



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2005

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Premier problème

PARTIE I : Étude de la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1. Calcul de T_2 et T_3 .

On applique la récurrence donnée :

$$T_2 = 2X(2X) - 1 = 4X^2 - 1,$$

$$T_3 = 2X(4X^2 - 1) - 2X = 8X^3 - 4X.$$

Ainsi, $T_2 = 4X^2 - 1$ et $T_3 = 8X^3 - 4X$.

2. a. Degré et coefficient dominant.

Montrons par récurrence à deux termes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n .

Les polynômes $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$ vérifient cette propriété. Soit $n \geq 2$; supposons-la vraie aux rangs $n - 1$ et $n - 2$.

Alors $2XT_{n-1}$ est de degré n , avec pour coefficient dominant $2 \times 2^{n-1} = 2^n$. Comme T_{n-2} est de degré $n - 2$, sa soustraction ne modifie pas le terme de degré n .

La récurrence donne donc $\deg T_n = n$, avec coefficient dominant 2^n .

2. b. Parité.

On établit par récurrence l'identité $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$.

Elle est vraie pour $T_0 = 1$ et $T_1 = 2X$. Si elle est vraie aux rangs $n - 1$ et $n - 2$, alors

$$T_n(-X) = -2X(-1)^{n-1}T_{n-1}(X) - (-1)^{n-2}T_{n-2}(X).$$

Comme $-(-1)^{n-1} = (-1)^n$ et $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, il vient

$$T_n(-X) = (-1)^n(2XT_{n-1}(X) - T_{n-2}(X)) = (-1)^nT_n(X).$$

Ainsi, T_n est pair pour n pair et impair pour n impair.

3. Valeur de $T_n(1)$.

Méthode 1 — Récurrence.

Posons $a_n = T_n(1)$. On a $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ et, pour $n \geq 2$, $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$.

La formule $a_n = n + 1$ est vraie aux rangs 0 et 1. Si elle est vraie aux deux rangs précédents, alors

$$a_n = 2n - (n - 1) = n + 1.$$

Par récurrence, $T_n(1) = n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 — Suite des différences.

La relation de récurrence se réécrit $a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$. Les différences successives sont donc toutes égales à $a_1 - a_0 = 1$.

En sommant ces différences, pour $n \geq 1$,

$$a_n = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = 1 + n.$$

Cette formule vaut aussi pour $n = 0$. La première méthode vérifie une expression proposée ; la seconde permet de la découvrir en reconnaissant une suite arithmétique.

4. a. Expression trigonométrique.

Fixons $\theta \in]0; \pi[$. Le nombre $\sin \theta$ est strictement positif, donc les quotients utilisés sont définis.

Les formules d'addition donnent

$$\sin((n+1)\theta) + \sin((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \sin(n\theta).$$

En effet, les termes contenant $\cos(n\theta) \sin \theta$ se compensent en additionnant les développements de $\sin(n\theta + \theta)$ et $\sin(n\theta - \theta)$.

Pour $n = 0$, le quotient demandé vaut $1 = T_0(\cos \theta)$. Pour $n = 1$, $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, donc il vaut $2 \cos \theta = T_1(\cos \theta)$.

Si la formule est vraie aux rangs $n-1$ et $n-2$, alors

$$T_n(\cos \theta) = \frac{2 \cos \theta \sin(n\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sin \theta} = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

La formule est ainsi établie pour tout entier naturel n .

4. b. Racines réelles.

Pour $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, posons $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$. Alors $0 < \theta_k < \pi$ et

$$T_n(\cos \theta_k) = \frac{\sin(k\pi)}{\sin \theta_k} = 0.$$

Le cosinus est strictement décroissant sur $[0; \pi]$: sa dérivée est $-\sin \theta < 0$ sur $]0; \pi[$. Les nombres $\cos \theta_k$ sont donc deux à deux distincts et appartiennent à $] -1; 1[$.

Un polynôme non nul de degré n possède au plus n racines distinctes. Les n nombres obtenus sont donc toutes les racines de T_n ; elles sont simples, puisque leurs multiplicités totalisent déjà au moins n .

Les racines sont $\cos \frac{k\pi}{n+1}$, pour $1 \leq k \leq n$.

4. c. Factorisation.

