



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

2001

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

On pose $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Si $t \in I$, alors $t^2 \in [0, \frac{1}{4}] \subset I$: toutes les évaluations $f_n(t^2)$ sont donc définies. Les intégrales de 0 à un réel négatif sont prises avec leur orientation usuelle.

1. a. Caractère polynomial des fonctions f_n .

Raisonnons par récurrence sur n . La fonction $f_0 = 1$ est la restriction à I d'un polynôme constant.

Supposons que f_n soit la restriction d'un polynôme P_n . La fonction $t \mapsto P_n(t) + P_n(t^2)$ est polynomiale. Si

$$P_n(t) + P_n(t^2) = \sum_{k=0}^r b_k t^k,$$

alors

$$f_{n+1}(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^r \frac{b_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Cette expression est polynomiale en x . L'hérédité est établie, donc f_n est une application polynomiale pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, elle est continue sur I , et toutes les intégrales définissant la suite existent.

b. Calcul des premiers termes.

Puisque $f_0(t) = f_0(t^2) = 1$,

$$f_1(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x 2 dt = 1 + x.$$

On a ensuite $f_1(t) + f_1(t^2) = 2 + t + t^2$, d'où

$$f_2(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (2 + t + t^2) dt = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6}.$$

Pour le troisième terme,

$$f_2(t) = 1 + t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6}, \quad f_2(t^2) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6}.$$

Ainsi $f_2(t) + f_2(t^2) = 2 + t + \frac{5}{4}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{6}t^6$. En intégrant terme à terme cette somme finie,

$$f_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^3}{24} + \frac{x^4}{48} + \frac{x^5}{40} + \frac{x^7}{84}.$$

Ces égalités sont valables pour tout $x \in I$, positif ou négatif.

2. a. Calcul de D_1 et D_2 .

La fonction $|f_n - f_{n-1}|$ est continue sur le segment I . Elle y atteint donc son maximum, qui est égal au supremum D_n .

Comme $f_1(x) - f_0(x) = x$, on a $D_1 = \max_{x \in I} |x| = 1/2$.

Pour le second terme, posons $h(x) = f_2(x) - f_1(x) = x^2(1/4 + x/6)$. Sur I , $1/6 \leq 1/4 + x/6 \leq 1/3$, donc $h(x) \geq 0$ et $|f_2(x) - f_1(x)| = h(x)$.

Méthode 1 — Majoration atteinte.

Sur I , $x^2 \leq 1/4$ et $1/4 + x/6 \leq 1/3$. Les deux facteurs étant positifs ou nuls,

$$0 \leq h(x) \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Pour $x = 1/2$, les deux bornes supérieures sont atteintes et $h(1/2) = 1/12$. Donc $D_2 = 1/12$.

Méthode 2 — Étude des variations.

La dérivée est $h'(x) = x/2 + x^2/2 = x(1+x)/2$. Sur I , $1+x > 0$; le signe de h' est donc celui de x . Ainsi h décroît sur $[-1/2, 0]$ et croît sur $[0, 1/2]$. Son maximum est l'une de ses valeurs aux extrémités :

$$h(-1/2) = \frac{1}{16} - \frac{1}{48} = \frac{1}{24}, \quad h(1/2) = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{1}{12}.$$

Donc, à nouveau, $D_2 = 1/12$. La première méthode utilise une majoration simultanément atteinte; la seconde fournit les variations complètes.

b. Contrôle de deux termes successifs.

Fixons $n \geq 1$ et posons $d_n(t) = f_n(t) - f_{n-1}(t)$. Pour tout $t \in I$, $|d_n(t)| \leq D_n$. Comme $t^2 \in I$, on a aussi $|d_n(t^2)| \leq D_n$.

En soustrayant les relations de récurrence,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (d_n(t) + d_n(t^2)) dt.$$

Si $x \in [0, 1/2]$, l'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^x (|d_n(t)| + |d_n(t^2)|) dt \leq x D_n \leq \frac{1}{2} D_n.$$

Si $x \in [-1/2, 0]$, on inverse les bornes avant de majorer :

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2} \int_x^0 (|d_n(t)| + |d_n(t^2)|) dt \leq (-x)D_n \leq \frac{1}{2}D_n.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq D_n/2$. Plus précisément, le raisonnement donne la majoration $|x|D_n$.

c. Majoration géométrique de D_n .

