



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EMLYON — 2006

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME I

Préliminaires

1. a. Il faut montrer que le quotient par $1/t^2$ tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. Pour $t > 0$, ce quotient vaut

$$\frac{t^n e^{-t^2}}{1/t^2} = t^{n+2} e^{-t^2}.$$

Posons $s = t^2$. Alors $s \rightarrow +\infty$ et $t^{n+2} e^{-t^2} = s^{(n+2)/2} e^{-s} \rightarrow 0$ par croissances comparées. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty}(1/t^2).$$

1. b. Pour $t \geq 0$, l'intégrande $t^n e^{-t^2}$ est positif ou nul. D'après 1. a, il existe $A \geq 1$ tel que $0 \leq t^n e^{-t^2} \leq t^{-2}$ pour $t \geq A$. L'intégrale de t^{-2} sur $[A, +\infty[$ converge ; le critère de comparaison assure donc la convergence de la queue positive.

Sur $[0, A]$, l'intégrande est continue, donc intégrable. Ainsi $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ converge.

Pour la queue négative, le changement de variable affine $s = -t$, effectué d'abord sur un segment, donne

$$\int_{-T}^0 |t|^n e^{-t^2} dt = \int_0^T s^n e^{-s^2} ds.$$

Le membre de droite possède une limite finie quand $T \rightarrow +\infty$. Les deux queues de

$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n e^{-t^2}| dt$ sont donc convergentes. L'intégrale demandée converge absolument, pour tout entier $n \geq 0$.

2. Écrivons

$$P(X) = \sum_{k=0}^m b_k X^k,$$

avec des coefficients réels et une somme finie. Pour tout réel t ,

$$|P(t)e^{-t^2}| \leq \sum_{k=0}^m |b_k| |t|^k e^{-t^2}.$$

Chaque terme du membre de droite a une intégrale convergente sur $\mathbb{R}$ par 1. b. Par comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt$ converge absolument. La linéarité pour cette somme finie donne également

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)e^{-t^2} dt = \sum_{k=0}^m b_k I_k.$$

Dans la suite, nous utilisons la valeur $I_0 = \sqrt{\pi}$ admise dans l'énoncé.

3. a. La méthode imposée est une intégration par parties. Sur un segment $[-A, B]$, avec $A, B > 0$, utilisons $(e^{-t^2})' = -2te^{-t^2}$:

$$\int_{-A}^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_{-A}^B t^{n+1} (e^{-t^2})' dt.$$

Les deux fonctions sont de classe C^1 ; l'intégration par parties donne

$$\int_{-A}^B t^{n+2} e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} [t^{n+1} e^{-t^2}]_{-A}^B + \frac{n+1}{2} \int_{-A}^B t^n e^{-t^2} dt.$$

Les termes de bord tendent vers 0 séparément lorsque $A, B \rightarrow +\infty$, par croissances comparées appliquées à $|t|^{n+1} e^{-t^2}$. Les deux intégrales convergent absolument par 1. b. Le passage à la limite donne

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. b. Méthode 1 — Parité

La fonction $t \mapsto t^{2p+1}e^{-t^2}$ est impaire et absolument intégrable. Le changement de variable $s = -t$ sur la queue négative donne

$$\int_{-\infty}^0 t^{2p+1}e^{-t^2} dt = - \int_0^{+\infty} s^{2p+1}e^{-s^2} ds.$$

Les deux intégrales s'annulent par addition : $I_{2p+1} = 0$.

Méthode 2 — Valeur initiale et récurrence

Une primitive de te^{-t^2} est $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$; ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont nulles. Donc $I_1 = 0$.

La question 3. a, appliquée à $n = 2p + 1$, donne $I_{2p+3} = (p+1)I_{2p+1}$. Une récurrence à partir de $I_1 = 0$ entraîne $I_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 0$.

La parité explique l'annulation par symétrie ; la récurrence permet de la propager à partir d'un moment initial.

3. c. Pour $p \geq 1$, la relation de 3. a donne

$$I_{2p} = \frac{2p-1}{2} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3) \cdots 1}{2^p} I_0.$$

Or les facteurs pairs de $(2p)!$ ont pour produit $2 \cdot 4 \cdots 2p = 2^p p!$. Ainsi

$$(2p-1)(2p-3) \cdots 1 = \frac{(2p)!}{2^p p!}.$$

Avec $I_0 = \sqrt{\pi}$, nous obtenons

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}.$$

Pour $p = 0$, la formule donne bien $I_0 = \sqrt{\pi}$, puisque $0! = 1$. En particulier,

$$I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad I_6 = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

I — Recherche d'extremums locaux pour une fonction de deux variables réelles

1. Pour (x, y) fixé, $(t - x)^2(t - y)^2$ est un polynôme en t , donc l'intégrale définissant $F(x, y)$ converge absolument d'après les préliminaires.