La question précédente fournit n racines distinctes d'un polynôme de degré n . La factorisation par ces racines donne une constante multiplicative égale au coefficient dominant, qui vaut 2^n .

Ainsi,

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

4. d. Produit de sinus.

Évaluons la factorisation en $X = 1$. La question 3 donne

$$n+1 = 2^n \prod_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1} \right).$$

Les formules d'addition et l'identité $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$ donnent $\cos(2u) = 1 - 2\sin^2 u$, donc $1 - \cos(2u) = 2\sin^2 u$.

Par conséquent,

$$n+1 = 2^{2n} \left(\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right)^2.$$

Chaque angle est dans $]0; \frac{\pi}{2}[$, donc chaque facteur est positif. En prenant la racine carrée positive,

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}.$$

5. a. Identité différentielle trigonométrique.

Pour alléger les calculs, fixons n et posons $P = T_n$. Sur $]0; \pi[$, la question 4. a donne $\sin \theta P(\cos \theta) = \sin((n+1)\theta)$. Toutes ces fonctions sont deux fois dérivables.

Une première dérivation donne

$$\cos \theta P(\cos \theta) - \sin^2 \theta P'(\cos \theta) = (n+1) \cos((n+1)\theta).$$

Une seconde dérivation donne

$$-\sin \theta P(\cos \theta) - 3 \sin \theta \cos \theta P'(\cos \theta) + \sin^3 \theta P''(\cos \theta) = -(n+1)^2 \sin((n+1)\theta).$$

On remplace $\sin((n+1)\theta)$ par $\sin \theta P(\cos \theta)$, puis on divise par $\sin \theta > 0$. Il vient

$$\sin^2 \theta P''(\cos \theta) - 3 \cos \theta P'(\cos \theta) + ((n+1)^2 - 1)P(\cos \theta) = 0.$$

Comme $(n+1)^2 - 1 = n^2 + 2n$, c'est l'identité demandée, y compris pour $n = 0$.

5. b. Identité polynomiale.

Le cosinus prend toutes les valeurs de $] -1; 1[$ lorsque θ parcourt $]0; \pi[$. En posant $x = \cos \theta$ et en utilisant $\sin^2 \theta = 1 - x^2$, on obtient

$$(1 - x^2)T_n''(x) - 3xT_n'(x) + (n^2 + 2n)T_n(x) = 0$$

pour tout $x \in]-1; 1[$.

Le polynôme $(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n)T_n$ possède donc une infinité de racines. Un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines ; ce polynôme est donc nul.

Ainsi, $(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' = (n^2 + 2n)T_n$.

PARTIE II : Étude de l'endomorphisme L

On fixe désormais $n \geq 2$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$, de dimension $n + 1$.

1. Caractère linéaire et stabilité de E .

La dérivation et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires. Pour $P, Q \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$,

$$L(aP + bQ) = a((X^2 - 1)P'' + 3XP') + b((X^2 - 1)Q'' + 3XQ') = aL(P) + bL(Q).$$

Si P est de degré $d \geq 2$, $(X^2 - 1)P''$ et $3XP'$ ont un degré au plus $d \leq n$. Si P est constant, $L(P) = 0$; s'il est de degré 1, seul $3XP'$ subsiste et son degré est au plus 1.

Le polynôme nul appartient aussi à E et a pour image 0. Ainsi, $L(E) \subset E$ et L est un endomorphisme de E .

2. a. Images des T_k .

L'identité de la partie I, question 5. b, appliquée à l'entier k , donne directement

$$L(T_k) = (k^2 + 2k)T_k = k(k + 2)T_k, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Chaque T_k est non nul, de sorte qu'il s'agit d'un vecteur propre de valeur propre $\lambda_k = k(k+2)$.

2. b. Valeurs propres et espaces propres.

Méthode 1 — Base des polynômes T_k .

Les polynômes $T_0, \dots, T_n$ ont des degrés distincts. Ils sont linéairement indépendants : dans une combinaison linéaire nulle, le terme de plus haut degré dont le coefficient est non nul ne peut être compensé par les autres polynômes.