En prenant le supremum sur I dans la question précédente, on obtient $D_{n+1} \leq D_n/2$ pour tout $n \geq 1$.

Or $D_1 = 1/2$. Si $D_n \leq 2^{-n}$, alors $D_{n+1} \leq D_n/2 \leq 2^{-(n+1)}$. Par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq D_n \leq \frac{1}{2^n}.$$

d. Convergence des deux séries.

La série géométrique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}$$

converge et vaut 1. Les D_n sont positifs ou nuls et majorés par 2^{-n} ; la comparaison de séries à termes positifs établit la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} D_n.$$

Fixons $x \in I$. Pour chaque $n \geq 1$,

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq D_n.$$

La même comparaison montre que

$$\sum_{n \geq 1} |f_n(x) - f_{n-1}(x)|$$

converge. La série

$$\sum_{n \geq 1} (f_n(x) - f_{n-1}(x))$$

est donc absolument convergente, et en particulier convergente.

3. Convergence ponctuelle de (f_n) .

Fixons $x \in I$. Pour $N \geq 1$, la somme télescopique donne

$$\sum_{n=1}^N (f_n(x) - f_{n-1}(x)) = f_N(x) - f_0(x) = f_N(x) - 1.$$

La série du membre de gauche converge d'après 2.d. Par conséquent, la suite $(f_N(x))$ converge vers le réel

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n(x) - f_{n-1}(x)).$$

La convergence est établie pour chaque $x \in I$, ce qui définit une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Sa continuité n'est pas supposée à ce stade.

4. a. Inégalité sur M_n .

Chaque f_n est continue sur le segment I , donc M_n est un réel fini. Pour $n \geq 1$ et $x \in I$, la relation de récurrence et l'inégalité triangulaire donnent

$$|f_n(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} \left| \int_0^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt \right|.$$

Sur le segment entre 0 et x , $t, t^2 \in I$, donc chacun des deux termes est majoré en valeur absolue par M_{n-1} . Après inversion des bornes si $x < 0$,

$$|f_n(x)| \leq 1 + \frac{1}{2} \times 2M_{n-1}|x| \leq 1 + \frac{1}{2}M_{n-1}.$$

En prenant le supremum, $M_n \leq 1 + M_{n-1}/2$.

b. Majoration uniforme de M_n .

Méthode 1 — Récurrence avec l'inégalité de 4.a.

On a $M_0 = 1 \leq 2$. Supposons $M_{n-1} \leq 2$ pour un entier $n \geq 1$. D'après 4.a,

$$M_n \leq 1 + \frac{1}{2}M_{n-1} \leq 1 + 1 = 2.$$

La récurrence établit $M_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $|f_n(x)| \leq 2$ pour tout n et tout $x \in I$.

Méthode 2 — Somme des écarts successifs.

Pour $n \geq 1$ et $x \in I$, le télescopage et 2.c donnent

$$|f_n(x)| = \left| 1 + \sum_{k=1}^n (f_k(x) - f_{k-1}(x)) \right| \leq 1 + \sum_{k=1}^n D_k \leq 1 + \sum_{k=1}^n 2^{-k} = 2 - 2^{-n} \leq 2.$$

En prenant le supremum sur I , on obtient même $M_n \leq 2 - 2^{-n}$. Au rang 0, $M_0 = 1 = 2 - 2^0$. Ainsi la majoration demandée est encore établie pour tout n . Cette méthode réutilise le contrôle des incréments, tandis que la première exploite directement la récurrence intégrale.

c. Majoration des accroissements de f_n .

Si $n = 0$, la fonction est constante, donc $|f_0(x) - f_0(y)| = 0 \leq 2|x - y|$.

Méthode 1 — Accroissements finis.

