



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2006

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME I

Préliminaires

1. a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right).$$

1. b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$ converge.

On admet dans tout le problème : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt.$$

3. a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

3. c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

I — Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F .

3. Déterminer les extremums locaux de F . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II — Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt$ et

$$\int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt \text{ convergent.}$$

On note $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt)e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3. a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \rightarrow 0, h \neq 0.$$

3. b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

4. a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x).$$

4. b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2e^{x^2/4}S(x) = \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

4. c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2/4} \int_0^x e^{t^2/4} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-x^2/4} \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

III — Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt.$$

2. a. Montrer, pour tout $u \in [0, +\infty[$:

$$0 \leq (1 - u + u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3.$$

2. b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV — Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt.$$

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

PROBLÈME II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère un n -uplet $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$ et le polynôme

$$P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0.$$

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Plus précisément, ses coefficients sont $C_{i+1,i} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$, $C_{i,n} = -a_{i-1}$ pour $1 \leq i \leq n$, et tous les autres coefficients sont nuls.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P .

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note id l'application identité de $\mathbb{R}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.

On note $f^0 = \text{id}$ et, pour tout entier naturel k , $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1. a. Exprimer, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1} .

1. b. En déduire :

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad f^j(e_1) = e_{j+1} \quad \text{et} \quad f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_n).$$

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_1f + a_0 \text{id}$.

2. a. Vérifier : $g(e_1) = 0$.

2. b. Montrer : $\forall j \in \mathbb{N}, g \circ f^j = f^j \circ g$.

2. c. En déduire : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, g(e_i) = 0$.

2. d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f .

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$.

2. e. Établir que toutes les valeurs propres réelles de C sont des racines réelles du polynôme P .

3. a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$ un polynôme réel non nul et de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$.

Calculer $Q(f)(e_1)$.

3. b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme réel non nul, de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et annulateur de f .

3. c. Soit λ une racine réelle du polynôme P .

Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \lambda)R$.

Vérifier que $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = 0$, où 0 est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$.

3. d. Conclure que toutes les racines réelles du polynôme P sont des valeurs propres réelles de C .

4. a. Montrer que, pour tout réel x , la matrice $C - xI_n$ est de rang supérieur ou égal à $n - 1$. En déduire que chaque sous-espace propre réel de C est de dimension 1.

4. b. En déduire que C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P admet n racines réelles deux à deux distinctes.

5. a. Application 2 : Étudier si la matrice

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

5. b. Application 3 : Montrer que la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

6. On note $B = {}^tC$ la matrice transposée de C .

6. a. Montrer que, pour tout réel t , la matrice $B - tI_n$ est inversible si et seulement si la matrice $C - tI_n$ est inversible.

6. b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres réelles.

6. c. Soit λ une valeur propre réelle de B . Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ .

6. d. On suppose que le polynôme P admet n racines réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et en déduire que la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est inversible.

7. Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres réelles $\mu_1, \dots, \mu_n$ deux à deux distinctes.

L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \dots, \mu_n$.

7. a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ est une base de E .

7. b. Montrer qu'il existe un polynôme réel $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1 .