



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2003

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

On utilise les notations φ , I_n , J_n et K_n de l'énoncé. Les intégrales impropres seront utilisées seulement après justification de leur convergence.

Partie I : Résultats généraux sur φ et J_n

- 1) Sur $]0; +\infty[$, $\varphi(t) = \sin t/t$ est continue comme quotient de fonctions continues à dénominateur non nul. Au voisinage de 0, le développement limité usuel $\sin t = t + o(t)$ donne $\sin t/t \rightarrow 1$. Cette limite est égale à $\varphi(0)$; φ est donc continue sur $[0; +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, la fonction $t \mapsto \varphi(t)^n$ est continue sur le segment $[0; 1]$, donc son intégrale J_n existe et est finie.

- 2) a) Pour $0 < t \leq 1 < \pi$, $\sin t > 0$, donc $\varphi(t) > 0$. Comme $\varphi(0) = 1$, la positivité stricte vaut sur tout $[0; 1]$.

Pour $t \in]0; 1]$, la dérivée vaut

$$\varphi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}.$$

Posons $q(t) = t \cos t - \sin t$ sur $[0; 1]$. On a $q(0) = 0$ et $q'(t) = -t \sin t < 0$ pour $t \in]0; 1]$. Par stricte décroissance, $q(t) < 0$ pour $t > 0$. Ainsi $\varphi'(t) < 0$ sur $]0; 1]$.

La fonction est strictement décroissante entre deux points strictement positifs. La continuité en 0 donne $\varphi(u) \leq \varphi(0)$ pour $u > 0$, en passant à la limite dans $\varphi(s) > \varphi(u)$ lorsque $s \downarrow 0$. Pour $t > 0$, on a alors $\varphi(t) < \varphi(t/2) \leq \varphi(0)$. La stricte décroissance s'étend donc au segment $[0; 1]$.

- 2) b) Méthode 1 — Distinguer deux intervalles.

Pour $t \in]0; 1]$, la question précédente donne $0 < \varphi(t) < \varphi(0) = 1$, donc $|\varphi(t)| < 1$. Pour $t > 1$, la borne $|\sin t| \leq 1$ donne

$$|\varphi(t)| \leq \frac{1}{t} < 1.$$

Ainsi $|\varphi(t)| < 1$ pour tout $t > 0$.

Méthode 2 — Utiliser une représentation intégrale du sinus.

Pour $t > 0$, le théorème fondamental du calcul intégral donne $\sin t = \int_0^t \cos u \, du$. Par inégalité triangulaire,

$$|\sin t| \leq \int_0^t |\cos u| \, du.$$

On a $|\cos u| \leq 1$ partout, et $|\cos u| < 1$ pour $u \in]0; \min(t, 1)[$, intervalle de longueur strictement positive. La fonction $1 - |\cos u|$ est continue, positive sur cet intervalle et positive ou nulle ailleurs ; son intégrale sur $[0; t]$ est donc strictement positive. Par conséquent, $\int_0^t |\cos u| \, du < t$ et $|\sin t| < t$. La division par $t > 0$ conclut.

La première méthode réutilise les variations sur un petit segment ; la seconde fournit directement une inégalité globale, sans distinction de cas.

- 3) a) Suivons l'indication en posant $h(t) = \sin t - t + t^2$. Cette fonction est deux fois dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$h(0) = 0, \quad h'(0) = 0, \quad h''(t) = 2 - \sin t \geq 1 > 0.$$

La dérivée h' est strictement croissante, donc $h'(t) > 0$ pour $t > 0$. La fonction h est alors strictement croissante à partir de 0, d'où $h(t) \geq 0$. Pour $t > 0$, cela donne $\sin t \geq t - t^2$; en divisant par $t > 0$,

$$\varphi(t) \geq 1 - t.$$

Pour $t = 0$, l'inégalité est une égalité puisque $\varphi(0) = 1$. Elle est donc valable sur tout $[0; +\infty[$.

- 3) b) Sur $[0; 1]$, les quantités $\varphi(t)$ et $1 - t$ sont positives ou nulles. La fonction $u \mapsto u^n$ est croissante sur $[0; +\infty[$ pour tout entier $n \geq 1$. Ainsi $\varphi(t)^n \geq (1 - t)^n$ sur ce segment.