Pour $n \geq 1$, l'intégrande définissant f_n est continue. Le théorème fondamental du calcul intégral donne, pour t à l'intérieur de I ,

$$f'_n(t) = \frac{1}{2}(f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)).$$

D'après 4.b, $|f'_n(t)| \leq (2 + 2)/2 = 2$. La fonction f_n est continue sur le segment entre x et y et dérivable à l'intérieur. L'inégalité des accroissements finis entraîne $|f_n(x) - f_n(y)| \leq 2|x - y|$.

Méthode 2 — Différence d'intégrales.

En soustrayant les définitions de $f_n(x)$ et $f_n(y)$, puis en utilisant Chasles,

$$f_n(x) - f_n(y) = \frac{1}{2} \int_y^x (f_{n-1}(t) + f_{n-1}(t^2)) dt.$$

L'intégrande est majorée en valeur absolue par 4, donc

$|f_n(x) - f_n(y)| \leq (1/2) \times 4|x - y| = 2|x - y|$, quel que soit l'ordre des deux bornes.

La première méthode utilise une borne sur la dérivée ; la seconde obtient directement la même borne à partir de l'intégrale.

5. a. Majoration des accroissements de f .

Fixons $(x, y) \in I^2$. D'après 3, $f_n(x) \rightarrow f(x)$ et $f_n(y) \rightarrow f(y)$. Par les opérations sur les limites et la continuité de la valeur absolue,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \rightarrow |f(x) - f(y)|.$$

En passant à la limite dans l'inégalité de 4.c, on obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|.$$

Cette inégalité vaut pour tout couple de I^2 puisque celui-ci était arbitraire.

b. Continuité de f .

Fixons $x \in I$. Lorsque $y \in I$ tend vers x , l'inégalité précédente donne

$$0 \leq |f(y) - f(x)| \leq 2|y - x| \rightarrow 0. \text{ Donc } f(y) \rightarrow f(x).$$

Cela vaut aussi aux deux extrémités, avec les limites prises dans I . Ainsi, f est continue sur I . Plus précisément, 5.a montre qu'elle est lipschitzienne de constante 2 : les écarts de ses valeurs sont au plus deux fois les écarts des arguments.

6. a. Majoration de $f_{n+p}(x) - f_n(x)$.

Soient $x \in I$, $n \geq 1$ et $p \geq 1$. Par télescopage,

$$f_{n+p}(x) - f_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p} (f_k(x) - f_{k-1}(x)).$$

L'inégalité triangulaire et 2.c donnent

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} D_k \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k}.$$

La somme géométrique finie vaut

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} 2^{-k} = 2^{-(n+1)} \frac{1 - 2^{-p}}{1 - 1/2} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2^p}\right).$$

On obtient exactement la majoration demandée.

b. Écart entre f_n et sa limite.

Fixons $x \in I$ et $n \geq 1$, puis faisons tendre p vers $+\infty$ dans 6.a. Comme n est fixé, $f_{n+p}(x) \rightarrow f(x)$; la valeur absolue est continue et $2^{-p} \rightarrow 0$. Ainsi,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

La borne ne dépend pas de x : elle est valable pour tous les points de I avec le même entier n .

7. Vérification de l'équation intégrale.

La continuité de f sur I , établie en 5.b, et la continuité de $t \mapsto t^2$ assurent que $t \mapsto f(t) + f(t^2)$ est continue sur I . Son intégrale sur tout segment de I est donc définie.

Fixons $x \in I$ et posons $H(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt$. Pour $n \geq 1$, la définition de f_{n+1} donne

$$H(x) - f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) - f_n(t) + f(t^2) - f_n(t^2)) dt.$$

Pour chaque t du segment entre 0 et x , $t, t^2 \in I$. D'après 6.b, chacun des deux écarts dans l'intégrande est majoré en valeur absolue par 2^{-n} . En tenant compte de l'orientation si $x < 0$,

$$|H(x) - f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2} \times 2 \times 2^{-n} |x| \leq 2^{-(n+1)} \rightarrow 0.$$

Par conséquent, $f_{n+1}(x)$ converge vers $H(x)$. Elle converge aussi vers $f(x)$ d'après 3. L'unicité de la limite impose $H(x) = f(x)$. Ainsi,

$$\forall x \in I, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x (f(t) + f(t^2)) dt.$$

L'application continue recherchée a bien été construite. Le passage à la limite est justifié par une majoration explicite de la différence des intégrales ; aucun échange automatique entre limite et intégrale n'est utilisé.

