



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2004

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Premier problème

I — Étude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t+x} dt$

1.a. On effectue une intégration par parties sur un segment, puis on contrôle une intégrale absolument convergente.

Pour $x > 0$, les fonctions $u \mapsto \frac{1}{u}$ et $u \mapsto -\cos u$ sont de classe C^1 sur le segment d'extrémités 1 et x . L'intégration par parties donne, avec la convention des intégrales orientées si $x < 1$:

$$F(x) = \left[-\frac{\cos u}{u} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^x \frac{\cos u}{u^2} du.$$

Pour $u \geq 1$, $\left| \frac{\cos u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$, et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} du$ converge. Par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du$ converge absolument, donc converge.

D'autre part, $\left| \frac{\cos x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. La formule précédente montre donc que F possède la limite finie :

$$\alpha = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u^2} du.$$

La convergence de F n'a pas été obtenue en majorant directement $\left| \frac{\sin u}{u} \right|$: c'est l'intégration par parties qui fournit un reste intégrable.

1.b. On applique la même démarche, avec une primitive du cosinus.

Sur le segment d'extrémités 1 et $x > 0$, une intégration par parties donne :

$$G(x) = \left[\frac{\sin u}{u} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2} du = \frac{\sin x}{x} - \sin 1 + \int_1^x \frac{\sin u}{u^2} du.$$

Pour $u \geq 1$, $\left| \frac{\sin u}{u^2} \right| \leq \frac{1}{u^2}$, donc l'intégrale du dernier terme converge absolument à l'infini. De plus, $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x} \rightarrow 0$.

Par conséquent, G possède la limite finie :

$$\beta = -\sin 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} du.$$

1.c. On utilise la relation de Chasles avant de passer à la limite à la borne supérieure.

Fixons $x > 0$. Pour $R > x$, les intégrandes sont continues sur $[x; R]$ et :

$$\int_x^R \frac{\sin u}{u} du = F(R) - F(x),$$

$$\int_x^R \frac{\cos u}{u} du = G(R) - G(x).$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, les membres de droite tendent vers $\alpha - F(x)$ et $\beta - G(x)$, par les questions 1.a et 1.b. Les deux intégrales impropres convergent donc, et :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \alpha - F(x),$$

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \beta - G(x).$$

Ces égalités ne supposent pas la convergence absolue des deux intégrales : elles résultent directement de leur définition comme limites d'intégrales sur des segments.

2.a. On réalise un changement de variable affine et on utilise les formules d'addition trigonométriques.

Fixons $x > 0$ et $T > 0$. Sur $[0; T]$, posons $u = t + x$, donc $t = u - x$ et $du = dt$. Les bornes deviennent x et $x + T$. Ainsi :

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t + x} dt = \int_x^{x+T} \frac{\sin(u - x)}{u} du.$$

La formule d'addition donne $\sin(u - x) = \sin u \cos x - \cos u \sin x$. Par linéarité sur le

segment :

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \cos x \int_x^{x+T} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{x+T} \frac{\cos u}{u} du.$$

C'est l'identité demandée.

2.b. Méthode 1 — Utilisation des deux intégrales de la question 1.c

Pour $x > 0$ fixé, l'intégrande $t \mapsto \frac{\sin t}{t+x}$ est continu sur $[0; +\infty[$; aucune difficulté ne se présente en 0.

Dans l'identité de la question 2.a, $x+T \rightarrow +\infty$ lorsque $T \rightarrow +\infty$. Les deux intégrales du membre de droite ont des limites finies par la question 1.c. Le membre de gauche possède donc une limite finie, ce qui prouve sa convergence et donne :

$$A(x) = \cos x \int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du.$$

En particulier : $A(x) = \cos x(\alpha - F(x)) - \sin x(\beta - G(x))$.

Méthode 2 — Convergence directe par intégration par parties

Cette méthode fournit une preuve indépendante de la convergence de l'intégrale définissant A . Sur $[0; T]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \left[-\frac{\cos t}{t+x} \right]_0^T - \int_0^T \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt,$$

soit :

$$\int_0^T \frac{\sin t}{t+x} dt = \frac{1}{x} - \frac{\cos T}{T+x} - \int_0^T \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt.$$

Le terme $\frac{\cos T}{T+x}$ tend vers 0. Le dernier intégrande est absolument intégrable, puisque :

$$\left| \frac{\cos t}{(t+x)^2} \right| \leq \frac{1}{(t+x)^2} \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x)^2} dt = \frac{1}{x}.$$

Ainsi l'intégrale initiale converge et $A(x) = \frac{1}{x} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt$. L'identité de la question 2.a peut alors être passée à la limite, les deux intégrales de droite convergeant par la question 1.c ; elle donne la représentation demandée.