Développons ce polynôme :

$$(t - x)^2(t - y)^2 = t^4 - 2(x + y)t^3 + (x^2 + 4xy + y^2)t^2 - 2xy(x + y)t + x^2y^2.$$

Par linéarité d'une somme finie d'intégrales convergentes,

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(I_4 - 2(x + y)I_3 + (x^2 + 4xy + y^2)I_2 - 2xy(x + y)I_1 + x^2y^2I_0).$$

Les moments impairs sont nuls et les moments pairs utiles ont été calculés. Il vient

$$F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2.$$

2. L'expression obtenue est polynomiale ; F est donc de classe C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x + 2y + 2xy^2, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = y + 2x + 2x^2y.$$

Un point critique est une solution du système où ces deux expressions sont nulles. En multipliant la première équation par x , la seconde par y , puis en soustrayant, les termes mixtes se simplifient et donnent $x^2 - y^2 = 0$. Donc $y = x$ ou $y = -x$.

Si $y = x$, la première équation devient $3x + 2x^3 = x(3 + 2x^2) = 0$. Comme $3 + 2x^2 > 0$, $x = 0$, puis $y = 0$.

Si $y = -x$, la première équation devient $-x + 2x^3 = x(2x^2 - 1) = 0$. On obtient $x = 0$ ou $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Chacun des couples correspondants vérifie aussi la seconde équation.

Les trois points critiques sont donc

$$O = (0, 0), \quad A = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad B = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

3. Méthode 1 — Hessienne et signes de ses valeurs propres

La fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$; tout extremum local doit être un des points critiques trouvés en 2.

La hessienne est

$$H_F(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + 2y^2 & 2 + 4xy \\ 2 + 4xy & 1 + 2x^2 \end{pmatrix}.$$

En O , $H_F(O) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$, qui sont libres, sont propres

respectivement pour les valeurs 3 et -1 :

$$H_F(O) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad H_F(O) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La hessienne possède des valeurs propres de signes opposés. Ainsi O est un point selle et n'est pas un extremum local. Sa valeur est $F(O) = 3/4$.

En A et en B , $x^2 = y^2 = 1/2$ et $xy = -1/2$, donc

$$H_F(A) = H_F(B) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les deux valeurs propres sont strictement positives, égales à 2. Ainsi A et B sont des minima locaux stricts. Leur valeur est

$$F(A) = F(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Il n'y a pas de maximum local : aucun des trois points critiques n'en est un.

Méthode 2 — Décomposition en carrés et restrictions

Une identité algébrique donne

$$F(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \left(xy + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Les deux carrés sont positifs ou nuls ; $F(x, y) \geq 1/2$ pour tout (x, y) . L'égalité exige simultanément $x + y = 0$ et $xy = -1/2$. Avec $y = -x$, cela donne $x^2 = 1/2$, donc uniquement les points A et B . Ils sont par conséquent des minima globaux et des minima locaux stricts, car chacun est isolé de l'autre point d'égalité.

Pour exclure un extremum en O , comparons les valeurs sur deux droites :

$$F(s, s) - F(0, 0) = 3s^2 + s^4 > 0 \quad \text{pour } s \neq 0,$$

$$F(s, -s) - F(0, 0) = -s^2 + s^4 < 0 \quad \text{pour } 0 < |s| < 1.$$

Des valeurs plus grandes et plus petites apparaissent arbitrairement près de O , qui n'est donc pas un extremum. Comme tout extremum local doit être critique, la liste est complète.

La hessienne fournit la classification locale systématique ; la décomposition en carrés révèle en plus que les deux minima sont globaux.

II — Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$,

$$|\sin(xt)e^{-t^2}| \leq e^{-t^2}, \quad |t \cos(xt)e^{-t^2}| \leq te^{-t^2}.$$

Les deux majorants sont intégrables sur $\mathbb{R}_+$ d'après les préliminaires. Les intégrandes sont continues en t . Les deux intégrales convergent donc absolument, ce qui définit $S(x)$ et $C(x)$ pour tout réel x .

