdot | \cdot) : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx.$$

4. Établir que $(\cdot | \cdot)$ est un produit scalaire sur E .

5. Démontrer, pour tout $(f, g) \in E^2$:

$$(f | g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx.$$

À cet effet, on pourra commencer par effectuer une intégration par parties sur un segment.

6. On note, pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, $u_\alpha : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0, +\infty[$, par $u_\alpha(x) = 1 - e^{-\alpha x}$.

a. Vérifier : $\forall \alpha \in]0, +\infty[$, $u_\alpha \in E$.

b. Calculer, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, le produit scalaire $(u_\alpha | u_\beta)$.

À cet effet, on pourra utiliser les résultats de II.5 et I.3.d.

c. Établir, pour tout $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$: $(u_\alpha | u_\beta) > 0$.

Partie III — Étude de densités de variables aléatoires

On note c un réel strictement positif.

On considère l'application $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel x , par :

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{e^{-c^2x} - e^{-4c^2x}}{x \ln 4} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que v est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Soit X une variable aléatoire réelle, à valeurs positives ou nulles, admettant v comme densité.

2. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$ en fonction de c .
3. On note Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \sqrt{X}$.
 - a. Montrer que Y est une variable aléatoire réelle à densité et calculer une densité de Y .
 - b. Montrer que la variable aléatoire réelle Y admet une espérance et une variance, et déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de c .

PROBLÈME 2

Notations et définitions

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n et la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée 0_n .

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est nilpotente s'il existe un entier naturel non nul p tel que $M^p = 0_n$.

Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre réelle de M . On note $\text{SEP}(M, \lambda)$ le sous-espace propre de M associé à λ .

On dit qu'une matrice S de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive lorsqu'elle est symétrique et vérifie : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$.

Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A lorsqu'elle vérifie $R^2 = A$.

Le but de ce problème est d'étudier la notion de racine carrée d'une matrice dans quelques cas particuliers.

Partie I — Deux exemples

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Calculer $(R_\theta)^2$ et en déduire que la matrice I_2 admet une infinité de racines carrées.

2. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Partie II — Racines carrées d'une matrice de la forme $I_n + N$ avec N nilpotente

1. Donner le développement limité à l'ordre 3, au voisinage de 0, de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

On note $\sqrt{1+t} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + o(t^3)$, lorsque $t \rightarrow 0$, ce développement limité.

2. Montrer qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$1 + X = (a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3)^2 + X^4 Q(X).$$

3. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $N^4 = 0_n$. Déduire de la question précédente une racine carrée de $I_n + N$.

Partie III — Racines carrées d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres strictement positives et deux à deux distinctes

1. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f \circ g = g \circ f$. On suppose de plus que f admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes.

- a. Montrer que chaque sous-espace propre de f est stable par g .
- b. En déduire que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g .
- c. Justifier que f est diagonalisable.

Montrer que, pour toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de f , la matrice associée à g relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale. En déduire que g est diagonalisable.

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant n valeurs propres réelles strictement positives et deux à deux distinctes.

- a. Justifier l'existence d'une matrice inversible P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.
- b. Donner un exemple de racine carrée de A . On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D .
- c. Soit R une racine carrée de A . Vérifier que $AR = RA$.

En déduire que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

- d. Établir que A admet exactement 2^n racines carrées.

Partie IV — Racine carrée symétrique positive d'une matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique positive.

1. Montrer que toutes les valeurs propres de S sont positives ou nulles.
2. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.
3. Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive. On l'exprimera à l'aide de P et des éléments diagonaux de D .
4. On veut montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive.

Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.

- a. Soit λ une valeur propre de R . Montrer que λ^2 est valeur propre de S et que les sous-espaces propres associés vérifient : $\text{SEP}(R, \lambda) \subset \text{SEP}(S, \lambda^2)$.

On note p le nombre de valeurs propres deux à deux distinctes de R et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les p valeurs propres deux à deux distinctes de R .

- b. Justifier : $\bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(R, \lambda_i) \subset \bigoplus_{i=1}^p \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

- c. En déduire :

$$n = \sum_{i=1}^p \dim(\text{SEP}(R, \lambda_i)) \leq \sum_{i=1}^p \dim(\text{SEP}(S, \lambda_i^2)) \leq n.$$

- d. Montrer que $\lambda_1^2, \dots, \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que $\forall i \in \{1, \dots, p\}, \text{SEP}(R, \lambda_i) = \text{SEP}(S, \lambda_i^2)$.

- e. Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.
- f. En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.