Problème 2

Question adaptée au programme actuel. L'ensemble du problème est traité sur $\mathbb{R}$. Les définitions de cycle et d'endomorphisme cyclique sont conservées. Le rappel initial porte sur les solutions réelles de $\lambda^n = 1$; les demandes de diagonalisation sont reformulées pour correspondre à ce cadre. Dans le cas général, la dimension n est prise strictement positive.

Le rappel réel peut se justifier élémentairement : si n est impair, $\lambda \leq 0$ ne peut pas donner $\lambda^n = 1$, et sur les réels positifs la puissance n est strictement croissante, donc seule $\lambda = 1$ convient. Si n est pair, $\lambda^n = |\lambda|^n = 1$ impose $|\lambda| = 1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Étude d'un exemple

Pour alléger les calculs, on pose $b_0 = e_1$, $b_1 = f(e_1)$ et $b_2 = f^2(e_1)$. Toutes les coordonnées ci-dessous sont données dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, sauf indication contraire.

1. Base orbitale et matrice de f .

La première colonne de A donne $b_1 = e_1 + e_2 - 2e_3$. Le produit avec A donne

$$[b_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $b_2 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3$.

Pour vérifier l'indépendance sans déterminant, supposons $\alpha b_0 + \beta b_1 + \gamma b_2 = 0$. Les coordonnées donnent

$$\alpha + \beta - \gamma = 0, \quad \beta - 2\gamma = 0, \quad -2\beta + 2\gamma = 0.$$

La deuxième égalité impose $\beta = 2\gamma$; la troisième donne alors $-2\gamma = 0$, donc $\gamma = 0$, puis $\beta = 0$ et $\alpha = 0$. La famille est libre; elle possède trois vecteurs dans un espace de dimension 3, donc $\mathcal{B}' = (b_0, b_1, b_2)$ est une base.

On a $f(b_0) = b_1$ et $f(b_1) = b_2$. Pour la dernière colonne, calculons

$$[f(b_2)]_{\mathcal{B}} = A \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or $-b_0 - b_1 - b_2$ a précisément ces coordonnées. Donc $f(b_2) = -b_0 - b_1 - b_2$, et la matrice cherchée est

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Vérification du cycle d'ordre 4.

La question précédente donne $f^3(e_1) = -e_1 + e_2$, de coordonnées $(-1, 1, 0)$. En appliquant A ,

$$[f^4(e_1)]_{\mathcal{B}} = A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc $f^4(e_1) = e_1$.

La famille $(e_1, f(e_1), f^2(e_1), f^3(e_1))$ est génératrice, puisque ses trois premiers vecteurs forment déjà une base d'après 1. Enfin, ses quatre colonnes de coordonnées sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux premières ont une première coordonnée égale à 1, mais des deuxième et troisième coordonnées distinctes. Les deux dernières ont une première coordonnée égale à -1 et des deuxième coordonnées distinctes. Elles sont donc deux à deux distinctes.

Les trois conditions de la définition sont satisfaites : f est cyclique d'ordre 4 et cette famille est un cycle de f .

3. Égalité $f^4 = \text{id}_E$.

Méthode 1 — Égalité sur une base.

On sait que $f^4(e_1) = e_1$. Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, les puissances du même endomorphisme commutent, donc

$$f^4(f^k(e_1)) = f^k(f^4(e_1)) = f^k(e_1).$$

Ainsi f^4 coïncide avec l'identité sur les trois vecteurs de la base $\mathcal{B}'$. Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales sur tout l'espace : $f^4 = \text{id}_E$.

Méthode 2 — Une identité polynomiale particulière.