2. La fonction sinus est de classe C^2 et sa dérivée seconde vaut $-\sin$, de valeur absolue au plus 1 sur tout segment.

L'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et $a + \lambda$ donne donc

$$|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{|\lambda|^2}{2} \times 1 = \frac{\lambda^2}{2}.$$

Ce raisonnement vaut pour tout réel λ , positif, négatif ou nul.

3. a. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Par linéarité des intégrales absolument convergentes,

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt)}{h} - t \cos(xt) \right) e^{-t^2} dt.$$

La question 2, appliquée avec $a = xt$ et $\lambda = ht$, donne

$$\left| \frac{\sin((x+h)t) - \sin(xt)}{h} - t \cos(xt) \right| \leq \frac{|h|t^2}{2}.$$

Le majorant $t^2 e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. La positivité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire permettent donc d'écrire

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

La fonction $t^2 e^{-t^2}$ est paire ; l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ vaut $I_2/2 = \sqrt{\pi}/4$. Ainsi

$$\left| \frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{8} |h| \rightarrow 0.$$

La convergence demandée est établie par une estimation explicite du reste.

3. b. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, la question 3. a montre que le taux d'accroissement de S tend vers le réel $C(x)$. Par définition de la dérivée, S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $S'(x) = C(x)$.

Cette démonstration justifie la dérivation à partir du taux d'accroissement ; elle n'invoque aucun échange automatique entre dérivée et intégrale.

4. a. Sur le segment $[0, T]$, avec $T > 0$, utilisons $te^{-t^2} = -\frac{1}{2}(e^{-t^2})'$. Une intégration par parties donne

$$\int_0^T t \cos(xt) e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} [\cos(xt) e^{-t^2}]_0^T - \frac{x}{2} \int_0^T \sin(xt) e^{-t^2} dt.$$

Le signe du dernier terme vient de $(\cos(xt))' = -x \sin(xt)$. Le terme au bord inférieur vaut $1/2$; le terme au bord supérieur a pour valeur $-\frac{1}{2} \cos(xT) e^{-T^2}$ et tend vers 0, puisque son module est au plus $e^{-T^2}/2$.

Les deux intégrales convergent absolument par 1. Le passage à la limite donne, pour tout réel x ,

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2} S(x).$$

4. b. D'après 3. b et 4. a, S est dérivable et satisfait

$$S'(x) + \frac{x}{2} S(x) = \frac{1}{2}.$$

Définissons $H(x) = 2e^{x^2/4} S(x)$. Par dérivation d'un produit,

$$H'(x) = 2e^{x^2/4} \left(S'(x) + \frac{x}{2} S(x) \right) = e^{x^2/4}.$$

Cette dérivée est continue, donc le théorème fondamental du calcul intégral donne

$H(x) - H(0) = \int_0^x e^{t^2/4} dt$. Or $S(0) = 0$, puisque l'intégrande définissant $S(0)$ est identiquement nulle, donc $H(0) = 0$.

Par conséquent,

$$2e^{x^2/4}S(x) = \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

L'identité est valable aussi pour $x < 0$, l'intégrale sur le segment étant alors orientée de 0 vers x .

4. c. L'exponentielle est strictement positive : on peut diviser l'identité de 4. b par $2e^{x^2/4}$.
Il vient

$$S(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2/4} \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

En remplaçant $S(x)$ dans $C(x) = 1/2 - xS(x)/2$, nous obtenons

$$C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4}e^{-x^2/4} \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

Ces deux formules sont valables pour tout $x \in \mathbb{R}$; en particulier, elles donnent $S(0) = 0$ et $C(0) = 1/2$.

III — Obtention d'un développement limité

1. Pour tous réels x, t , $1 + x^2t^2 \geq 1$, donc

$$0 \leq \frac{e^{-t^2}}{1 + x^2t^2} \leq e^{-t^2}.$$

L'intégrande est continue sur $\mathbb{R}$ et le majorant est intégrable sur les deux queues.

L'intégrale définissant $g(x)$ converge donc pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme l'intégrande est positive, cette convergence est aussi absolue.

2. a. Pour $u \geq 0$, le dénominateur $1 + u$ est strictement positif. La réduction au même dénominateur donne l'identité exacte

$$(1 - u + u^2) - \frac{1}{1 + u} = \frac{(1 - u + u^2)(1 + u) - 1}{1 + u} = \frac{u^3}{1 + u}.$$

Puisque $u^3 \geq 0$ et $1 + u \geq 1$, on obtient $0 \leq u^3/(1 + u) \leq u^3$, ce qui prouve l'encadrement demandé.