Cette famille comporte $n+1 = \dim E$ éléments ; c'est donc une base de E . De plus,

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k = (k+1)(k+3) - k(k+2) = 2k+3 > 0.$$

Les λ_k sont deux à deux distincts. Pour

$$P = \sum_{k=0}^n a_k T_k,$$

l'équation $L(P) = \lambda P$ équivaut, par unicité des coordonnées, à

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad (\lambda_k - \lambda)a_k = 0.$$

Si $P \neq 0$, au moins un a_k est non nul, donc $\lambda = \lambda_k$. Si $\lambda = \lambda_j$, seul a_j peut être non nul.

Ainsi,

$$\text{Sp}(L) = \{k(k+2) : 0 \leq k \leq n\}, \quad \text{Ker}(L - k(k+2) \text{Id}_E) = \text{Vect}(T_k).$$

Chaque espace propre a pour base (T_k) et pour dimension 1.

Méthode 2 — Matrice triangulaire dans la base canonique.

Pour $k \geq 2$, le calcul sur les monômes donne

$$L(X^k) = k(k-1)(X^k - X^{k-2}) + 3kX^k = k(k+2)X^k - k(k-1)X^{k-2}.$$

Pour $k = 0$, $L(1) = 0$; pour $k = 1$, $L(X) = 3X$. Dans la base $(1, X, \dots, X^n)$, la matrice de L est donc triangulaire supérieure, avec diagonale $0, 3, 8, \dots, n(n+2)$.

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux, qui sont ici distincts. En dimension $n+1$, la présence de $n+1$ valeurs propres distinctes assure la diagonalisation. Leurs espaces propres, en somme directe, ont chacun une dimension au moins 1; la somme de ces dimensions ne peut dépasser $n+1$, donc chacun a dimension 1.

La question 2. a fournit dans chacun le vecteur non nul T_k ; ainsi, sa base est (T_k) . Cette méthode lit le spectre sans connaître d'abord une base de vecteurs propres; la première décrit directement ces vecteurs et leurs coordonnées.

PARTIE III : Étude d'un produit scalaire

1. Vérification des propriétés d'un produit scalaire.

Pour $P, Q \in E$, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}P(x)Q(x)$ est continue sur $[-1; 1]$. L'intégrale définissant $\varphi(P, Q)$ existe donc et est finie.

La linéarité de l'intégrale donne la bilinéarité de φ . Le produit $P(x)Q(x)$ étant symétrique en P, Q , on a $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$.

Enfin,

$$\varphi(P, P) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} P(x)^2 dx \geq 0.$$

Si $P \neq 0$, il ne peut s'annuler en tout point de $] -1; 1[$, car il aurait une infinité de racines. Il existe donc $x_0 \in] -1; 1[$ tel que $P(x_0) \neq 0$.

La fonction continue $x \mapsto \sqrt{1-x^2} P(x)^2$ est strictement positive en x_0 . Elle est donc minorée par une constante strictement positive sur un petit segment de longueur non nulle autour de x_0 . Son intégrale est alors strictement positive.

Ainsi, $\varphi(P, P) = 0$ si et seulement si $P = 0$. L'application φ est un produit scalaire sur E .

2. Symétrie de L pour ce produit scalaire.

Posons $a(x) = (1-x^2)^{3/2}$. Sur $] -1; 1[$,

$$a'(x) = -3x\sqrt{1-x^2}.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{1-x^2} L(P)(x) = -a(x)P''(x) - a'(x)P'(x) = -(aP')'(x).$$

Pour $0 < \varepsilon < 1$, effectuons l'intégration par parties sur $[-1+\varepsilon; 1-\varepsilon]$, où toutes les fonctions sont de classe C^1 :

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \sqrt{1-x^2} L(P)(x) Q(x) dx = -[a(x)P'(x)Q(x)]_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} a(x)P'(x)Q'(x) dx.$$

Les polynômes P', Q, Q' sont bornés sur $[-1; 1]$ et $a(x)$ tend vers 0 aux deux extrémités. Le terme de bord tend donc vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$.

Les deux intégrandes se prolongent continûment sur $[-1; 1]$; leurs intégrales sur les deux petits segments omis tendent vers 0, par majoration par leur borne multipliée par la longueur. On obtient donc

$$\varphi(L(P), Q) = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{3/2} P'(x) Q'(x) \, dx.$$

Le membre de droite est symétrique en P, Q . En appliquant la même formule au couple (Q, P) et en utilisant la symétrie de φ ,

$$\varphi(L(P), Q) = \varphi(L(Q), P) = \varphi(P, L(Q)).$$

Ainsi, L est symétrique pour le produit scalaire φ .