L'égalité $f^3(e_1) = -e_1 - f(e_1) - f^2(e_1)$ donne $T(e_1) = 0$, où $T = \text{id}_E + f + f^2 + f^3$. Comme T est une somme de puissances de f , il commute avec f . Pour $k \in \{0, 1, 2\}$,

$$T(f^k(e_1)) = f^k(T(e_1)) = 0.$$

L'endomorphisme T s'annule sur une base, donc $T = 0$. La distributivité et les relations entre puissances donnent

$$(f - \text{id}_E) \circ (\text{id}_E + f + f^2 + f^3) = f^4 - \text{id}_E.$$

Le membre de gauche est nul, donc $f^4 = \text{id}_E$. Cette seconde preuve construit directement un polynôme annulateur particulier, sans recourir à un résultat général de réduction.

4. Valeurs propres réelles et diagonalisation.

Question adaptée au programme actuel. On recherche les sous-espaces propres réels et on étudie la possibilité d'une diagonalisation sur $\mathbb{R}$.

Si λ est une valeur propre réelle et si $v \neq 0$ vérifie $f(v) = \lambda v$, alors $f^4(v) = \lambda^4 v$. D'après 3, $f^4(v) = v$. Comme $v \neq 0$, $\lambda^4 = 1$, donc $\lambda \in \{-1, 1\}$.

Pour $\lambda = 1$, résolvons $(A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$. Les équations sont

$$2y + 2z = 0, \quad x + 2z = 0, \quad -2x - 2y - 4z = 0.$$

Les deux premières donnent $y = -z$ et $x = -2z$; la dernière devient $2z = 0$. Ainsi $x = y = z = 0$. Le noyau de $A - I_3$ est réduit à 0, donc 1 n'est pas une valeur propre.

Pour $\lambda = -1$, les équations de $(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$ sont

$$2x + 2y + 2z = 0, \quad x + 2y + 2z = 0, \quad -2x - 2y - 2z = 0.$$

La première et la troisième sont équivalentes à $x + y + z = 0$. En soustrayant cette égalité de la deuxième, on obtient $y + z = 0$, puis $x = 0$. Les solutions sont $(0, y, -y)$, avec $y \in \mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(e_2 - e_3).$$

La seule valeur propre réelle est -1 , et une base de son sous-espace propre est $(e_2 - e_3)$.

La somme des sous-espaces propres a dimension 1, strictement inférieure à $\dim(E) = 3$.

Il n'existe donc pas de base réelle de vecteurs propres et f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Cas général

On suppose désormais $\dim(E) = n \geq 1$ et on fixe un cycle $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$. Le vecteur x_0 est non nul : sinon toutes ses images seraient nulles et cette famille ne pourrait pas engendrer un espace de dimension positive.

1. Comparaison de p et n .

Le cycle est une famille génératrice de p vecteurs dans un espace de dimension n . Le rang d'une famille est au plus son nombre de vecteurs ; comme elle engendre E , son rang est n . Ainsi $n \leq p$.

2. Périodicité de l'endomorphisme et bijectivité.

Pour chaque $k \in \{0, \dots, p-1\}$,

$$f^p(f^k(x_0)) = f^k(f^p(x_0)) = f^k(x_0).$$

Les endomorphismes f^p et id_E coïncident donc sur une famille génératrice. Tout vecteur de E est combinaison linéaire de cette famille ; par linéarité, les deux endomorphismes coïncident sur tout E . Ainsi $f^p = \text{id}_E$.

Les compositions $f \circ f^{p-1}$ et $f^{p-1} \circ f$ valent toutes deux $f^p = \text{id}_E$. Donc f est bijective et $f^{-1} = f^{p-1}$. Si $p = 1$, cela signifie $f = \text{id}_E$ et $f^{-1} = f^0 = \text{id}_E$.

3. a. Première relation de dépendance.

Puisque $x_0 \neq 0$, la famille à un élément (x_0) est libre. Une famille libre dans E possède au plus n vecteurs ; l'entier maximal m est donc bien défini et vérifie $1 \leq m \leq n$.