2. b. Appliquons 2. a à $u = x^2 t^2 \geq 0$, puis multiplions par $e^{-t^2} > 0$:

$$0 \leq \left(1 - x^2 t^2 + x^4 t^4 - \frac{1}{1 + x^2 t^2}\right) e^{-t^2} \leq x^6 t^6 e^{-t^2}.$$

Toutes les intégrales en jeu convergent : le terme rationnel par 1 et les termes polynomiaux par les préliminaires. Nous pouvons donc intégrer l'inégalité sur chaque queue, puis additionner :

$$0 \leq I_0 - x^2 I_2 + x^4 I_4 - g(x) \leq x^6 I_6.$$

Comme $I_6 = 15\sqrt{\pi}/8$, il vient

$$0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2 t^2 + x^4 t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6.$$

3. Définissons le reste

$$r(x) = g(x) - \sqrt{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{4}\right).$$

En remplaçant I_0, I_2, I_4 par leurs valeurs dans 2. b, on obtient

$$-\frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6 \leq r(x) \leq 0.$$

Pour $x \neq 0$, cela entraîne

$$\left| \frac{r(x)}{x^5} \right| \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} |x| \rightarrow 0.$$

Ainsi $r(x) = o(x^5)$ au voisinage de 0, et le développement limité à l'ordre 5 est

$$g(x) = \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x^2 + \frac{3\sqrt{\pi}}{4} x^4 + o(x^5).$$

Les coefficients de degrés 1, 3, 5 sont nuls. Le développement a été obtenu grâce à un reste intégrable uniformément majoré ; aucune intégration non justifiée d'un développement ponctuel de l'intégrande n'est utilisée.

IV — Nature d'une série

1. Fixons $p \in \mathbb{N}$. Le nombre $(2p)!$ est strictement positif. Pour tout réel t ,

$$0 \leq \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} \leq \frac{t^{2p}}{(2p)!} e^{-t^2}.$$

Le majorant est intégrable d'après les préliminaires ; l'intégrande est continue puisque son dénominateur ne s'annule pas. L'intégrale définissant u_p converge donc, y compris pour $p = 0$, où $(2p)! = 1$ et $t^{2p} = 1$.

2. En intégrant l'encadrement de 1, on obtient

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{(2p)!} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} e^{-t^2} dt = \frac{I_{2p}}{(2p)!}.$$

La formule des moments pairs donne

$$0 \leq u_p \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4^p p!} \leq \frac{\sqrt{\pi}}{4^p}.$$

La série géométrique

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 4^{-p}$$

converge, car sa raison vaut $1/4 \in [0, 1[$. Par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p$$

converge.

On peut aussi obtenir une majoration plus précise de sa somme en reconnaissant la série exponentielle du programme :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} u_p \leq \sqrt{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(1/4)^p}{p!} = \sqrt{\pi} e^{1/4}.$$

PROBLÈME II

Question adaptée au programme actuel — Le préambule est reformulé dans $\mathbb{R}^n$ avec des coefficients réels. Toutes les racines, valeurs propres et diagonalisation étudiées dans ce problème sont réelles. La notation I_n désigne désormais la matrice identité d'ordre n .

1. a. Dans la base canonique, la colonne i de C représente $f(e_i)$. Pour $1 \leq i \leq n-1$, cette colonne possède un seul coefficient non nul, égal à 1, à la ligne $i+1$. Donc

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad f(e_i) = e_{i+1}.$$

1. b. Montrons par récurrence que $f^j(e_1) = e_{j+1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Pour $j=0$, $f^0(e_1) = e_1$. Si la propriété est établie à l'ordre $j < n-1$, la question 1. a donne

$$f^{j+1}(e_1) = f(e_{j+1}) = e_{j+2}.$$

La récurrence est donc établie. En particulier, $f^{n-1}(e_1) = e_n$, puis

$$f^n(e_1) = f(e_n) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_n),$$

par lecture de la dernière colonne de C .

2. a. D'après 1. b, $f^k(e_1) = e_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Ainsi

$$g(e_1) = f^n(e_1) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(e_1) = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k e_{k+1} = 0.$$

2. b. Pour tous entiers $j, k \geq 0$, l'associativité de la composition et la définition des puissances donnent $f^k \circ f^j = f^{k+j} = f^j \circ f^k$.

Comme g est une combinaison linéaire finie de puissances de f , pour tout $j \geq 0$,

$$g \circ f^j = f^{n+j} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+j} = f^j \circ g.$$

Ainsi g commute avec chaque puissance de f .

