



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

2000

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Premier problème

On reprend les notations du sujet. La matrice de passage vers une nouvelle base a pour colonnes les coordonnées des vecteurs de cette nouvelle base dans l'ancienne.

Partie I

1. a. Méthode 1 — Théorème spectral réel.

La matrice S est réelle et symétrique, car ${}^tS = S$. Le théorème spectral réel s'applique : S est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Méthode 2 — Décomposition en deux sous-espaces propres.

Notons J la matrice d'ordre 3 dont tous les coefficients valent 1. On a $S = 3I_3 + 2J$. Pour $x = (x_1, x_2, x_3)$, le vecteur Jx vaut $(x_1 + x_2 + x_3)(1, 1, 1)$.

Sur le plan $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, on a donc $Sx = 3x$. Sur la droite $W = \text{Vect}((1, 1, 1))$, on a $Sx = 9x$.

Le plan V a pour base $((1, -1, 0), (1, 1, -2))$; la droite W n'a en commun avec lui que le vecteur nul. Leurs dimensions totalisent 3, donc $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$. La réunion de leurs bases est une base de vecteurs propres de S , qui est ainsi diagonalisable.

La première méthode conclut immédiatement à partir de la symétrie ; la seconde explique les deux valeurs propres et prépare le calcul demandé en I.1.b.

1. b. Les colonnes de P sont :

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Leurs carrés de normes sont $(1+1)/2 = 1$, $(1+1+4)/6 = 1$ et $(1+1+1)/3 = 1$. Leurs produits scalaires deux à deux sont nuls, puisque les numérateurs correspondants sont $1-1=0$, $1-1=0$ et $1+1-2=0$.

Ils forment donc une base orthonormale et $P^{-1} = {}^tP$. En utilisant $S = 3I_3 + 2J$, les coordonnées de q_1 et q_2 ont une somme nulle, tandis que $Jq_3 = 3q_3$. Ainsi :

$$Sq_1 = 3q_1, \quad Sq_2 = 3q_2, \quad Sq_3 = 9q_3.$$

Avec $D = \text{diag}(3, 3, 9)$, ces trois égalités s'écrivent $SP = PD$. En multipliant à droite par $P^{-1} = {}^tP$, on obtient $S = PD{}^tP$.

2. a. Posons $N = M - 2I_3$. On calcule :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $(M - 2I_3)^3 = I_3$. Le calcul correspond aussi au fait que N transforme (x_1, x_2, x_3) en (x_2, x_3, x_1) : trois applications successives restituent le vecteur initial.

2. b. On exploite le polynôme annulateur fourni par I.2.a, sans utiliser de déterminant.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de M et $v \neq 0$ un vecteur propre associé, alors :

$$(M - 2I_3)^3 v = (\lambda - 2)^3 v = v.$$

Ainsi $(\lambda - 2)^3 = 1$. Pour un réel s , la factorisation $s^3 - 1 = (s - 1)(s^2 + s + 1)$, avec $s^2 + s + 1 = (s + 1/2)^2 + 3/4 > 0$, montre que $s^3 = 1$ impose $s = 1$. Donc la seule valeur propre réelle possible est 3.

Elle existe, puisque ${}^t(M(1, 1, 1)) = 3{}^t(1, 1, 1)$. Résolvons $Mv = 3v$, soit $Nv = v$: les équations sont $v_2 = v_1$, $v_3 = v_2$ et $v_1 = v_3$. L'espace propre associé à 3 est donc $\text{Vect}({}^t(1, 1, 1))$, de dimension 1.

Les espaces propres réels ne peuvent ainsi fournir une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. c. Les colonnes de M sont ${}^t(2, 0, 1)$, ${}^t(1, 2, 0)$ et ${}^t(0, 1, 2)$. Le coefficient de ligne j et colonne k de ${}^tMM$ est le produit scalaire des colonnes j et k .

