



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EM Lyon**

**Mathématiques 1**

**2002**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## PREMIER PROBLÈME

### PARTIE I : Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$

---

1. On compare l'intégrale avec les valeurs aux extrémités de l'intervalle. Pour  $p \geq 1$  et  $t \in [p, p+1]$ , on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}.$$

La fonction intégrée est continue sur ce segment, et sa longueur vaut 1. La croissance de l'intégrale donne :

$$\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{p}.$$

En soustrayant l'intégrale à  $\frac{1}{p}$ , on obtient exactement :

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

2. Pour  $n \geq 1$ , la définition donne  $a_{n+1} - a_n = u_{n+1} \geq 0$ . La suite est donc croissante. Par sommation de l'encadrement précédent :

$$0 \leq a_n \leq \sum_{p=1}^n \left( \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

La somme est télescopique. La suite est croissante et majorée ; le théorème de la limite monotone assure sa convergence vers un réel  $\gamma$ . En passant à la limite dans  $0 \leq a_n \leq 1$ , on conclut :

$$0 \leq \gamma \leq 1.$$

## PARTIE II : Expression intégrale du réel $\gamma$

---

### 1. a. Méthode 1 — Étude d'une différence

Posons  $h(x) = e^x - 1 - x$ . Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $h'(x) = e^x - 1$ . Sa dérivée est négative pour  $x < 0$ , nulle pour  $x = 0$  et positive pour  $x > 0$ . Ainsi,  $h$  atteint son minimum global en 0, avec  $h(0) = 0$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :

$$e^x - 1 - x \geq 0, \quad \text{soit} \quad 1 + x \leq e^x.$$

### Méthode 2 — Tangente à une fonction convexe

---

L'exponentielle est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  et sa dérivée seconde est  $e^x > 0$ ; elle est donc convexe. Une fonction convexe dérivable est au-dessus de chacune de ses tangentes. La tangente à l'exponentielle en 0 a pour équation  $y = e^0 + e^0 x = 1 + x$ . On obtient donc  $e^x \geq 1 + x$  pour tout réel  $x$ .

L'étude de la différence est une preuve directe par variations; la convexité permet de reconnaître une inégalité de tangente.

1. b. Fixons  $n \geq 1$  et  $t \in [0, n]$ . La question II.1.a appliquée à  $\frac{t}{n}$  donne  $1 + \frac{t}{n} \leq e^{t/n}$ .  
Les deux membres sont positifs; l'élévation à la puissance entière  $n$  conserve l'ordre :

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t.$$

Appliquée à  $-\frac{t}{n}$ , la même question donne  $1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n}$ . Ici  $1 - \frac{t}{n} \geq 0$ , ce qui permet encore de prendre la puissance  $n$  :

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Pour l'autre borne, on multiplie la première inégalité par le nombre positif ou nul  $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ . Il vient :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n e^t.$$

En multipliant par  $e^{-t} > 0$ , puis en utilisant la seconde inégalité :

$$\left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n e^{-t} \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

La preuve reste valable aux bornes  $t = 0$  et  $t = n$  ; aucune division par  $1 - \frac{t}{n}$  n'a été effectuée.

## 2. a. Méthode 1 — Récurrence

Fixons  $x \in [0, 1]$ . Pour  $n = 1$ ,  $(1 - x)^1 = 1 - x$ , donc l'inégalité est une égalité.

Supposons  $(1 - x)^n \geq 1 - nx$  pour un entier  $n \geq 1$ . Comme  $1 - x \geq 0$ , on peut multiplier par ce nombre, même si  $1 - nx$  est négatif :

$$(1 - x)^{n+1} \geq (1 - nx)(1 - x) = 1 - (n + 1)x + nx^2 \geq 1 - (n + 1)x.$$

La récurrence établit  $(1 - x)^n + nx - 1 \geq 0$  pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in [0, 1]$ .