Les deux fonctions sont continues et intégrables. Par croissance de l'intégrale,

$$J_n \geq \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

La restriction à $[0; 1]$ est essentielle pour élever une inégalité entre quantités non négatives à une puissance quelconque.

Partie II : Étude de I_1

1) a) Pour $x \geq 1$, les fonctions $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto -\cos t$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1; x]$.

L'intégration par parties sur ce segment donne

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

En évaluant le crochet,

$$\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt = \cos 1 - \frac{\cos x}{x} - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Cette égalité vaut aussi pour $x = 1$, où les deux membres sont nuls.

1) b) Pour $t \geq 1$, $|\cos t|/t^2 \leq 1/t^2$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} dt/t^2 = 1$ converge ; la comparaison assure donc la convergence absolue de $\int_1^{+\infty} \cos t/t^2 dt$.

Par ailleurs, $|\cos x/x| \leq 1/x \rightarrow 0$. Le membre de droite de l'égalité précédente possède donc une limite finie lorsque $x \rightarrow +\infty$. L'intégrale K_1 converge et

$$K_1 = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

La partie sur $[0; 1]$ est J_1 , finie d'après I.1. Par la relation de Chasles, $I_1 = J_1 + K_1$ est donc convergente. Aucun calcul de la valeur exacte de I_1 n'est demandé.

2) a) Si $u = |\sin t|$, alors $0 \leq u \leq 1$ et $u - u^2 = u(1 - u) \geq 0$. Donc $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

Pour établir l'identité trigonométrique, la formule d'addition donne

$\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t$. Avec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, on obtient $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$, d'où

$$|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)).$$

- 2) b) On effectue une intégration par parties sur $[1; x]$, pour $x \geq 1$, en prenant pour primitive de $\cos(2t)$ la fonction $\sin(2t)/2$:

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4t} \right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{4t^2} dt.$$

Le terme en x tend vers 0 puisque $|\sin(2x)/(4x)| \leq 1/(4x)$. L'intégrale du second membre converge absolument, par la majoration

$$\left| \frac{\sin(2t)}{4t^2} \right| \leq \frac{1}{4t^2}.$$

La formule possède donc une limite finie. Ainsi $\int_1^{+\infty} \cos(2t)/(2t) dt$ converge.

- 2) c) Pour $t \geq 1$, la question 2.a, divisée par $t > 0$, donne

$$\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}.$$

On intègre d'abord sur un segment : pour $x \geq 1$,

$$\int_1^x \frac{|\sin t|}{t} dt \geq \frac{1}{2} \ln x - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t} dt.$$

Le dernier terme possède une limite finie par la question 2.b, alors que $\ln x \rightarrow +\infty$. Le membre de droite tend vers $+\infty$. L'intégrale de la valeur absolue diverge donc sur $[1; +\infty[$.

Sur $[0; 1]$, $|\varphi|$ est continue et intégrable. Ainsi $\int_0^{+\infty} |\varphi(t)| dt$ diverge, alors que I_1 converge par la question 1.b : I_1 est convergente mais non absolument convergente.

Partie III : Étude de I_n , pour $n \geq 2$

- 1) a) Fixons $n \geq 2$. Pour $t \geq 1$,

$$|\varphi(t)^n| = \frac{|\sin t|^n}{t^n} \leq \frac{1}{t^n}.$$

L'intégrale de référence $\int_1^{+\infty} t^{-n} dt$ converge car $n > 1$. L'intégrande φ^n est continue sur $[1; +\infty[$, et la comparaison donne la convergence absolue de K_n . En particulier, K_n converge.

- 1) b) La convergence absolue permet d'appliquer l'inégalité triangulaire pour l'intégrale impropre :

$$|K_n| \leq \int_1^{+\infty} |\varphi(t)|^n dt \leq \int_1^{+\infty} t^{-n} dt.$$

En calculant d'abord sur $[1; R]$,

$$\int_1^R t^{-n} dt = \frac{1 - R^{1-n}}{n-1} \rightarrow \frac{1}{n-1}.$$

Donc $|K_n| \leq 1/(n-1)$ pour tout $n \geq 2$.

- 2) a) Sur $[0; 1]$, I.2 assure $0 < \varphi(t) \leq 1$. Pour $n \geq 2$, $\varphi(t)^{n+1} \leq \varphi(t)^n$. Par croissance de l'intégrale, $J_{n+1} \leq J_n$; la suite est décroissante.