2. c. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la question 1. b, avec le cas $j = 0$, donne $e_i = f^{i-1}(e_1)$. Par commutation,

$$g(e_i) = g(f^{i-1}(e_1)) = f^{i-1}(g(e_1)) = f^{i-1}(0) = 0.$$

Le cas $i = 1$ est inclus grâce à $f^0 = \text{id}$.

2. d. L'endomorphisme linéaire g s'annule sur tous les vecteurs de la base canonique. Pour

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i,$$

sa linéarité donne

$$g(v) = \sum_{i=1}^n v_i g(e_i) = 0.$$

Ainsi $g = 0$.

Or $g = P(f)$ par définition ; donc $P(f) = 0$ et P est un polynôme annulateur de f . La traduction matricielle dans la base canonique donne aussi $P(C) = 0$. Cette identité a été démontrée directement pour la matrice compagnon étudiée.

Application 1

Question adaptée au programme actuel — On cherche une matrice réelle, ce qui permet de conserver exactement l'identité matricielle demandée.

L'identité souhaitée s'écrit $A^5 - A^3 - 2A^2 - I_5 = 0$. Prenons la matrice compagnon du polynôme réel

$$P_* = X^5 - X^3 - 2X^2 - 1.$$

Ses coefficients sont $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$, $a_4 = 0$. Sa matrice compagnon

est donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le résultat que nous venons d'établir donne $P_*(A) = 0$, donc $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$. Cette matrice réelle est un exemple répondant à la demande.

2. e. Question adaptée au programme actuel — On considère les valeurs propres réelles et les racines réelles.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de C et soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Pour chaque entier $k \geq 0$, $C^k v = \lambda^k v$, par récurrence. Donc

$$P(C)v = P(\lambda)v.$$

Or $P(C) = 0$ d'après 2. d. Il vient $P(\lambda)v = 0$. Puisque $v \neq 0$, $P(\lambda) = 0$: toute valeur propre réelle de C est une racine réelle de P .

3. a. Question adaptée au programme actuel — Les coefficients du polynôme Q sont réels.

En utilisant $f^k(e_1) = e_{k+1}$ pour $0 \leq k \leq n-1$, on obtient

$$Q(f)(e_1) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(e_1) = \alpha_0 e_1 + \alpha_1 e_2 + \cdots + \alpha_{n-1} e_n.$$

Le polynôme Q est non nul : au moins un coefficient α_k est non nul. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, cette combinaison est non nulle. Ainsi $Q(f)(e_1) \neq 0$.

3. b. Question adaptée au programme actuel — La recherche porte sur les polynômes réels.

Si un polynôme réel non nul Q de degré au plus $n - 1$ était annulateur de f , nous aurions $Q(f) = 0$, donc $Q(f)(e_1) = 0$. Cela contredit 3. a.

Il n'existe donc aucun polynôme réel non nul de degré au plus $n - 1$ annulateur de f .

3. c. Question adaptée au programme actuel — La racine λ est réelle et la factorisation est effectuée dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme $P(\lambda) = 0$, la factorisation par une racine donne un unique polynôme réel R tel que $P = (X - \lambda)R$. Il est unitaire de degré $n - 1$, donc non nul.

Pour vérifier l'identité d'endomorphismes, écrivons

$$R(X) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k X^k.$$

Alors

$$(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = \sum_{k=0}^{n-1} r_k (f^{k+1} - \lambda f^k).$$

C'est précisément l'endomorphisme obtenu en évaluant $(X - \lambda)R = P$ en f . Par 2. d,

$$(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = P(f) = 0.$$

3. d. Question adaptée au programme actuel — On établit la réciproque pour les racines réelles.

Soit λ une racine réelle de P et R le polynôme de 3. c. Puisque R est non nul et de degré $n - 1$, la question 3. a assure que le vecteur

$$v = R(f)(e_1)$$

est non nul. La relation de 3. c donne $(f - \lambda \text{id})(v) = 0$, donc $f(v) = \lambda v$.

Ainsi v est un vecteur propre de f associé à λ ; dans la base canonique, λ est une valeur propre de C . Avec 2. e, nous avons démontré l'égalité entre l'ensemble des valeurs propres réelles de C et l'ensemble des racines réelles de P .

4. a. Question adaptée au programme actuel — Le paramètre x et les sous-espaces propres sont réels.