Par sa définition, $(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$ est libre, mais la famille obtenue en ajoutant $f^m(x_0)$ est liée. Il existe donc des réels $c_0, \dots, c_m$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^m c_j f^j(x_0) = 0.$$

Le coefficient c_m est non nul : s'il était nul, la liberté des m premiers vecteurs imposerait $c_0 = \dots = c_{m-1} = 0$, ce qui serait contradictoire. On peut donc diviser par c_m et écrire

$$f^m(x_0) = - \sum_{j=0}^{m-1} \frac{c_j}{c_m} f^j(x_0).$$

Le vecteur $f^m(x_0)$ est bien combinaison linéaire des m premiers vecteurs.

b. Toutes les images suivantes restent dans le même sous-espace.

Posons $F = \text{Vect}(x_0, f(x_0), \dots, f^{m-1}(x_0))$. La question 3.a donne $f^m(x_0) \in F$, ce qui initialise la récurrence au rang $k = m$.

Supposons, pour un entier $k \geq m$, qu'il existe des réels $d_0, \dots, d_{m-1}$ tels que

$$f^k(x_0) = \sum_{j=0}^{m-1} d_j f^j(x_0).$$

En appliquant f ,

$$f^{k+1}(x_0) = \sum_{j=0}^{m-1} d_j f^{j+1}(x_0).$$

Pour $0 \leq j \leq m-2$, $f^{j+1}(x_0)$ appartient à la famille génératrice de F . Le dernier terme est un multiple de $f^m(x_0)$, qui appartient à F d'après 3.a. Tous les termes de la somme appartiennent donc à F , et $f^{k+1}(x_0) \in F$.

La récurrence établit $f^k(x_0) \in F$ pour tout $k \geq m$. Si $m = 1$, les termes d'indices $0 \leq j \leq m-2$ sont absents; le même raisonnement repose uniquement sur $f(x_0) \in F$ et reste valable.

c. Base formée des n premières images.

Les images $f^k(x_0)$ d'indices $k < m$ appartiennent à F par sa définition ; celles d'indices $k \geq m$ y appartiennent par 3.b. En particulier, tous les vecteurs du cycle appartiennent à F .

Le cycle engendre E , donc $E \subset F$. Comme F est un sous-espace de E , on a $F = E$. Les m vecteurs qui définissent F sont libres par la définition de m ; ils forment donc une base de E . Ainsi $m = \dim(E) = n$ et

$$\mathcal{B}_0 = (x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$$

est une base de E .

4. a. Une relation polynomiale sur tout l'espace.

Question adaptée au programme actuel : les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont réels, puisque ce sont des coordonnées dans la base réelle $\mathcal{B}_0$.

Notons

$$g = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j,$$

avec $f^0 = \text{id}_E$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la définition des coefficients et la linéarité de f^k donnent

$$g(f^k(x_0)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j f^{j+k}(x_0) = f^k \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j f^j(x_0) \right) = f^k(f^n(x_0)) = f^{n+k}(x_0).$$

Ainsi g et f^n prennent les mêmes valeurs sur chacun des vecteurs $f^k(x_0)$, en particulier pour $k = 0, \dots, n-1$, qui forment la base $\mathcal{B}_0$. Par linéarité, ils sont égaux sur E :

$$f^n = a_0 \text{id}_E + a_1 f + \dots + a_{n-1} f^{n-1}.$$

La relation n'est pas déduite d'un théorème général sur les matrices : elle est prouvée directement à partir de l'orbite génératrice.

b. Matrice de f dans la base $\mathcal{B}_0$.

Posons $b_j = f^j(x_0)$ pour $j \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour $j < n-1$, $f(b_j) = b_{j+1}$. La colonne correspondante a donc un 1 sur la ligne suivante et des 0 ailleurs. La dernière colonne est celle des coordonnées de $f(b_{n-1}) = f^n(x_0)$, soit ${}^t(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Pour $n \geq 2$, la matrice cherchée est

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Précisément, $C_{r,s} = 1$ si $s < n$ et $r = s+1$, $C_{r,s} = 0$ si $s < n$ et $r \neq s+1$, et $C_{r,n} = a_{r-1}$ pour $1 \leq r \leq n$. Cette description fixe aussi les petites dimensions : si $n = 2$,

$$C = \begin{pmatrix} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix}; \text{ si } n = 1, C = (a_0).$$

c. Rang et dimensions des sous-espaces propres.