Elle est même strictement décroissante : pour $t \in]0; 1]$, $0 < \varphi(t) < 1$, donc $\varphi(t)^n - \varphi(t)^{n+1} > 0$. Cette différence est continue et son intégrale sur $[0; 1]$ est strictement positive.

- 2) b) La positivité de l'intégrande donne $J_n \geq 0$. La suite est décroissante par 2.a et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel $\ell \geq 0$. De plus, $\varphi(t)^n \leq 1$ sur $[0; 1]$, donc $J_n \leq 1$ et $\ell \leq 1$.

- 2) c) Fixons $a \in]0; 1[$ et $n \geq 2$. Sur $[0; a]$, $0 \leq \varphi(t)^n \leq 1$, d'où

$$0 \leq \int_0^a \varphi(t)^n dt \leq \int_0^a 1 dt = a.$$

Sur $[a; 1]$, la décroissance et la positivité de φ donnent $0 < \varphi(t) \leq \varphi(a)$. En élevant à la puissance n puis en intégrant,

$$0 \leq \int_a^1 \varphi(t)^n dt \leq \int_a^1 \varphi(a)^n dt = (1-a)\varphi(a)^n.$$

Les deux intégrales sont des intégrales de fonctions continues sur des segments ; les comparaisons sont donc légitimes.

2) d) Par Chasles et la question précédente,

$$0 \leq J_n \leq a + (1-a)\varphi(a)^n.$$

Pour $a \in]0; 1[$ fixé, I.2 donne $0 < \varphi(a) < 1$, donc $\varphi(a)^n \rightarrow 0$. En passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $0 \leq \ell \leq a$ pour tout $a \in]0; 1[$.

Si $\ell > 0$, puisque $\ell \leq 1$, le choix $a = \ell/2 \in]0; 1[$ conduirait à $\ell \leq \ell/2$, contradiction. Ainsi $\ell = 0$ et $J_n \rightarrow 0$.

La séparation du segment en $[0; a]$ et $[a; 1]$ justifie la limite sans échanger une limite et une intégrale.

3) a) Pour $n \geq 2$, la partie J_n est finie par I.1, et la partie K_n converge absolument par III.1.a. La fonction φ^n est continue sur $[0; 1]$, donc elle y est aussi absolument intégrable.

Par Chasles, I_n converge absolument et $I_n = J_n + K_n$.

3) b) D'après III.1.b, $|K_n| \leq 1/(n-1) \rightarrow 0$, donc $K_n \rightarrow 0$. D'après III.2.d, $J_n \rightarrow 0$. En utilisant $I_n = J_n + K_n$, on conclut

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Partie IV : Étude de la série de terme général I_n , $n \geq 2$

1) Pour $p \geq 1$, les intégrales K_{2p} et K_{2p+1} sont absolument convergentes. Leur somme peut donc être regroupée en une seule intégrale :

$$K_{2p} + K_{2p+1} = \int_1^{+\infty} \varphi(t)^{2p}(1 + \varphi(t)) dt.$$

La puissance paire est positive ou nulle. De plus, I.2.b donne $\varphi(t) > -1$ pour $t \geq 1$, donc $1 + \varphi(t) > 0$. L'intégrande est positive ou nulle, d'où $K_{2p} + K_{2p+1} \geq 0$.

2) Pour chaque $p \geq 1$, III.3.a donne

$$I_{2p} + I_{2p+1} = J_{2p} + J_{2p+1} + K_{2p} + K_{2p+1} \geq J_{2p} + J_{2p+1}.$$

En sommant ces inégalités pour $p = 1, \dots, N$, on obtient

$$\sum_{p=1}^N (I_{2p} + I_{2p+1}) \geq \sum_{p=1}^N (J_{2p} + J_{2p+1}).$$

Il s'agit de sommes finies, donc aucun réarrangement de série infinie n'est utilisé.

3) Posons

$$U_m = \sum_{n=2}^m I_n$$

pour $m \geq 2$. D'après la question 2 et I.3.b,

$$U_{2N+1} \geq \sum_{p=1}^N \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \right) \geq \sum_{p=1}^N \frac{1}{p+1}.$$

En effet, $1/(2p+1) \geq 1/(2p+2)$, donc la parenthèse est au moins $2/(2p+2) = 1/(p+1)$.