Pour $x \in \mathbb{R}$, montrons que les $n - 1$ premières colonnes de $C - xI_n$ sont libres. Ces colonnes correspondent aux vecteurs $e_{i+1} - xe_i$, pour $1 \leq i \leq n - 1$.

Supposons

$$\sum_{i=1}^{n-1} c_i(e_{i+1} - xe_i) = 0.$$

Le coefficient de e_n est c_{n-1} , donc $c_{n-1} = 0$. Le coefficient de e_{n-1} est alors $c_{n-2} - xc_{n-1} = c_{n-2}$, donc $c_{n-2} = 0$. En poursuivant de proche en proche vers les indices inférieurs, on obtient $c_{n-3} = 0, \dots, c_1 = 0$.

Les colonnes sont donc libres pour tout x , sans division par x , y compris lorsque $x = 0$. Par conséquent,

$$\text{rg}(C - xI_n) \geq n - 1.$$

Si λ est une valeur propre réelle, $\text{Ker}(C - \lambda I_n)$ contient un vecteur non nul. Le théorème du rang impose alors $\text{rg}(C - \lambda I_n) \leq n - 1$. Le rang vaut donc exactement $n - 1$ et

$$\dim \text{Ker}(C - \lambda I_n) = n - (n - 1) = 1.$$

Chaque sous-espace propre réel de C est de dimension 1.

4. b. Question adaptée au programme actuel — La diagonalisation est sur $\mathbb{R}$ et le critère demande n racines réelles distinctes.

Notons r le nombre de racines réelles distinctes de P . Comme P est non nul de degré n ,

$0 \leq r \leq n$. Par 2. e et 3. d, C possède exactement r valeurs propres réelles distinctes. Par 4. a, chaque sous-espace propre associé a dimension 1.

Les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Leur somme a donc dimension r . Une matrice réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ses sous-espaces propres réels engendrent $\mathbb{R}^n$, soit ici si et seulement si $r = n$.

Ainsi C est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si P possède n racines réelles deux à deux distinctes.

5. a. Question adaptée au programme actuel — La demande originale de diagonalisation est remplacée par l'étude de la diagonalisation sur $\mathbb{R}$ pour la même matrice. Sa conclusion change dans le cadre réel.

Méthode 1 — Critère établi pour une matrice compagnon

La matrice A_1 est la matrice compagnon de $P_1 = X^4 - 1$. Dans $\mathbb{R}[X]$,

$$P_1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1).$$

Pour tout réel x , $x^2 + 1 > 0$. Les seules racines réelles de P_1 sont donc -1 et 1 . Le polynôme ne possède pas quatre racines réelles distinctes ; par 4. b, A_1 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Plus précisément, chacun des deux sous-espaces propres est de dimension 1, donc leur somme a dimension $2 < 4$.

Méthode 2 — Conséquence d'une diagonalisation supposée

La lecture des colonnes donne

$$A_1 e_1 = e_2, \quad A_1 e_2 = e_3, \quad A_1 e_3 = e_4, \quad A_1 e_4 = e_1.$$

Ainsi $A_1^4 = I_4$. Pour une valeur propre réelle λ , l'action de cette identité sur un vecteur propre non nul donne $\lambda^4 = 1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Si A_1 était diagonalisable sur $\mathbb{R}$, elle agirait par 1 ou -1 sur chaque vecteur d'une base de vecteurs propres. Son carré agirait donc par 1 sur cette base, ce qui imposerait $A_1^2 = I_4$.

Or $A_1^2 e_1 = e_3 \neq e_1$. La contradiction prouve que A_1 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

La première méthode utilise le critère du problème ; la seconde exploite directement le cycle formé par les images de la base canonique.

5. b. Question adaptée au programme actuel — On étudie la diagonalisation sur $\mathbb{R}$; la conclusion demandée est conservée.

La dernière colonne de A_2 est ${}^t(4, -8, 3, 2)$; son polynôme compagnon est donc

$$P_2 = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4.$$

La factorisation réelle suivante se vérifie par développement :

$$(X - 1)^2(X^2 - 4) = (X^2 - 2X + 1)(X^2 - 4) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4.$$

Ainsi

$$P_2 = (X - 1)^2(X - 2)(X + 2).$$

Ses racines réelles distinctes sont 1, 2, -2 , au nombre de trois. La racine 1 est double, mais son sous-espace propre reste de dimension 1 par 4. a. La somme de tous les sous-espaces propres a donc dimension $3 < 4$.

Par le critère de 4. b, A_2 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

6. a. Question adaptée au programme actuel — Le paramètre t est réel et les matrices sont réelles.