La première méthode suit les fonctions auxiliaires du sujet ; la seconde transforme directement l'oscillation en un reste absolument intégrable. Elle donne aussi la borne $|A(x)| \leq \frac{2}{x}$.

3. On dérive la représentation de A par des primitives sur des segments, sans dériver sous une intégrale impropre.

Posons, pour $x > 0$:

$$S(x) = \alpha - F(x) \text{ et } C(x) = \beta - G(x).$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, les intégrandes définissant F et G étant de classe C^1 sur $]0; +\infty[$, ces deux fonctions sont de classe C^2 sur cet intervalle et :

$$F'(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad G'(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

Ainsi S et C sont de classe C^2 , avec $S'(x) = -\frac{\sin x}{x}$ et $C'(x) = -\frac{\cos x}{x}$. Par la question 2.b :

$$A(x) = \cos x S(x) - \sin x C(x).$$

Cette expression montre que A est de classe C^2 . Sa première dérivée est :

$$A'(x) = -\sin x S(x) + \cos x S'(x) - \cos x C(x) - \sin x C'(x).$$

Les termes $\cos x S'(x) = -\frac{\cos x \sin x}{x}$ et $-\sin x C'(x) = \frac{\sin x \cos x}{x}$ se compensent. Donc :

$$A'(x) = -\sin x S(x) - \cos x C(x).$$

En dérivant une seconde fois :

$$A''(x) = -\cos x S(x) - \sin x S'(x) + \sin x C(x) - \cos x C'(x).$$

En remplaçant S' et C' :

$$A''(x) = -\cos x S(x) + \sin x C(x) + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x} = -A(x) + \frac{1}{x}.$$

On obtient donc, pour tout $x > 0$, $A''(x) + A(x) = \frac{1}{x}$.

4. On utilise les limites des deux restes d'intégrales et les formules obtenues à la question 3.

Puisque $F(x) \rightarrow \alpha$ et $G(x) \rightarrow \beta$ à l'infini, $S(x) \rightarrow 0$ et $C(x) \rightarrow 0$. Les fonctions sinus et cosinus sont bornées en valeur absolue par 1. Par conséquent :

$$|A(x)| \leq |S(x)| + |C(x)| \rightarrow 0,$$

$$|A'(x)| \leq |S(x)| + |C(x)| \rightarrow 0.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} A'(x) = 0.$$

On peut également lire la première limite dans la borne $|A(x)| \leq \frac{2}{x}$ de la question 2.b ; la formule de A' assure ici les deux limites à la fois.

5.a. On borne le cosinus sur le segment d'intégration.

Pour $x \in]0; 1]$ et $u \in [x; 1]$, $0 \leq \cos u \leq 1$, car $[0; 1] \subset [0; \frac{\pi}{2}]$. Comme $u > 0$:

$$0 \leq \frac{\cos u}{u} \leq \frac{1}{u}.$$

En intégrant :

$$0 \leq \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du \leq \int_x^1 \frac{1}{u} du = \ln 1 - \ln x = -\ln x.$$

Si $x = 1$, toutes les quantités sont nulles, donc la borne reste valable.

5.b. On isole la partie de l'intégrale qui peut devenir non bornée près de 0.

Pour $0 < x \leq 1$, la relation de Chasles et la définition de β donnent :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du = \int_x^1 \frac{\cos u}{u} du + \beta.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée au sinus entre 0 et x donne $|\sin x| \leq x$, puisque $|\cos u| \leq 1$. Avec la question 5.a :

$$\left| \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du \right| \leq x(|\beta| - \ln x).$$

Les croissances comparées assurent $x|\ln x| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$, et $x|\beta| \rightarrow 0$. Par encadrement, la quantité demandée tend donc vers 0.

5.c. On traite séparément les bornes 0 et $+\infty$, puis on revient à la représentation de A .