La série harmonique diverge ; le minorant tend vers $+\infty$. Ainsi $U_{2N+1} \rightarrow +\infty$, ce qui suffit à établir la divergence de

$$\sum_{n \geq 2} I_n.$$

On peut préciser le comportement de toutes les sommes partielles. L'intégrande de I_{2N+2} est une puissance paire, donc $I_{2N+2} \geq 0$ et $U_{2N+2} \geq U_{2N+1}$. Les sommes partielles

d'indices pairs tendent elles aussi vers $+\infty$. Par conséquent,

$$\sum_{n \geq 2} I_n \text{ diverge vers } +\infty.$$

La limite $I_n \rightarrow 0$ est seulement une condition nécessaire à la convergence d'une série ; ce problème montre qu'elle n'est pas suffisante.

PROBLÈME 2

On conserve les notations du sujet. En particulier, f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible d'un espace euclidien réel E de dimension finie $n \geq 2$.

Partie I : Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

- 1) En dimension finie, un endomorphisme est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul. Comme f n'est pas inversible, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = 0 = 0x$. Le réel 0 est donc une valeur propre de f .

Le théorème spectral s'applique puisque E est euclidien de dimension finie et f est symétrique. Il fournit une base orthonormale de vecteurs propres de f , avec des valeurs propres réelles. Si toutes ses valeurs propres étaient nulles, f serait nul sur chacun des vecteurs de cette base, puis sur tout E par linéarité. Cela contredirait $f \neq \tilde{0}$. Ainsi f admet au moins une valeur propre non nulle.

- 2) a) Soient $x \in E_f(\lambda)$ et $y \in E_f(\mu)$. Par définition des espaces propres, $f(x) = \lambda x$ et $f(y) = \mu y$, y compris lorsque l'un des vecteurs est nul. La bilinéarité du produit scalaire et la symétrie de f donnent

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

- 2) b) Si $\lambda \neq \mu$, l'égalité précédente donne $(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0$. Le facteur $\lambda - \mu$ est non nul, donc $\langle x, y \rangle = 0$ pour tous $x \in E_f(\lambda)$ et $y \in E_f(\mu)$.

Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont ainsi deux à deux orthogonaux.

3) Méthode 1 — Orthogonalité et théorème du rang.

Si $u \in \text{Im } f$ et $v \in \text{Ker } f$, il existe $z \in E$ tel que $u = f(z)$. La symétrie donne

$$\langle u, v \rangle = \langle f(z), v \rangle = \langle z, f(v) \rangle = 0.$$

Donc $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont orthogonaux. Leur intersection est réduite au vecteur nul : si w appartient aux deux, $\langle w, w \rangle = 0$, donc $w = 0$.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = n$. La somme étant directe, elle est de dimension n et égale à E . Ainsi

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f, \quad \text{Im } f = (\text{Ker } f)^\perp.$$

Méthode 2 — Décomposer dans une base propre orthonormale.

Le théorème spectral fournit une base orthonormale $(u_1, \dots, u_n)$ et des réels $\nu_1, \dots, \nu_n$ tels que $f(u_j) = \nu_j u_j$. Pour

$$x = \sum_j b_j u_j,$$

$$f(x) = \sum_j \nu_j b_j u_j.$$

Par unicité des coordonnées, $x \in \text{Ker } f$ si et seulement si $b_j = 0$ pour tous les indices où $\nu_j \neq 0$. Le noyau est donc engendré par les vecteurs propres de valeur propre nulle. L'image est engendrée par les vecteurs u_j pour lesquels $\nu_j \neq 0$: ils apparaissent tous dans l'image puisque $u_j = f(u_j/\nu_j)$.

Ces deux familles disjointes réunies constituent une base orthonormale de E . Leurs espaces engendrés sont donc supplémentaires orthogonaux.

La première méthode ne nécessite pas de connaître les valeurs propres ; la seconde montre la décomposition coordonnée qui sera utilisée ensuite.

4) Soit $x \in E$. On utilise désormais les valeurs propres distinctes $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ de l'énoncé et leurs projecteurs orthogonaux p_j .