## Méthode 2 — Monotonie d'un polynôme

Pour  $n = 1$ , l'expression vaut identiquement 0. Pour  $n \geq 2$ , posons

$q_n(x) = (1 - x)^n + nx - 1$  sur  $[0, 1]$ . Sa dérivée vaut :

$$q'_n(x) = n(1 - (1 - x)^{n-1}) \geq 0,$$

car  $0 \leq 1 - x \leq 1$ . Le polynôme  $q_n$  est donc croissant sur  $[0, 1]$  et  $q_n(0) = 0$ . Ainsi  $q_n(x) \geq 0$  sur cet intervalle.

La récurrence illustre une inégalité sur les puissances entières ; l'étude du polynôme permet une preuve rapide à entier  $n$  fixé.

2. b. D'après II.1.b, la différence  $e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$  est positive ou nulle. L'autre borne de II.1.b donne :

$$e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t} \left(1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n\right).$$

Puisque  $0 \leq t \leq n$ , le nombre  $x = \frac{t^2}{n^2}$  appartient à  $[0, 1]$ . La question II.2.a implique :

$$1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \leq n \frac{t^2}{n^2} = \frac{t^2}{n}.$$

On multiplie cette inégalité par  $e^{-t} > 0$ , d'où :

$$0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}.$$

3. a. Pour  $n \geq 1$  fixé, l'intégrande est continue sur  $]0, n]$ . Pour  $t \in ]0, n]$ , II.2.b permet de diviser par  $t > 0$  :

$$0 \leq \frac{1}{t} \left( e^{-t} - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) \leq \frac{t}{n} e^{-t}.$$

La majorante est continue sur  $[0, n]$  et donc intégrable. Par comparaison, l'intégrale impropre converge en 0. On peut également constater par encadrement que l'intégrande tend vers 0 en 0 ; son prolongement par la valeur 0 est continu. Ainsi  $I_n$  existe et  $I_n \geq 0$ .

3. b. En intégrant l'inégalité précédente :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n} \int_0^n t e^{-t} dt.$$

La fonction  $t \mapsto -(t+1)e^{-t}$  est une primitive de  $t e^{-t}$ . Donc :

$$\int_0^n t e^{-t} dt = 1 - (n+1)e^{-n} \leq 1.$$

On obtient  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}$ , puis  $I_n \rightarrow 0$  par le théorème d'encadrement.

4. a. Pour  $0 \leq k \leq n-1$ , la fonction intégrée est un polynôme sur  $[0, n]$ . Une primitive donne :

$$\int_0^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^k dt = \left[ -\frac{n}{k+1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^{k+1} \right]_0^n = \frac{n}{k+1}.$$

La somme demandée vaut donc

$$n \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

en posant  $p = k + 1$ .

D'autre part, par la définition de  $a_n$  et la relation de Chasles appliquée à une somme finie d'intégrales :

$$a_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \sum_{p=1}^n \int_p^{p+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln(n+1).$$

Ainsi

$$\sum_{p=1}^n \frac{1}{p} = a_n + \ln(n+1)$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^k dt = n(a_n + \ln(n+1)).$$

4. b. Pour  $t \in ]0, n]$ , posons  $q = 1 - \frac{t}{n}$ . La formule de la somme géométrique finie donne

$$1 - q^n = (1 - q) \sum_{k=0}^{n-1} q^k.$$

Comme  $1 - q = \frac{t}{n}$ , on en déduit :

$$\frac{1}{t} \left( 1 - \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^n \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^k.$$

Le membre de droite est un polynôme en  $t$ , défini et continu sur  $[0, n]$ , dont la valeur en 0 vaut 1. Il donne donc un prolongement continu de l'intégrande en 0, ce qui justifie l'existence de  $J_n$ .

En intégrant cette identité, avec seulement une somme finie, puis en utilisant II.4.a :

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^n \left( 1 - \frac{t}{n} \right)^k dt = a_n + \ln(n+1).$$

5. a. La fonction  $t \mapsto \frac{1 - e^{-t}}{t}$  est continue sur  $]0, 1]$ . La dérivabilité de l'exponentielle en 0 donne :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t}}{t} = 1.$$

Elle se prolonge donc continûment en 0 par la valeur 1. L'intégrale  $U$  existe.