À l'infini, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge par la question 1.a. Près de 0, la définition de la dérivée de $\sin$ en 0 donne :

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \sin'(0) = 1.$$

L'intégrande admet donc un prolongement continu en 0 en lui donnant la valeur 1. Son intégrale sur $[0; 1]$ est finie. Ainsi l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$ converge. Notons sa valeur L .

Pour $x > 0$, la relation de Chasles donne :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = L - \int_0^x \frac{\sin u}{u} du.$$

Le prolongement continu est borné sur un segment au voisinage de 0 ; la dernière intégrale tend donc vers 0 lorsque $x \rightarrow 0^+$. Ainsi $\int_x^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \rightarrow L$.

Dans la représentation de la question 2.b, $\cos x \rightarrow 1$ et le second terme tend vers 0 par la question 5.b. Il en résulte :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

La valeur de L sera déterminée dans la partie III ; elle n'est pas supposée connue ici.

II — Étude de la fonction $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. On établit une borne pour le facteur du numérateur, puis on le compare à une fonction intégrable.

Fixons $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Si $k = 0$, la fonction du numérateur est e^{-xt} ; elle est comprise entre 0 et 1 sur $[0; +\infty[$.

Si $k \geq 1$, la fonction $q(t) = t^k e^{-xt}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et, pour $t > 0$:

$$q'(t) = t^{k-1} e^{-xt} (k - xt).$$

Elle croît jusqu'à $t = \frac{k}{x}$ puis décroît. Son maximum est donc :

$$q\left(\frac{k}{x}\right) = \left(\frac{k}{x}\right)^k e^{-k}.$$

Dans les deux cas, il existe une constante finie $C_{x,k}$ telle que $0 \leq t^k e^{-xt} \leq C_{x,k}$ pour tout $t \geq 0$.

L'intégrande $\frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2}$ est continu sur $[0; +\infty[$ et :

$$0 \leq \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^2} \leq \frac{C_{x,k}}{1+t^2}.$$

La fonction $\frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0; 1]$ et, pour $t \geq 1$, elle est majorée par $\frac{1}{t^2}$, dont l'intégrale converge à l'infini. L'intégrale du majorant converge donc. Par comparaison, l'intégrale définissant $B_k(x)$ converge, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

2.a. On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'exponentielle entre 0 et u .

La fonction exponentielle est de classe C^2 sur le segment d'extrémités 0 et u , quel que soit le signe de u . Sa dérivée seconde est $v \mapsto e^v$, et sur ce segment $e^v \leq e^{|u|}$.

Son polynôme de Taylor d'ordre 1 en 0 est $1 + u$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne alors :

$$|e^u - 1 - u| \leq \frac{|u|^2}{2} \sup_{v \text{ entre } 0 \text{ et } u} e^v \leq \frac{u^2}{2} e^{|u|}.$$

Pour $u = 0$, l'inégalité est encore vérifiée, les deux membres étant nuls. Elle est donc valable pour tout $u \in \mathbb{R}$.

2.b. On applique la question 2.a à $u = -ht$ et on intègre la majoration obtenue.

Fixons $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$ et h tel que $0 < |h| \leq \frac{x}{2}$. On a $x + h \geq \frac{x}{2} > 0$, donc $B_k(x + h)$ est définie.

Par la convergence établie en question 1 et la linéarité des intégrales convergentes :

$$\frac{B_k(x + h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1 + t^2} \frac{e^{-ht} - 1 + ht}{h} dt.$$

La question 2.a donne, pour $t \geq 0$:

$$|e^{-ht} - 1 + ht| \leq \frac{h^2 t^2}{2} e^{|h|t}.$$

Ainsi la valeur absolue de l'intégrande est majorée par :

$$\frac{|h|}{2} \frac{t^{k+2} e^{-(x-|h|)t}}{1 + t^2} \leq \frac{|h|}{2} \frac{t^{k+2} e^{-(x/2)t}}{1 + t^2}.$$

La dernière fonction est intégrable par la question 1, avec les paramètres $\frac{x}{2} > 0$ et $k + 2$.

L'intégrale de l'expression du taux d'accroissement est donc absolument convergente.

L'inégalité triangulaire, d'abord sur un segment puis par passage à la limite, donne :

$$\left| \frac{B_k(x + h) - B_k(x)}{h} + B_{k+1}(x) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2} e^{-(x/2)t}}{1 + t^2} dt = \frac{|h|}{2} B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right).$$

2.c. On passe à la limite dans le taux d'accroissement, avec x et k fixés.