4) a) Le théorème spectral donne une base orthonormale de vecteurs propres. En regroupant les coordonnées de x selon leur valeur propre, on obtient des vecteurs $x_j \in E_f(\lambda_j)$ tels que

$$x = \sum_{j=0}^k x_j.$$

Montrons l'unicité. Si

$$x = \sum_j x_j = \sum_j y_j$$

avec $x_j, y_j \in E_f(\lambda_j)$, alors

$$\sum_j (x_j - y_j) = 0.$$

Les termes sont deux à deux orthogonaux par la question 2.b. Par Pythagore,

$$0 = \left\| \sum_{j=0}^k (x_j - y_j) \right\|^2 = \sum_{j=0}^k \|x_j - y_j\|^2.$$

Chaque terme est positif ou nul ; ils sont tous nuls. Donc $x_j = y_j$ pour chaque j . La décomposition existe et est unique.

4) b) Pour un indice j fixé, $x_j \in E_f(\lambda_j)$ et

$$x - x_j = \sum_{i \neq j} x_i$$

est orthogonal à $E_f(\lambda_j)$ d'après 2.b. La caractérisation de la projection orthogonale donne donc $p_j(x) = x_j$.

En sommant ces égalités,

$$\sum_{j=0}^k p_j(x) = x$$

pour tout $x \in E$. Ainsi

$$\text{id}_E = \sum_{j=0}^k p_j.$$

5) a) Si $i \neq j$ et $x \in E$, le vecteur $p_j(x)$ appartient à $E_f(\lambda_j)$, donc à $E_f(\lambda_i)^\perp$. Son projeté orthogonal sur $E_f(\lambda_i)$ est nul : $p_i(p_j(x)) = 0$.

Cette égalité vaut pour tout x , donc $p_i \circ p_j = \tilde{0}$. On rappelle aussi que $p_j \circ p_j = p_j$, puisque p_j est un projecteur.

5) b) Pour tout

$$x = \sum_{j=0}^k x_j$$

décomposé comme en 4.a, la linéarité donne

$$f(x) = \sum_{j=0}^k f(x_j) = \sum_{j=0}^k \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^k \lambda_j p_j(x),$$

car $\lambda_0 = 0$. L'égalité étant vraie pour chaque $x \in E$,

$$f = \sum_{j=1}^k \lambda_j p_j.$$

5) c) La question 5.b montre que $\text{Im } f$ est contenue dans $\bigoplus_{j=1}^k E_f(\lambda_j)$. Réciproquement, si

$$z = \sum_{j=1}^k z_j$$

avec $z_j \in E_f(\lambda_j)$, les λ_j sont non nuls et

$$z = f \left(\sum_{j=1}^k \frac{z_j}{\lambda_j} \right).$$

Donc $\text{Im } f = \bigoplus_{j=1}^k E_f(\lambda_j)$. Pour

$$x = \sum_{j=0}^k x_j,$$

le vecteur

$$\sum_{j=1}^k x_j$$

appartient à l'image, tandis que la différence x_0 appartient à $\text{Ker } f = (\text{Im } f)^\perp$, par la question 3. Le projeté orthogonal sur l'image est donc

$$p(x) = \sum_{j=1}^k x_j = \sum_{j=1}^k p_j(x).$$

On conclut $p = p_1 + \dots + p_k$.

- 6) a) L'endomorphisme $f^\sharp$ est bien défini, car $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont non nuls. En utilisant 5.a, 5.b et l'idempotence des projecteurs,

$$f \circ f^\sharp = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_j} (p_i \circ p_j) = \sum_{j=1}^k p_j = p.$$

Les termes où $i \neq j$ sont nuls et les termes où $i = j$ valent p_j . Cette démonstration établit l'égalité demandée sans inverser f , qui n'est pas inversible.

- 6) b) Pour $x, y \in E$, la question 6.a donne $p(y) = f(f^\sharp(y))$. Ainsi, par linéarité de f ,

$$f(x) = p(y) \iff f(x) - f(f^\sharp(y)) = 0 \iff f(x - f^\sharp(y)) = 0.$$

La dernière égalité équivaut à $x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f$. Cette chaîne prouve les deux implications de l'équivalence.

- 7) Soit $y \in E$ fixé. On cherche les vecteurs minimisant l'erreur $\|f(x) - y\|$, puis le vecteur de plus petite norme parmi eux.