3. Base orthogonale.

La partie II a déjà montré que $(T_0, \dots, T_n)$ est une base. Pour $j \neq k$, utilisons la question précédente et la bilinéarité :

$$\lambda_j \varphi(T_j, T_k) = \varphi(L(T_j), T_k) = \varphi(T_j, L(T_k)) = \lambda_k \varphi(T_j, T_k).$$

Ainsi, $(\lambda_j - \lambda_k) \varphi(T_j, T_k) = 0$. Comme $\lambda_j \neq \lambda_k$, on en déduit $\varphi(T_j, T_k) = 0$.

La famille $(T_k)_{0 \leq k \leq n}$ est donc une base orthogonale de E .

Deuxième problème

PARTIE I : Calcul de la somme d'une série convergente

1. Calcul de l'intégrale.

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $p(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t$. On a $p'(t) = \frac{t}{\pi} - 1$ et $p''(t) = \frac{1}{\pi}$. Ces fonctions sont continues sur $[0; \pi]$, ce qui permet les intégrations par parties suivantes.

$$\int_0^\pi p(t) \cos(nt) dt = \left[\frac{p(t) \sin(nt)}{n} \right]_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi p'(t) \sin(nt) dt.$$

Le premier terme de bord est nul, puisque $\sin(n\pi) = \sin 0 = 0$. Pour la seconde intégrale,

$$\int_0^\pi p'(t) \sin(nt) dt = \left[-\frac{p'(t) \cos(nt)}{n} \right]_0^\pi + \frac{1}{n} \int_0^\pi p''(t) \cos(nt) dt.$$

Comme $p'(\pi) = 0$ et $p'(0) = -1$, le terme de bord vaut $-\frac{1}{n}$. La dernière intégrale vaut $\frac{1}{\pi n} [\sin(nt)]_0^\pi = 0$.

Ainsi,

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}.$$

2. Somme finie de cosinus.

Question adaptée au programme actuel : la première identité est reformulée avec des fonctions trigonométriques réelles. Le résultat final demandé est conservé.

Les formules d'addition donnent, pour tout réel a ,

$$\sin \left(a + \frac{t}{2} \right) - \sin \left(a - \frac{t}{2} \right) = 2 \cos(a) \sin \frac{t}{2}.$$

En prenant $a = nt$ et en sommant de $n = 1$ à $n = m$, les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{n=1}^m \cos(nt) = \sum_{n=1}^m \left(\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) - \sin \left(\left(n - \frac{1}{2} \right) t \right) \right) = \sin \left(\frac{(2m+1)t}{2} \right) - \sin \frac{t}{2}.$$

Pour obtenir l'autre expression, les formules d'addition donnent aussi

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right).$$

Cette identité s'obtient en écrivant $A = c + d$ et $B = c - d$, avec $c = \frac{A+B}{2}$ et $d = \frac{A-B}{2}$, puis en soustrayant les deux formules d'addition.

Avec $A = \frac{(2m+1)t}{2}$ et $B = \frac{t}{2}$, on obtient

$$\sin \left(\frac{(2m+1)t}{2} \right) - \sin \frac{t}{2} = 2 \cos \left(\frac{(m+1)t}{2} \right) \sin \left(\frac{mt}{2} \right).$$

Comme $t \in]0; \pi]$, $\sin(t/2) > 0$, donc on peut diviser :

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\cos \left(\frac{(m+1)t}{2} \right) \sin \left(\frac{mt}{2} \right)}{\sin \left(\frac{t}{2} \right)}.$$

3. Limite d'une intégrale oscillante.

Pour $\lambda > 0$, l'hypothèse $u \in C^1([0; \pi])$ autorise une intégration par parties :

$$\int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt = \left[-\frac{u(t) \cos(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^\pi + \frac{1}{\lambda} \int_0^\pi u'(t) \cos(\lambda t) dt.$$

Les fonctions u et u' sont continues sur le segment, donc bornées. En utilisant $|\cos(\lambda t)| \leq 1$, on obtient

$$\left| \int_0^\pi u(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{|u(0)| + |u(\pi)| + \int_0^\pi |u'(t)| dt}{\lambda}.$$

Le numérateur est une constante finie indépendante de λ . Le membre de droite tend vers 0 ; l'intégrale tend donc vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

4. Régularité de f .

Sur $]0; \pi]$, le dénominateur $2 \sin(t/2)$ est strictement positif ; la formule définit donc une fonction de classe C^1 . Il reste à étudier 0.