La quantité $B_{k+2}\left(\frac{x}{2}\right)$ est finie et ne dépend pas de h . Le majorant de la question 2.b tend donc vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$, $h \neq 0$. Par encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B_k(x+h) - B_k(x)}{h} = -B_{k+1}(x).$$

Ainsi B_k est dérivable en tout $x > 0$ et $B'_k(x) = -B_{k+1}(x)$.

Cette preuve utilise la définition de la dérivée et une estimation explicite ; aucun théorème de dérivation sous l'intégrale n'est nécessaire.

2.d. On exploite la formule des dérivées pour les indices successifs, puis on regroupe deux intégrales convergentes.

Toutes les fonctions B_k sont dérivables par la question 2.c, donc continues. En particulier, $B'_0 = -B_1$ est dérivable et :

$$B''_0 = -B'_1 = B_2.$$

Comme B_2 est continue, B_0 est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$. Pour $x > 0$, les intégrales définissant B_0 et B_2 convergent. Par linéarité :

$$B''_0(x) + B_0(x) = B_2(x) + B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(t^2 + 1)e^{-xt}}{1 + t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt.$$

La primitive $-\frac{1}{x}e^{-xt}$ donne $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$, puisque $x > 0$. Donc

$$B''_0(x) + B_0(x) = \frac{1}{x}.$$

3. On compare les intégrandes de B_0 et de B_1 à deux fonctions exponentielles intégrables.

Pour $t \geq 0$ et $x > 0$:

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1 + t^2} \leq e^{-xt},$$

$$0 \leq \frac{te^{-xt}}{1 + t^2} \leq te^{-xt}.$$

La première comparaison donne $0 \leq B_0(x) \leq \frac{1}{x}$.

Pour la seconde, on calcule l'intégrale du majorant sur $[0; R]$ par intégration par parties :

$$\int_0^R t e^{-xt} dt = \left[-\frac{t}{x} e^{-xt} \right]_0^R + \frac{1}{x} \int_0^R e^{-xt} dt = \frac{1}{x^2} - e^{-xR} \left(\frac{R}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, le terme exponentiel tend vers 0 par croissances comparées. Donc

$$\int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \frac{1}{x^2}. \text{ Comme } -B'_0 = B_1, \text{ on obtient :}$$

$$0 \leq -B'_0(x) = B_1(x) \leq \frac{1}{x^2}.$$

Les majorants $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. Par encadrement, $B_0(x) \rightarrow 0$ et $B'_0(x) \rightarrow 0$.

4.a. On majore sur toute la demi-droite et on minore sur un segment dont la longueur dépend de x .

Pour $x > 0$ et $t \geq 0$, $e^{-xt} \leq 1$, donc :

$$B_0(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Cette dernière intégrale converge, comme déjà justifié dans la question 1.

Par positivité, $B_0(x) \geq \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$. Sur ce segment, $xt \leq \sqrt{x}$, donc $e^{-xt} \geq e^{-\sqrt{x}}$. Il vient :

$$B_0(x) \geq e^{-\sqrt{x}} \int_0^{1/\sqrt{x}} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Les deux comparaisons donnent exactement l'encadrement demandé.

4.b. On utilise une primitive usuelle, ce qui permet de justifier l'identité sans changement de variable non affine.

Pour $y \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $\tan y$ est un réel positif ou nul. La dérivée de $\arctan t$ est $\frac{1}{1+t^2}$, donc :

$$\int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(\tan y) - \arctan 0.$$

La tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, de réciproque $\arctan$. Puisque y appartient à cet intervalle, $\arctan(\tan y) = y$. Ainsi :

$$\int_0^{\tan y} \frac{1}{1+t^2} dt = y = \int_0^y du.$$

Pour toute borne $R \geq 0$, la même primitive donne $\int_0^R \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan R$. Lorsque $R \rightarrow +\infty$, $\arctan R \rightarrow \frac{\pi}{2}$. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

4.c. Méthode 1 — Encadrement fourni par l'énoncé

Par les questions 4.a et 4.b :

$$e^{-\sqrt{x}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq B_0(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $e^{-\sqrt{x}} \rightarrow 1$ et $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow +\infty$, donc $\arctan(\frac{1}{\sqrt{x}}) \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Le minorant tend donc vers $\frac{\pi}{2}$, comme le majorant constant.

