



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2002

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PREMIER PROBLÈME

On note, pour tout entier $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{1}{p} - \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt,$$

et, pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_n = \sum_{p=1}^n u_p = u_1 + \cdots + u_n.$$

PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer, pour tout entier $p \geq 1$:

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est croissante et converge vers un réel, noté γ , tel que $0 \leq \gamma \leq 1$.

PARTIE II : Expression intégrale du réel γ

1. a. Établir, pour tout réel x : $1 + x \leq e^x$.

1. b. En déduire, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t},$$

puis :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

2. a. Établir, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $x \in [0, 1]$:

$$(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0.$$

2. b. En utilisant 1.b et 2.a, montrer, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel t tel que $0 \leq t \leq n$:

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

3. a. On note, pour tout entier $n \geq 1$:

$$I_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right) dt.$$

Justifier l'existence de I_n .

3. b. Établir que I_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

4. a. Établir, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1)).$$

4. b. On note, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = \int_0^n \frac{1}{t} \left(1 - \left(1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) dt.$$

Justifier l'existence de J_n et montrer, pour tout entier $n \geq 1$:

$$J_n = a_n + \ln(n+1).$$

5. On note :

$$U = \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad V = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

5. a. Justifier l'existence de U et de V .

5. b. Démontrer : $\gamma = U - V$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

L'objectif du problème est d'étudier les endomorphismes u de E tels que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x \rangle = 0.$$

Les endomorphismes vérifiant cette propriété sont appelés endomorphismes antisymétriques.

PARTIE I : Étude d'un exemple

Dans cette partie, E est l'espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $(1, X, X^2)$ est une base de E .

On considère l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1).$$

1. Vérifier que φ est un produit scalaire.

Dans cette première partie, on considère que E est muni de ce produit scalaire.

2. On considère l'endomorphisme u de E défini, pour tout $P \in E$, par :

$$u(P) = 2P'(0)X^2 - (P(1) + P(-1))X.$$

2. a. Vérifier : $\forall P \in E, \quad 2P'(0) - P(1) + P(-1) = 0$.
2. b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E .
3. Soient $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ et $P_2 = \frac{1}{2}u(P_1)$.
 3. a. Vérifier que P_1 est un vecteur propre de u^2 et que la famille (P_1, P_2) est orthonormale.
 3. b. Déterminer une base de $\text{Ker } u$.
 3. c. Déterminer une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un nombre réel a tels que la matrice associée à u relativement à cette base soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme de E .

1. Pour tout couple $(x, y) \in E^2$, développer $\langle u(x + y), x + y \rangle$.

En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

2. On suppose dans cette question que la dimension n de E est non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. a. Montrer : $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.
2. b. En déduire que u est un endomorphisme antisymétrique si et seulement si la matrice M associée à u relativement à la base $\mathcal{B}$ vérifie ${}^tM = -M$.

PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

Soit u un endomorphisme antisymétrique non nul de E .

On pourra utiliser la caractérisation obtenue dans la question II.1.

1. Soit λ un nombre réel. Montrer que, si λ est une valeur propre de u , alors $\lambda = 0$.
2. Montrer que $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont orthogonaux et supplémentaires dans E . En déduire que $\text{Ker } u = \text{Ker}(u^2)$.
3. Montrer que u^2 est un endomorphisme symétrique de E et que toute valeur propre de u^2 est négative ou nulle.
4. a. Montrer que u^2 admet au moins une valeur propre non nulle.

Soient x un vecteur propre de u^2 associé à une valeur propre non nulle et F le sous-espace vectoriel de E engendré par $(x, u(x))$.

4. b. Montrer que F est un plan vectoriel stable par u .
4. c. Montrer que $F^\perp$, le supplémentaire orthogonal de F , est stable par u .
4. d. On munit $F^\perp$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ défini, pour tout couple (x, y) d'éléments de $F^\perp$, par $\langle x, y \rangle_1 = \langle x, y \rangle$.

On définit l'endomorphisme u_1 de $F^\perp$ par : $\forall x \in F^\perp, \quad u_1(x) = u(x)$.

Montrer que u_1 est un endomorphisme antisymétrique de $F^\perp$ et que $\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1$.

5. Montrer que le rang d'un endomorphisme antisymétrique est pair. On pourra faire une récurrence sur la dimension de E .

PARTIE IV : Application

Dans cette partie, E est un espace vectoriel euclidien de dimension 4 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base orthonormale de E .

Soit u l'endomorphisme de E associé, relativement à la base $\mathcal{B}$, à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme antisymétrique de E .

Vérifier que le vecteur $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$ est un vecteur propre de u^2 .

2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(f_1, u(f_1))$. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^\perp$.
3. En déduire une base orthonormale $\mathcal{B}_0$ de E et deux nombres réels a et b tels que la matrice associée à u relativement à $\mathcal{B}_0$ soit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}.$$