Question adaptée au programme actuel : le paramètre λ et les valeurs propres sont réels.

Méthode 1 — Une famille libre de $n-1$ vecteurs dans l'image.

Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$ et supposons d'abord $n \geq 2$. Les $n-1$ vecteurs

$$(f - \lambda \text{id}_E)(b_j) = b_{j+1} - \lambda b_j, \quad 0 \leq j \leq n-2,$$

appartiennent à l'image de $f - \lambda \text{id}_E$. Pour vérifier leur liberté, supposons

$$\sum_{j=0}^{n-2} c_j(b_{j+1} - \lambda b_j) = 0.$$

Dans la base $(b_0, \dots, b_{n-1})$, le coefficient de b_{n-1} est c_{n-2} , donc $c_{n-2} = 0$. Si $n \geq 3$, le coefficient de b_{n-2} donne ensuite $c_{n-3} = 0$. En poursuivant vers les indices décroissants lorsqu'il en reste, on obtient tous les $c_j = 0$. Pour $n = 2$, la première égalité donne déjà le seul coefficient $c_0 = 0$. La famille est libre.

L'image contient donc $n - 1$ vecteurs libres, d'où $\text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \geq n - 1$. Si $n = 1$, cette inégalité dit simplement que le rang est au moins 0, ce qui est toujours vrai.

Le théorème du rang donne $\dim \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) = n - \text{rg}(f - \lambda \text{id}_E) \leq 1$. Lorsque λ est une valeur propre, le noyau contient un vecteur non nul, donc sa dimension est au moins 1 : elle est exactement 1.

Méthode 2 — Les coordonnées d'un vecteur du noyau.

Pour $n \geq 2$, écrivons

$$v = \sum_{j=0}^{n-1} u_j b_j$$

et supposons $(f - \lambda \text{id}_E)(v) = 0$. La matrice de 4.b donne, pour $j = 1, \dots, n-1$,

$$u_{j-1} + a_j u_{n-1} - \lambda u_j = 0, \quad \text{soit} \quad u_{j-1} = \lambda u_j - a_j u_{n-1}.$$

En partant de $j = n - 1$ puis en descendant, toutes les coordonnées $u_{n-2}, \dots, u_0$ sont déterminées par la seule coordonnée u_{n-1} . En particulier, si $u_{n-1} = 0$, ces relations imposent successivement toutes les autres coordonnées nulles. L'application linéaire qui, à un vecteur du noyau, associe sa dernière coordonnée est donc injective vers $\mathbb{R}$. Le noyau a dimension au plus 1. Par le théorème du rang, le rang est au moins $n - 1$, puis tout sous-espace propre a dimension 1.

Pour $n = 1$, un noyau dans un espace de dimension 1 a déjà dimension au plus 1, et la même conclusion suit. Aucune division par λ n'a été utilisée, donc les arguments restent valables pour $\lambda = 0$.

La première méthode exhibe une grande famille libre dans l'image ; la seconde contrôle les degrés de liberté dans le noyau.

5. a. Condition nécessaire sur les valeurs propres.

Question adaptée au programme actuel : seules les valeurs propres réelles sont considérées.

Ici $p = n$. D'après 2, $f^n = \text{id}_E$. Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de valeur propre réelle λ , une récurrence donne $f^k(v) = \lambda^k v$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Au rang n ,

$$v = f^n(v) = \lambda^n v.$$

Ainsi $(\lambda^n - 1)v = 0$. Le vecteur v étant non nul, $\lambda^n = 1$. En particulier, $\lambda \neq 0$, et le rappel fournit les seules valeurs possibles : 1 si n est impair, 1 et -1 si n est pair.

b. Matrice dans le cas $p = n$.

La famille $\mathcal{B}_0 = (b_0, \dots, b_{n-1})$ est une base d'après 3.c. On a $f(b_j) = b_{j+1}$ pour $0 \leq j < n - 1$, et la condition de cycle donne $f(b_{n-1}) = f^n(x_0) = x_0 = b_0$.