- 7) a) Puisque p est le projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$, $p(y) \in \text{Im } f$ et $y - p(y) \in (\text{Im } f)^\perp$. Pour chaque $x \in E$, le vecteur $f(x) - p(y)$ appartient à $\text{Im } f$. Les deux termes de

$$f(x) - y = (f(x) - p(y)) - (y - p(y))$$

sont donc orthogonaux. Le théorème de Pythagore donne

$$\|f(x) - y\|^2 = \|f(x) - p(y)\|^2 + \|y - p(y)\|^2.$$

Le second terme est indépendant de x et le premier est positif ou nul. L'erreur est donc au moins $\|y - p(y)\|$. Cette borne est atteinte : la question 6.a donne $f(f^\sharp(y)) = p(y)$. Par conséquent,

$$\inf_{z \in E} \|f(z) - y\| = \|y - p(y)\|.$$

Dans l'égalité de Pythagore, l'erreur vaut cette borne si et seulement si $\|f(x) - p(y)\|^2 = 0$, c'est-à-dire $f(x) = p(y)$. Par 6.b, cela équivaut à $x - f^\sharp(y) \in \text{Ker } f$. L'équivalence demandée est donc établie, et l'infimum est bien un minimum atteint.

7) b) La question 7.a décrit exactement l'ensemble des minimisateurs : ce sont les vecteurs

$$x = f^\sharp(y) + u, \quad u \in \text{Ker } f.$$

La définition de $f^\sharp$ donne

$$f^\sharp(y) = \sum_{j=1}^k p_j(y)/\lambda_j \in \text{Im } f,$$

d'après 5.c. Par la question 3, $f^\sharp(y)$ est orthogonal à u . Pythagore donne alors

$$\|x\|^2 = \|f^\sharp(y)\|^2 + \|u\|^2 \geq \|f^\sharp(y)\|^2.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $u = 0$. Le vecteur $f^\sharp(y)$ minimise donc l'erreur, et il est l'unique vecteur de plus petite norme parmi les minimisateurs. Si $y = 0$, cette conclusion reste valable : $f^\sharp(0) = 0$ et les autres minimisateurs sont les vecteurs non nuls du noyau, de norme strictement positive.

Partie II : Application à un exemple

1) La matrice A du sujet est symétrique, et la base $\mathcal{B}$ est orthonormale. Le critère matriciel des endomorphismes symétriques assure donc que f est symétrique. La précision sur la base est nécessaire à ce critère.

On a $f(e_1) = 3e_1 - e_3 \neq 0$, donc f n'est pas nul. D'autre part,

$$f(e_2 + e_4) = (e_2 - e_4) + (-e_2 + e_4) = 0.$$

Le vecteur $e_2 + e_4$ est non nul puisque les vecteurs de la base sont indépendants. Le noyau de f est donc non trivial; f n'est pas inversible.

2) Méthode 1 — Construire une base propre explicite.

Les colonnes de A donnent

$$f(e_1) = 3e_1 - e_3, \quad f(e_3) = -e_1 + 3e_3, \quad f(e_2) = e_2 - e_4, \quad f(e_4) = -e_2 + e_4.$$

En additionnant ou en soustrayant,

$$\begin{aligned} f(e_2 + e_4) &= 0, \quad f(e_1 + e_3) = 2(e_1 + e_3), \quad f(e_2 - e_4) = 2(e_2 - e_4), \quad f(e_1 - e_3) \\ &= 4(e_1 - e_3). \end{aligned}$$

Ces quatre vecteurs sont non nuls et deux à deux orthogonaux, puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormale. Ils sont donc indépendants et forment une base de E , dont la dimension vaut 4. La matrice de f dans cette base est diagonale, de diagonale $(0, 2, 2, 4)$.

Il ne peut exister aucune autre valeur propre : si $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, les coordonnées de x dans cette base vérifient $(\nu - \lambda)b = 0$ avec $\nu \in \{0, 2, 4\}$; une coordonnée non nulle impose $\lambda = \nu$. Ainsi

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4.$$

Les espaces propres sont

$$E_f(0) = \text{Vect}(e_2 + e_4), \quad E_f(2) = \text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_4), \quad E_f(4) = \text{Vect}(e_1 - e_3).$$

Méthode 2 — Résoudre le système $AX = \lambda X$.