Pour  $t \geq 1$ , on a  $0 \leq \frac{e^{-t}}{t} \leq e^{-t}$ . Or :

$$\int_1^R e^{-t} dt = e^{-1} - e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} e^{-1}.$$

Par comparaison d'intégrales de fonctions positives,  $V$  existe également.

5. b. Pour  $n \geq 1$ , les intégrales  $J_n$  et  $I_n$  sont convergentes. On soustrait leurs intégrandes sur  $[\varepsilon, n]$ , puis on fait tendre  $\varepsilon$  vers 0. Cela donne :

$$J_n - I_n = \int_0^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt.$$

La fonction intégrée se prolonge continûment en 0, comme en II.5.a. Par Chasles en 1 :

$$J_n - I_n = U + \int_1^n \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = U + \ln n - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Cette formule couvre  $n = 1$ , où les intégrales de 1 à 1 sont nulles. En utilisant

$J_n = a_n + \ln(n + 1)$ , on obtient :

$$a_n = I_n + U - \int_1^n \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

Chaque terme possède une limite :  $a_n \rightarrow \gamma$  par I.2,  $I_n \rightarrow 0$  par II.3.b, l'intégrale de 1 à  $n$  tend vers  $V$  par définition de cette intégrale impropre, et  $\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \rightarrow \ln 1 = 0$  par continuité du logarithme. D'où :

$$\gamma = U - V.$$

Aucun échange d'une limite avec une intégrale n'a été supposé : les intégrales à borne supérieure variable ont été traitées par leur définition et une majoration explicite.

## DEUXIÈME PROBLÈME

### PARTIE I : Étude d'un exemple

---

1. On vérifie les propriétés d'une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour  $P, Q, R \in E$  et  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , chaque évaluation est linéaire, donc :

$$\varphi(\alpha P + \beta Q, R) = \alpha \varphi(P, R) + \beta \varphi(Q, R).$$

La même propriété vaut dans la seconde variable. De plus, la commutativité du produit réel donne  $\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ .

Enfin :

$$\varphi(P, P) = P(0)^2 + P(1)^2 + P(-1)^2 \geq 0.$$

Si cette quantité vaut 0, chacun des trois carrés est nul, donc  $P$  s'annule en  $-1, 0$  et  $1$ . Un polynôme non nul de degré au plus 2 ne peut pas avoir trois racines distinctes. Ainsi  $P = 0$ . Réciproquement,  $\varphi(0, 0) = 0$ . La forme est donc définie positive, et  $\varphi$  est bien un produit scalaire sur  $E$ .

2. a. Écrivons  $P = a + bX + cX^2$ , avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$P'(0) = b, \quad P(1) = a + b + c, \quad P(-1) = a - b + c.$$

Par substitution :

$$2P'(0) - P(1) + P(-1) = 2b - (a + b + c) + (a - b + c) = 0.$$

L'identité est donc vraie pour tout  $P \in E$ .

2. b. La formule définissant  $u$  est linéaire en  $P$  : la dérivation, les évaluations et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires. De plus,  $u(P)$  est de degré au plus 2, donc appartient à  $E$ . Il s'agit bien d'un endomorphisme de  $E$ .

On calcule le produit scalaire  $\varphi(u(P), P)$ . Les évaluations de  $u(P)$  sont :

$$\begin{aligned} u(P)(0) &= 0, & u(P)(1) &= 2P'(0) - P(1) - P(-1), & u(P)(-1) &= 2P'(0) + P(1) \\ & & & & & + P(-1). \end{aligned}$$

D'après I.2.a,  $2P'(0) = P(1) - P(-1)$ , donc :

$$u(P)(1) = -2P(-1), \quad u(P)(-1) = 2P(1).$$

Par conséquent :

$$\varphi(u(P), P) = 0 \cdot P(0) - 2P(-1)P(1) + 2P(1)P(-1) = 0.$$

Cela vaut pour tout  $P \in E$ ;  $u$  est donc antisymétrique pour le produit scalaire  $\varphi$ .