Par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 0^+} B_0(x) = \frac{\pi}{2}$. La preuve ne requiert aucun échange entre limite et intégrale.

Méthode 2 — Découpage en un segment et une queue d'intégrale

On peut aussi contrôler directement la différence à la limite recherchée. Les deux intégrales convergent et $0 \leq e^{-xt} \leq 1$, donc :

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - B_0(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1 + t^2} dt.$$

Fixons une borne $R > 0$. Pour $v \geq 0$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à e^{-v} entre 0 et v donne $0 \leq 1 - e^{-v} \leq v$. Sur $[0; R]$, on a ainsi $1 - e^{-xt} \leq xt \leq xR$. Sur $[R; +\infty[$,

on utilise simplement $1 - e^{-xt} \leq 1$. Il en résulte :

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - B_0(x) \leq xR \int_0^R \frac{1}{1+t^2} dt + \int_R^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{\pi x R}{2} + \int_R^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. La convergence de l'intégrale de référence permet de choisir $R > 0$ tel que la dernière queue soit strictement inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Pour $0 < x < \frac{\varepsilon}{\pi R}$, le premier terme est lui aussi strictement inférieur à $\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi $0 \leq \frac{\pi}{2} - B_0(x) < \varepsilon$, ce qui prouve à nouveau la limite.

La première méthode utilise un segment dépendant de x pour obtenir immédiatement un encadrement. La seconde choisit d'abord un segment fixe, puis rend son erreur petite en diminuant x ; c'est une stratégie réutilisable pour justifier des limites d'intégrales avec des estimations élémentaires.

III — Calcul de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$

1. On dérive U et on utilise l'équation satisfaite par la différence φ .

Les fonctions A et B_0 sont de classe C^2 sur $]0; +\infty[$, par I.3 et II.2.d. Leur différence $\varphi = A - B_0$ l'est donc également. En soustrayant leurs équations :

$$\varphi'' + \varphi = (A'' + A) - (B_0'' + B_0) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0.$$

La fonction $U = \varphi^2 + (\varphi')^2$ est de classe C^1 et :

$$U'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\varphi'(x)\varphi''(x) = 2\varphi'(x)(\varphi(x) + \varphi''(x)) = 0.$$

Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle y est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi U est constante sur $]0; +\infty[$.

2. On utilise les limites des fonctions et de leurs dérivées établies dans les deux premières parties.

D'après I.4 et II.3, $A(x) \rightarrow 0$, $A'(x) \rightarrow 0$, $B_0(x) \rightarrow 0$ et $B'_0(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Ainsi :

$$\varphi(x) = A(x) - B_0(x) \rightarrow 0 \text{ et } \varphi'(x) = A'(x) - B'_0(x) \rightarrow 0.$$

Par les opérations sur les limites, $U(x) = \varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2 \rightarrow 0$. Sa limite à l'infini vaut donc 0.

3. On combine la constance et la limite de U , puis la positivité des carrés.

Par III.1, U est constante. Par III.2, cette constante vaut 0. Pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x)^2 + \varphi'(x)^2 = 0.$$

Les deux termes sont positifs ou nuls ; ils sont donc chacun nuls. En particulier, $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $A(x) = B_0(x)$ pour tout $x > 0$.

4. On passe à la limite en 0^+ dans l'identité de la question III.3.

$$\text{Par I.5.c, } A(x) \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du \text{ lorsque } x \rightarrow 0^+. \text{ Par II.4.c, } B_0(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Ces fonctions étant égales pour tout $x > 0$, leurs limites sont égales. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

La convergence de cette intégrale a été établie avant son calcul, et sa valeur résulte exclusivement des outils réels utilisés dans le sujet.

Deuxième problème

La positivité d'une matrice est ici celle de ses coefficients, conformément au préambule du sujet. Tous les ordres entre colonnes ou matrices sont compris coefficient par coefficient.

I — Étude d'exemples

1. On vérifie les deux conditions de la définition en utilisant la colonne proposée.

La matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a tous ses coefficients positifs ou nuls, donc $A \geq 0$. La colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est positive, et :

$$AU = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}U.$$

Ainsi

$$U - AU = \frac{1}{3}U = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} > 0.$$

La colonne $P = U$ fournit donc le témoin requis par la définition. La matrice A est productive.