Ainsi les coefficients de 4.b sont $a_0 = 1$ et $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$. Pour $n \geq 2$,

$$C_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ses colonnes traduisent le décalage cyclique $b_0 \mapsto b_1 \mapsto \cdots \mapsto b_{n-1} \mapsto b_0$. Si $n = 1$, la

matrice est (1) ; si $n = 2$, elle est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. Spectre réel et possibilité de diagonalisation.

Question adaptée au programme actuel. On détermine les sous-espaces propres réels, puis les dimensions pour lesquelles ils fournissent une base de E .

Le vecteur

$$v_+ = \sum_{j=0}^{n-1} b_j$$

est non nul, puisque sa première coordonnée dans la base $\mathcal{B}_0$ vaut 1. Le décalage cyclique de 5.b permute les termes de la somme :

$$f(v_+) = \sum_{j=0}^{n-2} b_{j+1} + b_0 = \sum_{j=0}^{n-1} b_j = v_+.$$

Ainsi 1 est une valeur propre. D'après 4.c, son espace propre est de dimension 1, donc

$$\text{SEP}(f, 1) = \text{Vect}(v_+).$$

Si n est pair, posons

$$v_- = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j b_j.$$

Ce vecteur est non nul car sa première coordonnée vaut encore 1. Comme $n - 1$ est impair, son image a pour coefficient sur b_0 le nombre $(-1)^{n-1} = -1$. Pour $1 \leq j \leq n - 1$, le coefficient sur b_j est $(-1)^{j-1} = -(-1)^j$. Donc

$$f(v_-) = -v_-.$$

Ainsi -1 est également une valeur propre et, d'après 4.c,

$$\text{SEP}(f, -1) = \text{Vect}(v_-).$$

D'après 5.a, aucune autre valeur propre réelle n'est possible. Si n est impair, le seul sous-espace propre a donc dimension 1 ; si n est pair, il y en a exactement deux, chacun de dimension 1. Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, donc la dimension de leur somme est respectivement 1 ou 2.

Si $n = 1$, $f = \text{id}_E$ et (x_0) est une base de vecteurs propres, associée à la valeur propre 1.

Si $n = 2$, $v_+ = x_0 + f(x_0)$ et $v_- = x_0 - f(x_0)$. Ces vecteurs sont propres de valeurs propres distinctes 1 et -1 , donc ils sont libres et forment une base de l'espace de dimension 2. On peut aussi le vérifier directement : l'égalité $\alpha v_+ + \beta v_- = 0$ donne $(\alpha + \beta)x_0 + (\alpha - \beta)f(x_0) = 0$; la liberté de $(x_0, f(x_0))$ impose $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. Dans cette base propre, la matrice de f est $\text{diag}(1, -1)$.

Si $n \geq 3$, la somme des espaces propres a dimension au plus $2 < n$. Elle ne peut donc pas fournir une base de E , et f n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

On conclut que f est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $n \in \{1, 2\}$, avec les bases propres indiquées dans ces deux cas.

Relevé des adaptations

- Problème 2, préambule et cadre des deux parties : travail sur des espaces vectoriels réels ; remplacement du rappel initial par les solutions réelles de $\lambda^n = 1$. La dimension positive $n \geq 1$ du cas général est explicitée.
- Problème 2, étude d'un exemple, question 4 : remplacement de la demande d'une base propre par la détermination du spectre réel et l'étude de la diagonalisation. Avec la matrice donnée, le seul espace propre réel est de dimension 1 ; la conclusion doit donc être une absence de diagonalisation sur $\mathbb{R}$.
- Problème 2, cas général, questions 4.a et 4.b : coefficients de la relation et de la matrice pris dans $\mathbb{R}$. Les demandes et les calculs sont conservés.
- Problème 2, cas général, questions 4.c et 5.a : paramètre et valeurs propres pris dans $\mathbb{R}$; les affirmations sur le rang, les dimensions et les puissances sont conservées.
- Problème 2, cas général, question 5.c : recherche des sous-espaces propres réels et caractérisation des cas diagonalisables, avec construction des bases propres dans ces cas. La diagonalisation n'est possible que pour $n = 1$ ou $n = 2$.