Les développements limités usuels du sinus et du cosinus, après le changement affine $v = t/2$, donnent

$$D(t) = 2 \sin(t/2) = t - \frac{t^3}{24} + o(t^3), \quad D'(t) = \cos(t/2) = 1 - \frac{t^2}{8} + o(t^2).$$

Pour $t > 0$, on peut simplifier un facteur t :

$$f(t) = \frac{-1 + \frac{t}{2\pi}}{1 - \frac{t^2}{24} + o(t^2)}.$$

Le dénominateur tend vers 1, donc $f(t) \rightarrow -1 = f(0)$. De plus, l'identité $\frac{1}{1+v} - 1 = -\frac{v}{1+v}$ montre ici que l'inverse du dénominateur vaut $1 + O(t^2)$. Ainsi,

$$f(t) = -1 + \frac{t}{2\pi} + O(t^2).$$

Le quotient $\frac{f(t) - f(0)}{t}$ tend donc vers $\frac{1}{2\pi}$: f est dérivable à droite en 0, avec $f'(0) = \frac{1}{2\pi}$.

Pour vérifier la continuité de la dérivée, posons $N(t) = -t + \frac{t^2}{2\pi}$, de sorte que $N'(t) = -1 + \frac{t}{\pi}$. Pour $t > 0$,

$$f'(t) = \frac{N'(t)D(t) - N(t)D'(t)}{D(t)^2}.$$

Les développements précédents donnent

$$N'(t)D(t) = -t + \frac{t^2}{\pi} + \frac{t^3}{24} + o(t^3),$$

$$N(t)D'(t) = -t + \frac{t^2}{2\pi} + \frac{t^3}{8} + o(t^3).$$

Par soustraction, le numérateur vaut $\frac{t^2}{2\pi} - \frac{t^3}{12} + o(t^3)$, tandis que $D(t)^2 \sim t^2$. Par conséquent, $f'(t) \rightarrow \frac{1}{2\pi} = f'(0)$.

La fonction f est donc de classe C^1 sur $[0; \pi]$, avec les dérivées unilatérales aux extrémités. Ici, $O(t^2)$ désigne un terme dont la valeur absolue est majorée par une constante fois t^2 pour t assez petit.

5. a. Identité pour les sommes partielles.

La question 1 et la linéarité de l'intégrale pour une somme finie donnent

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \int_0^\pi p(t) \sum_{n=1}^m \cos(nt) \, dt, \quad p(t) = \frac{t^2}{2\pi} - t.$$

La première identité de la question 2 s'écrit, pour $t > 0$,

$$\sum_{n=1}^m \cos(nt) = \frac{\sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

En multipliant par $p(t)$, on obtient

$$p(t) \sum_{n=1}^m \cos(nt) = f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) - \frac{p(t)}{2}.$$

Les deux membres se prolongent continûment en 0, où ils valent 0. On peut donc intégrer cette égalité sur tout le segment. Enfin,

$$-\frac{1}{2} \int_0^\pi p(t) \, dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{t^3}{6\pi} - \frac{t^2}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2m+1)t}{2}\right) \, dt.$$

Aucun échange entre une série infinie et une intégrale n'a été utilisé.

5. b. Convergence et somme de la série.

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$$

est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc elle converge.

Par la question 4, f est de classe C^1 sur $[0; \pi]$. On peut donc appliquer la question 3 avec $u = f$ et $\lambda_m = \frac{2m+1}{2}$, qui tend vers $+\infty$. L'intégrale de la question 5. a tend vers 0.

En passant à la limite dans l'identité des sommes partielles, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série convergente

1. a. Convergence des deux séries.

Fixons $x, y \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, les dénominateurs sont strictement positifs et $n+x \geq n$, $n+y \geq n$. Ainsi,

$$0 < \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq \frac{1}{n^2}, \quad 0 < \frac{1}{(n+x)^2(n+y)} \leq \frac{1}{n^3}.$$

Les séries de Riemann d'exposants 2 et 3 convergent. Le théorème de comparaison des séries à termes positifs assure donc la convergence des deux séries demandées, pour tout couple $(x, y) \in ([0; +\infty[)^2$.