2. On montre qu'aucune colonne positive ne peut satisfaire la stricte inégalité requise.

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est positive. Soit une colonne positive quelconque

$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$. Le calcul donne :

$$BP = \begin{pmatrix} p_1 + 4p_2 + p_3 \\ 2p_1 + p_2 + 3p_3 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$P - BP = \begin{pmatrix} -4p_2 - p_3 \\ -2p_1 - 3p_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La troisième coordonnée de $P - BP$ est toujours nulle. Cette colonne ne peut donc être strictement positive. Il n'existe aucun témoin $P \geq 0$ avec $P - BP > 0$: B n'est pas productive.

II — Caractérisation des matrices positives

1. On développe chaque coefficient du produit.

Supposons $M = (m_{i,j}) \geq 0$ et $X = (x_j) \geq 0$. Pour chaque $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la coordonnée

d'indice i de MX est :

$$(MX)_i = \sum_{j=1}^n m_{i,j} x_j.$$

Chaque terme de cette somme est positif ou nul, puisque $m_{i,j} \geq 0$ et $x_j \geq 0$. Ainsi $(MX)_i \geq 0$ pour tout i , donc $MX \geq 0$.

2. On teste l'hypothèse sur les colonnes de la base canonique pour lire séparément chaque colonne de M .

Supposons que $MX \geq 0$ pour toute colonne $X \geq 0$. Pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons e_j la colonne dont la coordonnée numéro j vaut 1 et dont toutes les autres coordonnées valent 0. Elle est positive, donc $Me_j \geq 0$ par hypothèse.

Or Me_j est la colonne numéro j de M . Ainsi chaque colonne de M est positive, ce qui signifie que tous ses coefficients sont positifs ou nuls. Donc $M \geq 0$.

Les questions II.1 et II.2 donnent la caractérisation : une matrice carrée est positive si et seulement si elle envoie toute colonne positive sur une colonne positive.

III — Caractérisation des matrices productives

1. Dans les quatre sous-questions, A est productive, donc $A \geq 0$, et la colonne $P \geq 0$ vérifie $P - AP > 0$.

1.a. On utilise la positivité du produit AP .

Comme $A \geq 0$ et $P \geq 0$, la question II.1 donne $AP \geq 0$. Or :

$$P = AP + (P - AP).$$

Le premier terme est positif et le second strictement positif. Chaque coordonnée de leur somme est donc strictement positive : $P > 0$. En particulier, $p_j > 0$ pour tous les indices j ; les rapports introduits à la sous-question suivante sont bien définis.

1.b. On exploite la coordonnée où le rapport $\frac{x_j}{p_j}$ atteint son minimum, sans supposer d'avance que X est positive.

Par III.1.a, tous les p_j sont strictement positifs. La famille finie des rapports possède donc un minimum réel c , atteint en un indice k . Par définition :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{x_j}{p_j} \geq c \text{ et } x_k = cp_k.$$

En multipliant chaque inégalité par $p_j > 0$, on obtient $x_j \geq cp_j$. Les coefficients $a_{k,j}$ sont positifs ou nuls, donc :

$$\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \geq c \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j.$$

Cette comparaison reste vraie même si c est négatif : on multiplie seulement les inégalités $x_j \geq cp_j$ par les nombres $a_{k,j} \geq 0$.

D'autre part, l'hypothèse $X \geq AX$ donne, sur la coordonnée k :

$$cp_k = x_k \geq \sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j \geq c \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j.$$

En soustrayant le dernier membre :

$$c \left(p_k - \sum_{j=1}^n a_{k,j} p_j \right) \geq 0.$$

Le facteur entre parenthèses est la coordonnée d'indice k de $P - AP$, donc il est strictement positif. La division par ce facteur donne $c \geq 0$.

Enfin, pour tout j , $x_j \geq cp_j \geq 0$. La colonne X est donc positive. On a établi que, pour cette matrice productive A , toute colonne réelle X satisfaisant $X \geq AX$ est positive.

1.c. On applique III.1.b à X et à son opposée, puis on utilise le critère d'inversibilité par le noyau.

Supposons $X = AX$. Cette égalité implique $X \geq AX$, donc $X \geq 0$ par III.1.b. La linéarité du produit donne aussi $A(-X) = -AX = -X$; en particulier, $-X \geq A(-X)$. La même sous-question donne $-X \geq 0$.