3. a. Pour  $P = a + bX + cX^2$ , la formule de  $u$  s'écrit :

$$u(P) = 2bX^2 - 2(a + c)X.$$

Pour  $P_1 = \frac{1}{2}(X^2 + X)$ , on obtient :

$$u(P_1) = X^2 - X, \quad P_2 = \frac{1}{2}(X^2 - X).$$

En appliquant encore  $u$  :

$$u(P_2) = -X^2 - X = -2P_1, \quad u^2(P_1) = u(2P_2) = -4P_1.$$

Le polynôme  $P_1$  est non nul; c'est donc un vecteur propre de  $u^2$  associé à  $-4$ .

Pour vérifier l'orthonormalité, on utilise les valeurs aux points définissant le produit scalaire :

| Polynôme | Valeur en 0 | Valeur en 1 | Valeur en $-1$ |
|----------|-------------|-------------|----------------|
| $P_1$    | 0           | 1           | 0              |
| $P_2$    | 0           | 0           | 1              |

Ainsi  $\varphi(P_1, P_1) = 1$ ,  $\varphi(P_2, P_2) = 1$  et  $\varphi(P_1, P_2) = 0$ . La famille  $(P_1, P_2)$  est orthonormale.

3. b. La formule obtenue pour  $u(P)$  et l'indépendance de  $X$  et  $X^2$  donnent :

$$u(P) = 0 \iff b = 0 \text{ et } a + c = 0.$$

Ainsi  $P = a(1 - X^2)$  et :

$$\text{Ker } u = \text{Vect}(1 - X^2).$$

Le polynôme  $1 - X^2$  est non nul ; la famille constituée de ce seul polynôme est une base du noyau.

3. c. Posons  $P_3 = 1 - X^2$ . Ses valeurs en 0, 1 et  $-1$  sont respectivement 1, 0 et 0. Avec le tableau de I.3.a, on obtient :

$$\varphi(P_3, P_3) = 1, \quad \varphi(P_3, P_1) = \varphi(P_3, P_2) = 0.$$

La famille  $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$  est donc orthonormale. Elle contient trois vecteurs dans l'espace  $E$  de dimension 3 ; c'est une base orthonormale.

On a  $u(P_1) = 2P_2$ ,  $u(P_2) = -2P_1$  et  $u(P_3) = 0$ . Les colonnes de la matrice sont leurs coordonnées dans  $\mathcal{B}$ , d'où :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une réponse est donc  $\mathcal{B} = (\frac{1}{2}(X^2 + X), \frac{1}{2}(X^2 - X), 1 - X^2)$  et  $a = 2$ .

## PARTIE II : Caractérisations des endomorphismes antisymétriques

---

1. Pour tous  $x, y \in E$ , la linéarité de  $u$  et la bilinéarité du produit scalaire donnent :

$$\langle u(x + y), x + y \rangle = \langle u(x), x \rangle + \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle + \langle u(y), y \rangle.$$

Supposons  $u$  antisymétrique. Le membre de gauche et les premier et dernier termes du membre de droite sont nuls. Il reste donc  $\langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle = 0$ . Par symétrie du produit scalaire :

$$\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle.$$

Réciproquement, supposons cette identité vraie pour tous  $x, y \in E$ . En prenant  $y = x$ , puis en utilisant la symétrie :

$$\langle u(x), x \rangle = -\langle x, u(x) \rangle = -\langle u(x), x \rangle.$$

Donc  $2\langle u(x), x \rangle = 0$  pour tout  $x$ , ce qui donne l'antisymétrie. Les deux implications prouvent l'équivalence demandée.