1. b. Existence de $S(x)$.

Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}.$$

Par la question 1. a avec le couple $(0, x)$, la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+x)}$$

converge. Sa multiplication par la constante x conserve la convergence.

Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls. Ainsi, S est bien définie sur $[0; +\infty[$. Cette justification ne sépare pas la différence en deux séries harmoniques divergentes.

2. Valeurs de $S(0)$ et $S(1)$.

Tous les termes sont nuls pour $x = 0$, donc $S(0) = 0$.

Pour $x = 1$, la somme partielle est télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient $S(1) = 1$.

3. a. Différence $S(y) - S(x)$.

Pour $N \geq 1$, posons

$$S_N(z) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right),$$

pour $z \geq 0$.

Une soustraction de sommes finies donne

$$S_N(y) - S_N(x) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+y} \right) = (y-x) \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

Les deux suites $S_N(x)$, $S_N(y)$ et la série du membre de droite convergent, d'après la question 1. En passant à la limite,

$$S(y) - S(x) = (y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

La formule vaut aussi lorsque $x = y$: les deux membres sont alors nuls.

3. b. Majoration de la différence.

La série de la question 3. a a des termes positifs majorés par $1/n^2$. On obtient donc

$$|S(y) - S(x)| = |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} |y-x|.$$

Cette inégalité est valable pour tous $x, y \geq 0$.

3. c. Continuité de S .

Fixons $x \geq 0$. La question 3. b donne, pour tout $y \geq 0$,

$$|S(y) - S(x)| \leq \frac{\pi^2}{6} |y-x|.$$

Le membre de droite tend vers 0 lorsque $y \rightarrow x$ dans le domaine. Donc $S(y) \rightarrow S(x)$.

Plus précisément, pour $\varepsilon > 0$, le choix $\delta = 6\varepsilon/\pi^2$ assure que $|y-x| < \delta$ entraîne $|S(y) - S(x)| < \varepsilon$. Ainsi, S est continue sur $[0; +\infty[$, à droite en 0.

4. a. Approximation du taux d'accroissement.

Fixons $x, y \geq 0$, avec $x \neq y$. La question 3. a permet de diviser par $y - x$:

$$\frac{S(y) - S(x)}{y - x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}.$$

Pour chaque n ,

$$\frac{1}{(n+x)(n+y)} - \frac{1}{(n+x)^2} = \frac{x-y}{(n+x)^2(n+y)}.$$

Les deux séries du membre de gauche convergent par 1. a, appliquée notamment au couple (x, x) . La série du membre de droite converge aussi par 1. a. L'égalité des sommes s'obtient en passant à la limite dans celle des sommes partielles :

$$\frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} = (x-y) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2(n+y)}.$$

En prenant la valeur absolue et en majorant chaque terme positif par $1/n^3$,

$$\left| \frac{S(y) - S(x)}{y - x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \right| \leq |y-x| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

4. b. Dérivabilité et expression de S' .

Posons

$$C = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3,$$

constante finie. Pour $x \geq 0$ fixé, l'inégalité précédente majore l'écart entre le taux d'accroissement et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 1/(n+x)^2$$

par $C|y-x|$.

Cet écart tend vers 0 lorsque $y \rightarrow x$ avec $y \geq 0, y \neq x$. Par définition de la dérivée,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}.$$

Pour $x > 0$, il s'agit de la dérivée usuelle; pour $x = 0$, de la dérivée à droite. Cette convention est précisée dans le sujet adapté. La preuve repose sur une estimation du taux d'accroissement et ne suppose aucun théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

4. c. Valeurs de $S'(0)$ et de $S'(1)$.

La partie I donne immédiatement

$$S'(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

En décalant l'indice dans une série convergente,

$$S'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1.$$

5. Concavité de S .

L'énoncé admet que S est deux fois dérivable et que

$$S''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3}, \quad x \geq 0.$$

Cette série converge par comparaison avec

$$\sum 2/n^3.$$

Tous ses termes avant le signe moins sont strictement positifs, donc $S''(x) < 0$ pour tout $x \geq 0$.

La caractérisation de la concavité par le signe de la dérivée seconde assure que S est strictement concave sur $]0; +\infty[$. Par continuité en 0, l'inégalité de concavité s'étend à l'intervalle $[0; +\infty[$.