Ainsi chaque coordonnée de X est à la fois positive ou nulle et négative ou nulle. Toutes sont nulles : $X = 0$.

Si $X \in \text{Ker}(I_n - A)$, alors $(I_n - A)X = 0$, donc $X = AX$, et le raisonnement précédent donne $X = 0$. On a donc $\text{Ker}(I_n - A) = \{0\}$.

L'application linéaire représentée par $I_n - A$ est un endomorphisme d'un espace de dimension finie n . Un noyau nul implique, par le théorème du rang, un rang égal à n ; l'endomorphisme est donc bijectif. Ainsi $I_n - A$ est inversible.

1.d. On traduit l'équation définissant Y en une inégalité permettant d'appliquer III.1.b.

Soit $X \geq 0$. L'inverse $(I_n - A)^{-1}$ existe par III.1.c, donc $Y = (I_n - A)^{-1}X$ est bien définie. Elle satisfait :

$$(I_n - A)Y = X, \text{ donc } Y - AY = X \geq 0.$$

Ainsi $Y \geq AY$. La question III.1.b donne alors $Y \geq 0$.

On a donc montré que $(I_n - A)^{-1}X \geq 0$ pour toute colonne $X \geq 0$. La caractérisation de la question II.2, appliquée à la matrice $(I_n - A)^{-1}$, assure que cette matrice est positive :

$$(I_n - A)^{-1} \geq 0.$$

La conclusion porte sur une positivité coefficient par coefficient; elle n'exige pas que tous les coefficients de l'inverse soient strictement positifs.

2. On utilise la positivité de l'inverse pour construire un témoin de productivité.

Par hypothèse, $B \geq 0$, $I_n - B$ est inversible et $(I_n - B)^{-1} \geq 0$. La colonne U dont tous les coefficients valent 1 est strictement positive, donc positive. Par la question II.1 :

$$V = (I_n - B)^{-1}U \geq 0.$$

En multipliant par $I_n - B$:

$$(I_n - B)V = U, \text{ donc } V - BV = U > 0.$$

La matrice B est positive et la colonne positive V satisfait la stricte inégalité de la définition. Ainsi B est productive.

On peut même constater que $V > 0$: puisque $BV \geq 0$, l'égalité $V = U + BV$ donne une colonne strictement positive.

3. On rassemble les implications démontrées en III.1 et III.2.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$M \text{ est productive} \iff M \geq 0, I_n - M \text{ est inversible et } (I_n - M)^{-1} \geq 0.$$

L'implication directe résulte de la définition de la productivité et des questions III.1.c–III.1.d. La réciproque est la question III.2.

Les trois conditions du membre de droite sont requises ; l'existence d'un inverse positif ne remplace pas l'hypothèse $M \geq 0$.

4. On vérifie d'abord l'identité demandée, puis on présente deux façons d'en déduire la productivité.

Comme $2M^2 = M$:

$$(I_n - M)(I_n + 2M) = I_n + 2M - M - 2M^2 = I_n + M - 2M^2 = I_n.$$

Méthode 1 — Caractérisation par l'inverse

Le produit dans l'autre ordre donne également :

$$(I_n + 2M)(I_n - M) = I_n - M + 2M - 2M^2 = I_n.$$

Ainsi $I_n - M$ est inversible et $(I_n - M)^{-1} = I_n + 2M$. L'hypothèse $M \geq 0$ implique $I_n + 2M \geq 0$, puisque I_n est positive.

Les trois conditions de la caractérisation III.3 sont donc vérifiées. La matrice M est productive.

Méthode 2 — Construction directe d'une colonne témoin

Notons U la colonne de taille n dont tous les coefficients valent 1, et posons $P = (I_n + 2M)U$. Comme $M \geq 0$ et $U > 0$, la question II.1 donne $MU \geq 0$; ainsi $P = U + 2MU \geq U > 0$.

L'identité déjà vérifiée donne :

$$P - MP = (I_n - M)(I_n + 2M)U = U > 0.$$

La colonne positive P est donc un témoin explicite de la productivité de M . Cette méthode utilise directement la définition, tandis que la première applique la caractérisation générale obtenue dans la partie III.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation mathématique n'est nécessaire. Toutes les questions sont conservées, aucune n'est remplacée par un résultat admis, et les deux problèmes sont résolus avec les outils du référentiel.