2. a. Par définition de la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$ , la colonne  $j$  contient les coordonnées de  $u(e_j)$  :

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^n m_{k,j} e_k.$$

Comme la base est orthonormale,  $\langle e_i, e_k \rangle$  vaut 1 si  $i = k$  et 0 sinon. Ainsi :

$$\langle e_i, u(e_j) \rangle = \sum_{k=1}^n m_{k,j} \langle e_i, e_k \rangle = m_{i,j}.$$

2. b. Méthode 1 — Application de la caractérisation aux vecteurs de base

Si  $u$  est antisymétrique, II.1 donne, pour tous  $i, j$  :

$$m_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle = -\langle u(e_i), e_j \rangle = -\langle e_j, u(e_i) \rangle = -m_{j,i}.$$

Cela signifie exactement  ${}^tM = -M$ .

Réciproquement, supposons  $m_{i,j} = -m_{j,i}$  pour tous  $i, j$ . Écrivons

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$$

et

$$y = \sum_{i=1}^n y_i e_i.$$

Par bilinéarité et II.2.a :

$$\langle u(x), y \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_j y_i m_{i,j} = - \sum_{i,j=1}^n x_j y_i m_{j,i} = -\langle x, u(y) \rangle.$$

La caractérisation II.1 montre alors que  $u$  est antisymétrique.

## Méthode 2 — Forme quadratique en coordonnées

---

Soit  $X$  la colonne des coordonnées de  $x$  dans la base orthonormale. La formule du produit scalaire en base orthonormale donne  $\langle u(x), x \rangle = {}^tXMX$ .

Si  ${}^tM = -M$ , le nombre réel  $s = {}^tXMX$ , vu comme une matrice à un coefficient, est égal à sa transposée. Donc :

$$s = {}^t({}^tXMX) = {}^tX{}^tMX = -{}^tXMX = -s.$$

Ainsi  $s = 0$  pour tout  $X$ , ce qui prouve l'antisymétrie.

Réciproquement, supposons  ${}^tXMX = 0$  pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$ . En prenant  $X$  égal au vecteur de coordonnées de  $e_i$ , on obtient  $m_{i,i} = 0$ . Pour  $i \neq j$ , en prenant  $X$  égal au vecteur de coordonnées de  $e_i + e_j$ , on obtient :

$$0 = m_{i,i} + m_{i,j} + m_{j,i} + m_{j,j} = m_{i,j} + m_{j,i}.$$

Les égalités obtenues, sur la diagonale et hors diagonale, donnent  ${}^tM = -M$ . La première méthode utilise les produits scalaires de deux vecteurs ; la seconde reconnaît la condition par les valeurs de la forme quadratique associée.

## PARTIE III : Propriétés générales des endomorphismes antisymétriques

---

1. Supposons que  $\lambda \in \mathbb{R}$  soit une valeur propre de  $u$ . Il existe alors  $x \in E$ ,  $x \neq 0$ , tel que  $u(x) = \lambda x$ .

L'antisymétrie et la bilinéarité donnent :

$$0 = \langle u(x), x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda \|x\|^2.$$

Comme  $x \neq 0$ ,  $\|x\|^2 > 0$ . On peut donc diviser par cette quantité et conclure  $\lambda = 0$ .

La conclusion signifie que toute valeur propre réelle éventuelle est nulle ; elle ne suppose pas que 0 soit nécessairement une valeur propre.

2. Soient  $z \in \text{Im } u$  et  $y \in \text{Ker } u$ . Il existe  $x \in E$  tel que  $z = u(x)$ . La caractérisation II.1 donne :

$$\langle z, y \rangle = \langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle = 0.$$

Les deux sous-espaces sont donc orthogonaux. Si  $v$  appartient à leur intersection, il est orthogonal à lui-même, donc  $\|v\|^2 = 0$  et  $v = 0$ . La somme est ainsi directe. Le théorème du rang donne :

$$\dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = \dim E.$$

La somme directe a donc la dimension de  $E$ , ce qui montre :

$$E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u.$$

## Méthode 1 — Noyau du carré à partir de la somme directe

L'inclusion  $\text{Ker } u \subset \text{Ker}(u^2)$  est immédiate par composition : si  $u(x) = 0$ , alors  $u^2(x) = 0$ .