La transposition donne $B - tI_n = {}^t(C - tI_n)$. Si $C - tI_n$ est inversible et si M est son inverse, alors

$$(C - tI_n)M = M(C - tI_n) = I_n.$$

En transposant les deux égalités, on obtient

$${}^tM(B - tI_n) = (B - tI_n){}^tM = I_n.$$

Donc $B - tI_n$ est inversible, d'inverse ${}^tM$. Réciproquement, la même démonstration s'applique en transposant $B - tI_n$, puisque sa transposée vaut $C - tI_n$.

Les deux matrices sont donc inversibles simultanément, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

6. b. Question adaptée au programme actuel — On compare les valeurs propres réelles.

Pour une matrice réelle M d'ordre n , un réel λ est valeur propre si et seulement si $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$. En dimension finie, un endomorphisme d'un espace dans lui-même est injectif si et seulement s'il est inversible. Ainsi λ est valeur propre de M si et seulement si $M - \lambda I_n$ n'est pas inversible.

Par 6. a, cette dernière propriété est simultanément vraie pour $M = B$ et $M = C$. Donc B et C ont les mêmes valeurs propres réelles, qui sont les racines réelles de P .

6. c. Question adaptée au programme actuel — La valeur propre λ et les vecteurs du sous-espace propre sont réels.

Écrivons $v = {}^t(v_1, \dots, v_n)$. Les $n - 1$ premières lignes de l'équation $Bv = \lambda v$ donnent

$$v_2 = \lambda v_1, \quad v_3 = \lambda v_2, \quad \dots, \quad v_n = \lambda v_{n-1}.$$

Par récurrence, $v_k = \lambda^{k-1}v_1$ pour $1 \leq k \leq n$. La dernière ligne de l'équation est

$$-a_0v_1 - a_1v_2 - \dots - a_{n-1}v_n = \lambda v_n.$$

En substituant les expressions obtenues, elle devient $P(\lambda)v_1 = 0$. Or λ est aussi valeur propre de C , donc racine de P par 6. b et 2. e. Cette dernière ligne est ainsi satisfaite pour tout $v_1 \in \mathbb{R}$.

On obtient

$$\text{Ker}(B - \lambda I_n) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \right).$$

Le vecteur proposé est non nul, car sa première coordonnée est 1 ; il constitue une base du sous-espace propre. Aucune division par λ n'a été effectuée, donc la formule vaut aussi lorsque $\lambda = 0$; dans ce cas, le vecteur est ${}^t(1, 0, \dots, 0)$.

6. d. Question adaptée au programme actuel — Les n racines $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et distinctes.

Méthode 1 — Base de vecteurs propres

Par 6. b, les λ_i sont n valeurs propres distinctes de B . Par 6. c, on peut leur associer les vecteurs propres non nuls

$$v_i = {}^t(1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-1}).$$

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont libres. La famille $(v_1, \dots, v_n)$ contient n éléments dans $\mathbb{R}^n$: c'est une base. Ainsi B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

La matrice V a précisément pour colonnes les vecteurs v_i . Ses colonnes formant une base, V est inversible. Elle réalise la diagonalisation

$$BV = V \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Méthode 2 — Polynôme possédant trop de racines

Pour montrer directement l'inversibilité de V , considérons un vecteur $c = {}^t(c_0, \dots, c_{n-1})$ dans le noyau de ${}^tV$. Pour chaque i , l'équation ${}^tVc = 0$ donne

$$c_0 + c_1\lambda_i + \dots + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} = 0.$$

Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

possède donc les n racines distinctes λ_i . Un polynôme non nul de degré au plus $n-1$ ne peut pas avoir autant de racines ; donc $Q = 0$ et tous les c_k sont nuls.

Ainsi ${}^tV$ est injective, donc inversible en dimension finie. Sa transposée V est également inversible, par la propriété démontrée en 6. a. Avec l'identité $BV = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, cela redonne la diagonalisation de B .

La première méthode exploite les valeurs propres ; la seconde démontre l'inversibilité par une propriété élémentaire des polynômes, sans calcul de déterminant.

7. a. Question adaptée au programme actuel — L'espace E , l'endomorphisme et ses n valeurs propres distinctes sont réels.