Écrivons $X = {}^t(a, b, c, d)$. Le système des quatre coordonnées est

$$3a - c = \lambda a, \quad b - d = \lambda b, \quad -a + 3c = \lambda c, \quad -b + d = \lambda d.$$

En additionnant et soustrayant les première et troisième équations, puis les deuxième et quatrième, on obtient le système équivalent

$$(2 - \lambda)(a + c) = 0, \quad (4 - \lambda)(a - c) = 0, \quad \lambda(b + d) = 0, \quad (2 - \lambda)(b - d) = 0.$$

Les opérations sont réversibles, car deux équations initiales se retrouvent en additionnant ou soustrayant les équations transformées puis en divisant par 2. Si $\lambda \notin \{0, 2, 4\}$, les quatre sommes et différences sont nulles, donc $a = b = c = d = 0$: il n'y a aucun vecteur propre.

Pour $\lambda = 0$, le système impose $a = c = 0$ et $b = d$; le noyau associé est $\text{Vect}(e_2 + e_4)$. Pour $\lambda = 2$, il impose $a = c$ et $b = -d$; l'espace propre est $\text{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_4)$. Pour $\lambda = 4$, il impose $a = -c$ et $b = d = 0$; l'espace propre est $\text{Vect}(e_1 - e_3)$.

Chaque espace contient un vecteur non nul ; les trois valeurs sont donc exactement les valeurs propres de f . La première méthode exploite les symétries visibles de la matrice ; la seconde fournit une recherche exhaustive par système linéaire, sans déterminant.

- 3) Les hypothèses de la partie I sont vérifiées par la question 1. Les valeurs propres non nulles sont 2 et 4, et p_1, p_2 sont les projecteurs orthogonaux associés. La question I.5.b donne

$$f = 2p_1 + 4p_2.$$

En prenant les matrices de ces applications dans la même base $\mathcal{B}$, on obtient $A = 2M_1 + 4M_2$.

- 4) a) D'après la question 2, $E_f(\lambda_2) = E_f(4) = \text{Vect}(e_1 - e_3)$. Cet espace est de dimension 1, car $e_1 - e_3 \neq 0$.

Comme $\mathcal{B}$ est orthonormale, $\|e_1 - e_3\|^2 = 1 + 1 = 2$. On peut donc choisir

$$v_2 = \frac{e_1 - e_3}{\sqrt{2}}.$$

Ce vecteur appartient à $E_f(4)$ et sa norme est 1.

- 4) b) Le vecteur v_2 constitue une base orthonormale de $E_f(4)$. La formule du projeté dans une base orthonormale donne $p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle v_2$.

Vérifions directement cette formule : le vecteur $u = \langle x, v_2 \rangle v_2$ appartient à $E_f(4)$ et

$$\langle x - u, v_2 \rangle = \langle x, v_2 \rangle - \langle x, v_2 \rangle \|v_2\|^2 = 0.$$

La différence $x - u$ est donc orthogonale à la droite $E_f(4)$. La caractérisation du projecteur orthogonal assure $p_2(x) = u$ pour tout $x \in E$.

- 4) c) Pour $x = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$, l'orthonormalité donne $\langle x, v_2 \rangle = (a - c)/\sqrt{2}$. Ainsi

$$p_2(x) = \frac{a - c}{2}(e_1 - e_3).$$

En particulier,

$$p_2(e_1) = \frac{e_1 - e_3}{2}, \quad p_2(e_2) = 0, \quad p_2(e_3) = \frac{-e_1 + e_3}{2}, \quad p_2(e_4) = 0.$$

Ces coordonnées forment les colonnes de la matrice cherchée :

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Par définition de l'inverse généralisé et par les valeurs propres calculées,

$$f^\sharp = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_2.$$

La question 3 donne $M_1 = (A - 4M_2)/2$. Explicitement,

$$M_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice B de $f^\sharp$ dans $\mathcal{B}$ vaut donc

$$B = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}M_2.$$

Le calcul coefficient par coefficient donne

$$B = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour vérifier le résultat, le produit matriciel donne

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M_1 + M_2,$$

matrice du projecteur orthogonal sur $\text{Im } f$, conformément à I.6.a. Le produit est un projecteur et non la matrice identité : f est non inversible. Ce contrôle confirme les coefficients de l'inverse généralisé obtenu.

Relevé des adaptations

Aucune adaptation des questions n'est nécessaire. Les deux problèmes sont conservés intégralement et résolus avec les outils du référentiel fourni.