Si  $x \in \text{Ker}(u^2)$ , le vecteur  $u(x)$  appartient à  $\text{Ker } u$  et, par sa forme, à  $\text{Im } u$ . L'intersection étant réduite à  $\{0\}$ , on obtient  $u(x) = 0$ , donc  $x \in \text{Ker } u$ . Ainsi  $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker } u$ .

## Méthode 2 — Noyau du carré à partir d'une norme

Pour tout  $x \in E$ , la caractérisation II.1 appliquée à  $x$  et  $u(x)$  donne :

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x), u(x) \rangle = -\langle x, u^2(x) \rangle.$$

Si  $u^2(x) = 0$ , alors  $\|u(x)\|^2 = 0$ , donc  $u(x) = 0$ . L'inclusion inverse découle encore de la composition. On retrouve donc  $\text{Ker}(u^2) = \text{Ker } u$ .

La première méthode répond à l'instruction de déduire l'égalité de la décomposition orthogonale; la seconde fournit une identité de norme utile également pour étudier les valeurs propres de  $u^2$ .

3. Pour  $x, y \in E$ , on applique deux fois II.1 :

$$\langle u^2(x), y \rangle = -\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, u^2(y) \rangle.$$

Cette identité est la définition d'un endomorphisme symétrique. Ainsi  $u^2$  est symétrique.

Soit  $\mu$  une valeur propre de  $u^2$  et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé. On a  $u^2(x) = \mu x$ , puis :

$$\mu \|x\|^2 = \langle u^2(x), x \rangle = -\|u(x)\|^2 \leq 0.$$

Puisque  $\|x\|^2 > 0$ , on conclut  $\mu \leq 0$ . Toutes les valeurs propres de  $u^2$  sont donc négatives ou nulles. Le théorème spectral s'applique à  $u^2$ , endomorphisme symétrique d'un espace euclidien réel de dimension finie, et garantit l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres réels.

4. a. Comme  $u \neq 0$ , il existe  $z \in E$  tel que  $u(z) \neq 0$ . L'identité de norme utilisée dans III.3 donne :

$$\langle u^2(z), z \rangle = -\|u(z)\|^2 < 0.$$

En particulier,  $u^2 \neq 0$ . Par III.3 et le théorème spectral,  $u^2$  est diagonalisable dans une base orthonormale. Si toutes ses valeurs propres étaient nulles, il serait nul sur chaque vecteur de cette base, donc serait l'endomorphisme nul, contradiction.

Ainsi,  $u^2$  admet au moins une valeur propre non nulle ; par III.3, cette valeur propre est strictement négative.

Pour la suite, on note  $\mu < 0$  une telle valeur propre et  $x \neq 0$  un vecteur propre associé, de sorte que  $u^2(x) = \mu x$ .

4. b. D'abord,  $u(x) \neq 0$  : sinon  $u^2(x) = 0$ , alors que  $\mu x \neq 0$ . Par antisymétrie,  $\langle u(x), x \rangle = 0$ . Les deux vecteurs  $x$  et  $u(x)$  sont donc non nuls et orthogonaux, ce qui implique qu'ils sont libres. Ainsi :

$$F = \text{Vect}(x, u(x)), \quad \dim F = 2.$$

Pour  $z = \alpha x + \beta u(x) \in F$ , la linéarité et l'égalité  $u^2(x) = \mu x$  donnent :

$$u(z) = \alpha u(x) + \beta \mu x \in F.$$

Donc  $F$  est un plan vectoriel stable par  $u$ .

