



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2007

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Premier problème

On considère l'application $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie I

Étude de l'application f

1. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. On considère l'application $A : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$A(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x).$$

- 2.a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{A(x)}{x^2}.$$

- 2.b. Montrer que f' admet $-\frac{1}{2}$ comme limite en 0 à droite.

- 2.c. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et préciser $f'(0)$.

- 2.d. Dresser le tableau de variation de A . En déduire que f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

- 2.e. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. On considère l'application $B : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$B(x) = -\frac{3x^2 + 2x}{(1+x)^2} + 2\ln(1+x).$$

3.a. Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f''(x) = \frac{B(x)}{x^3}.$$

3.b. Dresser le tableau de variation de B . En déduire que f est convexe sur $]0, +\infty[$.

4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .

Partie II

Un développement en série

1. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k + \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t}.$$

2. En déduire, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + J_N(x),$$

où on a noté $J_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1} t^{N+1}}{1+t} dt.$

3. Établir, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$|J_N(x)| \leq \frac{x^{N+2}}{N+2}.$$

4. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

converge et que :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}.$$

Partie III

Égalité d'une intégrale et d'une somme de série

1. Montrer, en utilisant le résultat de II.3., pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k x^k}{k+1} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{N+2}.$$

2. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

converge et que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

3. Montrer, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2},$$

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{p=0}^N \frac{1}{(2p+1)^2} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{4p^2}.$$

4. On admet que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Montrer : $\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2}{12}.$

Partie IV

Recherche d'extremum pour une fonction réelle de deux variables réelles

On note $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $G :]0, +\infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad G(x, y) = F(xy) - F(x) - F(y).$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$. Exprimer, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$, les dérivées partielles premières et secondes de G en (x, y) en fonction de $x, y, f(x), f(y), f(xy), f'(x), f'(y)$ et $f'(xy)$.
2. Établir que G admet $(1, 1)$ comme unique point critique.
3. Est-ce que G admet un extremum local ?

Deuxième problème

On note n un nombre entier fixé supérieur ou égal à 2, E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de E .

Partie I

Étude d'un endomorphisme de E

1. Montrer que, pour tout polynôme P de E , le polynôme $((X^2 - 1)P)''$ est élément de E , où $((X^2 - 1)P)''$ désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2 - 1)P$.

On note $\phi : E \rightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe $\phi(P) = ((X^2 - 1)P)''$.

2. Vérifier : $\phi(1) = 2$, $\phi(X) = 6X$.
3. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
4. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et écrire la matrice A de ϕ dans la base $\mathcal{B}$.
 - 5.a. Montrer que ϕ admet $n + 1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$.
 - 5.b. Est-ce que ϕ est bijectif?
 - 5.c. Montrer que ϕ est diagonalisable et déterminer, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, la dimension du sous-espace propre de ϕ associé à λ_k .
6. Soient $k \in \{0, \dots, n\}$ et P un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre λ_k .
 - 6.a. Montrer que le degré du polynôme P est égal à k .
 - 6.b. Montrer que le polynôme Q défini par $Q(X) = P(-X)$ est un vecteur propre de ϕ associé à λ_k .

7. En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres de ϕ telle que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k , de coefficient dominant égal à 1 et vérifiant $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

Que peut-on en déduire sur la parité de P_k ?

8. Calculer P_0, P_1, P_2 et, si $n \geq 3$, P_3 .

Partie II

Un produit scalaire sur E

1. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P | Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)P(x)Q(x) dx$ est un produit scalaire sur E .

On munit dorénavant E de ce produit scalaire noté $(\cdot | \cdot)$.

2.a. À l'aide d'intégrations par parties, établir que ϕ est un endomorphisme symétrique de E .

2.b. Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E obtenue à la question I.7. est orthogonale.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$.

3.a. Montrer que pour tout polynôme S de degré inférieur ou égal à $j - 1$, on a : $(S | P_j) = 0$.

3.b. En considérant $(1 | P_j)$, montrer que P_j ne garde pas un signe constant sur l'intervalle $] - 1, 1[$.

3.c. En déduire que P_j admet au moins, dans l'intervalle $] - 1, 1[$, une racine d'ordre de multiplicité impair.

4. On note $\{x_1, \dots, x_m\}$ l'ensemble des racines d'ordre de multiplicité impair de P_j appartenant à l'intervalle $] - 1, 1[$ et $S_m = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_m)$.

4.a. Justifier : $m \leq j$.

4.b. Montrer que le polynôme $S_m P_j$ (produit des polynômes S_m et P_j) garde un signe constant sur l'intervalle $] -1, 1[$.

4.c. En considérant $(S_m \mid P_j)$, montrer que $m = j$.

4.d. En déduire que P_j admet j racines simples réelles toutes situées dans l'intervalle $] -1, 1[$.