Pour chaque j , $u(\varepsilon_j) = \mu_j \varepsilon_j$. La linéarité et une récurrence donnent

$$u^k(a) = \sum_{j=1}^n \mu_j^k \varepsilon_j \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

Méthode 1 — Matrice des coordonnées

Les coordonnées de $(a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$ dans la base $\mathcal{E}$ constituent la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \mu_1 & \mu_1^2 & \cdots & \mu_1^{n-1} \\ 1 & \mu_2 & \mu_2^2 & \cdots & \mu_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \mu_n & \mu_n^2 & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est la transposée de la matrice V de 6. d, avec $\lambda_j = \mu_j$. Puisque les μ_j sont réels et distincts, V est inversible, donc T aussi.

Les colonnes de T sont donc libres : les vecteurs de $\mathcal{B}_a$ forment une famille libre de n éléments dans E , espace de dimension n . Ainsi $\mathcal{B}_a$ est une base.

Méthode 2 — Annulation d'une combinaison linéaire

Supposons

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k u^k(a) = 0.$$

En remplaçant chaque $u^k(a)$ par son expression dans la base $\mathcal{E}$, on obtient

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \mu_j^k \right) \varepsilon_j = 0.$$

La famille $\mathcal{E}$ étant libre, chaque coefficient est nul. Le polynôme

$$Q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$$

s'annule donc en chacun des n réels distincts μ_j . Comme son degré est au plus $n - 1$, il est nul. Ainsi tous les c_k sont nuls et $\mathcal{B}_a$ est libre, donc une base.

La méthode matricielle réutilise 6. d ; la seconde prouve directement l'indépendance en traduisant une relation entre vecteurs en une relation polynomiale.

7. b. Question adaptée au programme actuel — On construit un polynôme réel et une matrice compagnon réelle.

Méthode 1 — Coordonnées dans la base obtenue

Puisque $\mathcal{B}_a$ est une base, il existe des réels uniques $d_0, \dots, d_{n-1}$ tels que

$$u^n(a) = d_0 a + d_1 u(a) + \dots + d_{n-1} u^{n-1}(a).$$

Posons $b_k = -d_k$ pour $0 \leq k \leq n - 1$ et

$$P_1 = X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_1 X + b_0.$$

Pour les $n - 1$ premiers vecteurs de $\mathcal{B}_a$, u envoie chaque vecteur sur le suivant. Les $n - 1$ premières colonnes de sa matrice ont donc un 1 sur la sous-diagonale et des zéros ailleurs. L'image du dernier vecteur est $u^n(a)$, de coordonnées ${}^t(-b_0, \dots, -b_{n-1})$.

Ainsi la matrice de u dans $\mathcal{B}_a$ est exactement la matrice compagnon de P_1 . Cela établit l'existence demandée et l'unicité des coefficients dans cette base.

Méthode 2 — Construction explicite à partir des valeurs propres

Définissons

$$P_1(X) = \prod_{j=1}^n (X - \mu_j).$$

C'est un polynôme réel unitaire de degré n , donc de la forme requise. Pour chaque vecteur propre ε_j , l'action d'un polynôme d'endomorphisme donne

$$P_1(u)(\varepsilon_j) = P_1(\mu_j)\varepsilon_j = 0.$$

Comme les ε_j constituent une base, $P_1(u) = 0$. En appliquant cette identité à a , on obtient

$$u^n(a) = -b_0a - b_1u(a) - \dots - b_{n-1}u^{n-1}(a).$$

Avec les images successives $u(u^k(a)) = u^{k+1}(a)$ pour $0 \leq k \leq n-2$, cela fournit les mêmes colonnes de matrice compagnon que dans la première méthode.

La première approche utilise seulement les coordonnées de $u^n(a)$; la seconde donne le polynôme explicitement en fonction des valeurs propres.

Relevé des adaptations

- Problème II, préambule et questions 1 à 7 : les espaces, matrices et coefficients sont réels. Les demandes relatives aux racines et valeurs propres portent exclusivement sur les racines et valeurs propres réelles. Cette reformulation conserve les preuves élémentaires et les dépendances entre les questions.
- Problème II, question 2. d, application 1 : la matrice recherchée appartient à $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$; la même identité matricielle est conservée et une solution réelle explicite est construite.
- Problème II, questions 4. b et 6. d : l'hypothèse de racines distinctes est précisée en racines réelles distinctes, nécessaire pour une diagonalisation sur $\mathbb{R}$.

- Problème II, question 5. a : la demande de prouver la diagonalisation est remplacée par l'étude de la diagonalisation sur $\mathbb{R}$ pour la même matrice. Son polynôme compagnon $X^4 - 1$ n'a que deux racines réelles ; la matrice n'est donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.