4. c. Soit  $y \in F^\perp$ . Pour tout  $z \in F$ , la caractérisation II.1 donne :

$$\langle u(y), z \rangle = -\langle y, u(z) \rangle.$$

La stabilité de  $F$  établie en III.4.b assure  $u(z) \in F$ . Comme  $y \in F^\perp$ , le membre de droite est nul. Ainsi  $u(y)$  est orthogonal à tout  $z \in F$ , donc  $u(y) \in F^\perp$ . Le sous-espace  $F^\perp$  est stable par  $u$ .

4. d. La restriction du produit scalaire de  $E$  à  $F^\perp$  est bilinéaire, symétrique et définie positive ; elle munit ce sous-espace d'une structure euclidienne. Par III.4.c, la restriction  $u_1$  est bien une application linéaire de  $F^\perp$  vers lui-même.

Pour tout  $y \in F^\perp$  :

$$\langle u_1(y), y \rangle_1 = \langle u(y), y \rangle = 0.$$

L'endomorphisme  $u_1$  est donc antisymétrique.

Pour l'image, on utilise la décomposition orthogonale  $E = F \oplus F^\perp$ . La linéarité donne  $\text{Im } u = u(F) + u(F^\perp)$ . On sait  $u(F^\perp) = \text{Im } u_1$ .

De plus,  $u(x)$  appartient à  $u(F)$  et  $u(u(x)) = \mu x$  appartient à  $u(F)$ . Comme  $\mu \neq 0$ , ces deux relations montrent que les deux générateurs  $x$  et  $u(x)$  de  $F$  appartiennent à  $u(F)$ . Avec la stabilité  $u(F) \subset F$ , on obtient  $u(F) = F$ .

Enfin,  $\text{Im } u_1 \subset F^\perp$ , donc  $F \cap \text{Im } u_1 = \{0\}$ . Par conséquent :

$$\text{Im } u = F \oplus \text{Im } u_1.$$

5. On démontre par récurrence forte sur  $n \in \mathbb{N}$  la propriété : tout endomorphisme antisymétrique d'un espace euclidien réel de dimension  $n$  a un rang pair.  
L'endomorphisme nul est inclus dans la propriété.

Pour  $n = 0$ , seul l'endomorphisme nul existe et son rang vaut 0.

Pour  $n = 1$ , prenons un vecteur unitaire  $e$  formant une base. Tout endomorphisme s'écrit  $u(e) = \alpha e$ . L'antisymétrie impose  $0 = \langle u(e), e \rangle = \alpha$ , donc  $u = 0$  et son rang vaut 0.

Supposons la propriété vraie dans toutes les dimensions strictement inférieures à un entier  $n \geq 2$ , et soit  $u$  antisymétrique sur un espace euclidien de dimension  $n$ .

Si  $u = 0$ , son rang est 0, donc pair. Si  $u \neq 0$ , III.4 fournit un plan  $F$  et un endomorphisme antisymétrique  $u_1$  de  $F^\perp$  tels que :

$$\operatorname{Im} u = F \oplus \operatorname{Im} u_1, \quad \dim F^\perp = n - 2.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à  $u_1$ , y compris s'il est nul. Son rang est donc pair. En prenant les dimensions de la somme directe :

$$\operatorname{rg} u = 2 + \operatorname{rg} u_1.$$

Cette somme est paire. La récurrence forte établit le résultat dans toute dimension finie.

## PARTIE IV : Application

---

1. La matrice donnée vérifie  ${}^tA = -A$  : ses coefficients diagonaux sont nuls et les deux coefficients de chaque paire de positions symétriques sont opposés. Comme  $\mathcal{B}$  est une base orthonormale, la caractérisation II.2.b assure que  $u$  est antisymétrique.