On peut aussi vérifier la stricte concavité incluant 0 par les pentes : S' est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, et l'égalité des accroissements finis s'applique sur tout segment $[a; b]$ avec $0 \leq a < b$, puisque S y est continue et dérivable à l'intérieur.

6. a. Intégrale de φ .

Fixons $x > 0$. La fonction $\varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$. Pour $A > 1$,

$$\int_1^A \varphi(t) dt = [\ln t - \ln(t+x)]_1^A = \ln\left(\frac{A}{A+x}\right) + \ln(1+x).$$

Comme $A/(A+x) \rightarrow 1$, le premier logarithme tend vers 0. L'intégrale impropre converge donc et

$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt = \ln(1+x).$$

6. b. Comparaison série-intégrale.

Pour $t \geq 1$,

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+x)^2} < 0$$

car $x > 0$. La fonction φ est donc décroissante. Pour $t \in [n; n+1]$,

$$\varphi(n+1) \leq \varphi(t) \leq \varphi(n).$$

En intégrant sur ce segment de longueur 1,

$$\varphi(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi(t) \, dt \leq \varphi(n).$$

En sommant de $n = 1$ à $n = N$ et en utilisant Chasles,

$$\sum_{n=1}^N \varphi(n+1) \leq \int_1^{N+1} \varphi(t) \, dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi(n).$$

La série de terme général $\varphi(n)$ converge et sa somme est $S(x)$. Par 6. a, l'intégrale converge également. En passant à la limite,

$$S(x) - \varphi(1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi(t) \, dt \leq S(x).$$

Or $\varphi(1) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} < 1$. On a donc l'encadrement, un peu plus précis que celui demandé,

$$\ln(1+x) \leq S(x) \leq \ln(1+x) + \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) + 1.$$

Il implique bien
$$\int_1^{+\infty} \varphi(t) dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \varphi(t) dt.$$

6. c. Équivalent à l'infini.

Pour $x > 1$, $\ln x > 0$, donc l'encadrement précédent peut être divisé par $\ln x$:

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \leq \frac{S(x)}{\ln x} \leq \frac{\ln(1+x)}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}.$$

L'identité $\ln(1+x) = \ln x + \ln(1+1/x)$ donne

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln x} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} \rightarrow 1.$$

En effet, le numérateur du dernier quotient tend vers 0 et son dénominateur vers $+\infty$.

On a aussi $1/\ln x \rightarrow 0$.

Le théorème d'encadrement donne $S(x)/\ln x \rightarrow 1$, c'est-à-dire

$$S(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln x.$$

7. a. Variations et limite.

La formule de la question 4. b est une somme de termes strictement positifs : $S'(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$. La fonction S est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $S(0) = 0$, $S(1) = 1$ et $S(x) \sim \ln x$ avec $\ln x \rightarrow +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de $S'(x)$	+	+	+
Variation de S	0	$\nearrow 1$	$\nearrow +\infty$

7. b. Allure de la courbe.

La courbe commence à l'origine, passe par $(1, 1)$, est strictement croissante et strictement concave. Sa tangente à droite en 0 a pour équation $y = \frac{\pi^2}{6}x$; sa tangente en 1 a pour équation $y = 1 + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)(x - 1)$.

La concavité place la courbe sous chacune de ces tangentes. À l'infini, elle est non bornée et vérifie $S(x) \sim \ln x$. Un équivalent ne signifie pas que $y = \ln x$ soit une asymptote : les questions précédentes ne donnent pas une différence tendant vers 0.

La pente tend vers 0. En effet, pour $x > 0$, la décroissance de $t \mapsto 1/(t+x)^2$ et une comparaison sur les segments $[n-1; n]$ donnent

