



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2000

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Premier problème

Notations

n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et I_n sa matrice identité. La transposée d'une matrice M est notée ${}^tM$.

$\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par : si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$, alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

En notant les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, et en confondant les

matrices d'ordre 1 et les scalaires, on a $\langle x, y \rangle = {}^tXY$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$.

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que la matrice de passage P d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ à une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ vérifie ${}^tP = P^{-1}$.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

1. On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1. a. Justifier que S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. b. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $S = PD^tP$.

2. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. a. Vérifier que $(M - 2I_3)^3 = I_3$.

2. b. M est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

2. c. Calculer le produit ${}^tMM$.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à la matrice A relativement à la base $\mathcal{B}$, et g l'endomorphisme associé à la matrice ${}^tA$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$: $\langle g(y), x \rangle = \langle y, f(x) \rangle$, puis $\langle (g \circ f)(x), x \rangle = \|f(x)\|^2$.

2. Montrer que l'endomorphisme $g \circ f$ est symétrique.

3. Montrer que $g \circ f$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $g \circ f$.

On note Q la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

5. Montrer l'existence de n réels positifs ou nuls $\mu_1, \dots, \mu_n$, non nécessairement distincts, tels que la matrice diagonale

$$\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

vérifie ${}^tAA = Q\Delta^2Q$.

6. Montrer que la famille $(f(e'_1), \dots, f(e'_n))$ est orthogonale et que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$.
7. Dans cette question, on suppose que A est inversible.
 7. a. Vérifier que les nombres réels $\mu_1, \dots, \mu_n$ sont tous non nuls.
 7. b. Montrer que la famille $\mathcal{C} = \left(\frac{1}{\mu_1} f(e'_1), \dots, \frac{1}{\mu_n} f(e'_n) \right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
 7. c. Soit R la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$. Montrer que $A = R\Delta^tQ$.

Partie III

Une matrice réelle U d'ordre 3 est dite orthogonale lorsque ${}^tUU = I_3$.

Déterminer deux matrices orthogonales Q et R d'ordre 3 et une matrice diagonale Δ d'ordre 3 telles que $M = R\Delta{}^tQ$, où M est la matrice définie en I.2.

Deuxième problème

Dans tout ce problème, a est un réel tel que $0 < a < 1$.

I — Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; \pi]$, on note

$$C_n(x) = \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

1. a. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; \pi]$:

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n \cos(kx).$$

1. b. À l'aide des formules d'addition du sinus, établir, pour tout entier k et tout réel x :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel x :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=-n}^n \cos(kx) = 2 \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

1. c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0; \pi]$:

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale

$$J_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

existe et calculer sa valeur.

On note $\varphi : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{\cos(ax) - 1}{\sin(x/2)} & \text{si } x \in]0; \pi]. \end{cases}$$

3. Montrer que φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$ et calculer $\varphi'(0)$.

4. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_0^\pi \varphi(x) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) dx$.

Montrer, grâce à une intégration par parties, que I_n tend vers 0 quand l'entier n tend vers l'infini.

II — Calcul de la somme d'une série

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) dx$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. En déduire que la série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge, et calculer sa somme. On pourra utiliser les résultats de I.2 et I.4.

3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n en fonction de a et de n .

4. Établir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

III — Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, α désigne un réel tel que $\alpha > 1$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

On note : $F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$, $G(\alpha) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$ et $H(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

2. a. Montrer, pour tout réel $t \in [0; 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1+t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha}.$$

Le terme $t^{0\alpha}$ est pris égal à 1, y compris pour $t = 0$.

2. b. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1+t^\alpha} dt$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

2. c. En déduire que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}$$

converge et que

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}.$$

3. a. En utilisant le changement de variable défini par $u = t^{1-\alpha}$, montrer :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right), \text{ et en déduire :}$$

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}.$$

3. b. Établir :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1}.$$

4. En utilisant le résultat de II.4, établir finalement : $F(\alpha) = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}.$