Le vecteur  $f_1 = e_1 + e_2 - e_3$  a pour colonne de coordonnées  $F_1 = {}^t(1, 1, -1, 0)$ . En multipliant par  $A$ , on obtient :

$$AF_1 = \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ -4 + 1 \\ -1 + 1 \\ 1 + 1 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en posant  $g = e_1 - e_2 - e_4$ ,  $u(f_1) = 3g$ . Pour vérifier le carré, on calcule :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 1 \\ -4 + 1 \\ -1 - 1 + 5 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -3F_1.$$

Donc  $u(g) = -3f_1$  et  $u^2(f_1) = 3u(g) = -9f_1$ . Le vecteur  $f_1$  est non nul ; il est bien un vecteur propre de  $u^2$ , associé à la valeur propre  $-9$ .

2. La base initiale étant orthonormale, les produits scalaires se calculent par produits des coordonnées. On a :

$$\|f_1\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \|g\|^2 = 1 + 1 + 1 = 3, \quad \langle f_1, g \rangle = 1 - 1 = 0.$$

Comme  $u(f_1) = 3g$ , le plan demandé est  $F = \text{Vect}(f_1, g)$ . Une base orthonormale de  $F$  est donc :

$$h_1 = \frac{e_1 + e_2 - e_3}{\sqrt{3}}, \quad h_2 = \frac{e_1 - e_2 - e_4}{\sqrt{3}}.$$

Pour construire une base orthonormale de  $F^\perp$ , on résout les deux conditions d'orthogonalité. Un vecteur  $z = z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3 + z_4e_4$  appartient à  $F^\perp$  si et seulement si :

$$z_1 + z_2 - z_3 = 0, \quad z_1 - z_2 - z_4 = 0.$$

Cela équivaut à  $z_3 = z_1 + z_2$  et  $z_4 = z_1 - z_2$ . Ainsi :

$$z = z_1(e_1 + e_3 + e_4) + z_2(e_2 + e_3 - e_4).$$

Posons  $r = e_1 + e_3 + e_4$  et  $s = e_2 + e_3 - e_4$ . Les deux vecteurs sont libres, car leurs deux premières coordonnées distinguent leurs coefficients dans une combinaison linéaire nulle. Ils engendrent  $F^\perp$  et vérifient :

$$\|r\|^2 = 3, \quad \|s\|^2 = 3, \quad \langle r, s \rangle = 1 - 1 = 0.$$

On choisit donc la base orthonormale suivante de  $F^\perp$ , dans cet ordre :

$$h_3 = \frac{s}{\sqrt{3}} = \frac{e_2 + e_3 - e_4}{\sqrt{3}}, \quad h_4 = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{e_1 + e_3 + e_4}{\sqrt{3}}.$$

Ces choix sont construits directement par résolution des équations d'orthogonalité et normalisation de vecteurs déjà orthogonaux.

**3.** La famille  $\mathcal{B}_0 = (h_1, h_2, h_3, h_4)$  réunit une base orthonormale de  $F$  et une base orthonormale de  $F^\perp$ . Comme  $E = F \oplus F^\perp$ , elle est une base orthonormale de  $E$ .

La question IV.1 donne immédiatement :

$$u(h_1) = 3h_2, \quad u(h_2) = -3h_1.$$

Il reste à calculer l'action sur les deux autres vecteurs. Pour  $s$  et  $r$ , les multiplications donnent :

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 1 + 1 \\ -1 + 1 \\ 1 + 5 \\ 1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -4 - 1 - 1 \\ -1 - 5 \\ 1 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi  $u(s) = 6r$ ,  $u(r) = -6s$ , donc :

$$u(h_3) = 6h_4, \quad u(h_4) = -6h_3.$$

En écrivant les coordonnées des images dans les colonnes, on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Une réponse est donc :

$$\mathcal{B}_0 = \left( \frac{e_1 + e_2 - e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_1 - e_2 - e_4}{\sqrt{3}}, \frac{e_2 + e_3 - e_4}{\sqrt{3}}, \frac{e_1 + e_3 + e_4}{\sqrt{3}} \right), \quad a = 3, \quad b = 6.$$

## Relevé des adaptations

---

Aucune adaptation mathématique nécessaire.