$$0 < S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \frac{1}{x}.$$

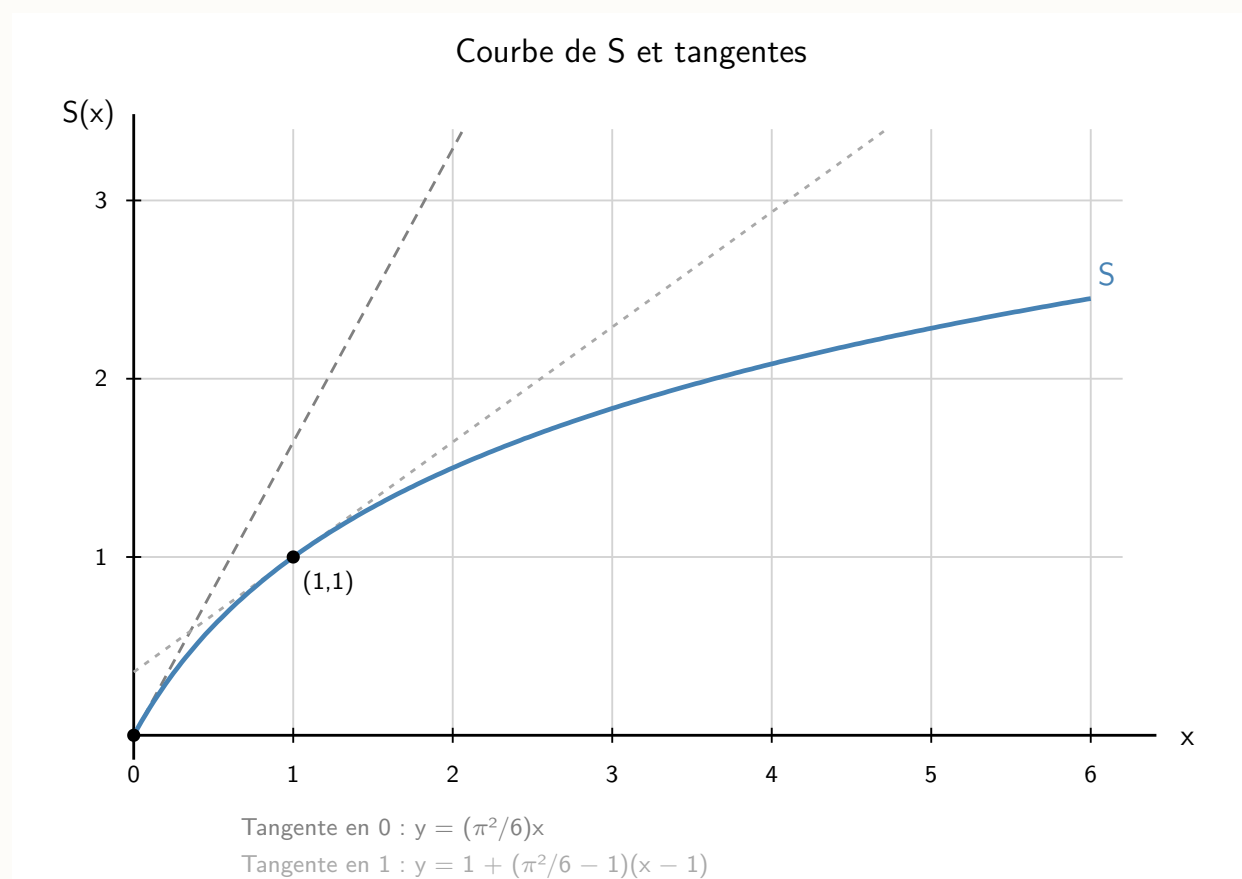
La figure suivante représente la courbe sur $[0; 6]$ et les deux tangentes. Pour la courbe, on utilise

$$S_{100000}(x) = \sum_{n=1}^{100000} x/[n(n+x)].$$

L'erreur de troncature est contrôlée par

$$0 \leq S(x) - S_N(x) \leq x \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{x}{N}.$$

La dernière majoration résulte de la comparaison $1/n^2 \leq \int_{n-1}^n dt/t^2$. Sur la fenêtre tracée, l'erreur de troncature est donc au plus 6×10^{-5} . Le dessin illustre les propriétés démontrées ; il ne les remplace pas.



Relevé des adaptations

- Deuxième problème, partie I, question 2 : l'identité initiale est remplacée par une identité réelle obtenue à partir des formules d'addition et d'une somme télescopique. L'expression finale de la somme des cosinus et toutes ses utilisations sont conservées.
- Deuxième problème, partie II, question 4. b : précision de la convention de dérivée à droite en 0, sans modification du résultat demandé.
- Deuxième problème, partie II, question 7. b : la courbe demandée est intégrée en SVG

autonome dans le corrigé ; ses points sont calculés à partir des sommes partielles, avec un contrôle explicite de l'erreur de troncature.