Chaque colonne a un carré de norme égal à 5, et les trois produits scalaires entre colonnes distinctes valent 2. Par conséquent :

$${}^tMM = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = S.$$

Partie II

1. On utilise les coordonnées dans la base canonique, qui est orthonormale. Pour les colonnes X, Y associées à x, y :

$$\langle g(y), x \rangle = {}^t({}^tAY)X = {}^tYAX = \langle y, f(x) \rangle.$$

La règle utilisée est ${}^t({}^tAY) = {}^tYA$. On applique ensuite cette identité avec $y = f(x)$:

$$\langle (g \circ f)(x), x \rangle = \langle f(x), f(x) \rangle = \|f(x)\|^2.$$

Les deux égalités sont valables pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2. Méthode 1 — Identité des produits scalaires.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, II.1 donne :

$$\langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

En échangeant x et y et en utilisant la symétrie du produit scalaire, on en déduit :

$$\langle (g \circ f)(x), y \rangle = \langle x, (g \circ f)(y) \rangle.$$

C'est exactement la définition d'un endomorphisme symétrique.

Méthode 2 — Matrice dans une base orthonormale.

La matrice de $g \circ f$ dans la base canonique est ${}^tAA$. Or :

$${}^t({}^tAA) = {}^t(A({}^tA)) = {}^tAA.$$

Cette matrice est symétrique et la base canonique est orthonormale. La caractérisation matricielle des endomorphismes symétriques donne donc la même conclusion.

La première méthode exprime directement la géométrie de l'application ; la seconde est pratique lorsqu'on dispose de sa matrice.

3. Comme $g \circ f$ est symétrique sur l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, le théorème spectral réel assure qu'il est diagonalisable.

Soient λ une valeur propre et $v \neq 0$ un vecteur propre associé. D'après II.1 :

$$\lambda\|v\|^2 = \langle (g \circ f)(v), v \rangle = \|f(v)\|^2 \geq 0.$$

Comme $v \neq 0$, $\|v\|^2 > 0$. La division est donc permise et donne $\lambda = \|f(v)\|^2 / \|v\|^2 \geq 0$. Toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

4. Le théorème spectral réel fournit plus précisément une base orthonormale de vecteurs propres de tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Ses hypothèses sont satisfaites par II.2. Il existe donc une base $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ ayant les propriétés demandées.

La matrice Q , dont les colonnes sont ces vecteurs dans la base canonique, vérifie $Q^{-1} = {}^tQ$, d'après le rappel du sujet.

5. Notons λ_j la valeur propre associée à e'_j . D'après II.3, $\lambda_j \geq 0$. Posons $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ et $\Delta = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$.

La matrice de $g \circ f$ dans $\mathcal{B}'$ est $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \Delta^2$. La formule de changement de base donne :

$$Q^{-1} {}^t A A Q = \Delta^2.$$

En multipliant à gauche par Q , à droite par Q^{-1} , puis en utilisant $Q^{-1} = {}^t Q$, on obtient ${}^t A A = Q \Delta^2 {}^t Q$.

Les nombres μ_j sont bien positifs ou nuls et peuvent se répéter.

6. Pour tous $j, k \in \{1, \dots, n\}$, l'identité de II.1 et la symétrie du produit scalaire donnent :

$$\langle f(e'_j), f(e'_k) \rangle = \langle (g \circ f)(e'_j), e'_k \rangle = \mu_j^2 \langle e'_j, e'_k \rangle.$$

La base $\mathcal{B}'$ est orthonormale. Si $j \neq k$, le dernier produit scalaire est nul : les images sont deux à deux orthogonales. Si $j = k$, on obtient $\|f(e'_j)\|^2 = \mu_j^2$.

Comme la norme et μ_j sont non négatifs, $\|f(e'_j)\| = \mu_j$. Une image peut être nulle lorsque $\mu_j = 0$; cela ne contredit pas l'orthogonalité de la famille.

7. a. L'inversibilité de A rend l'endomorphisme f injectif. Si $\mu_j = 0$, II.6 donne

$\|f(e'_j)\| = 0$, donc $f(e'_j) = 0$. L'injectivité impose alors $e'_j = 0$, ce qui contredit le fait que e'_j appartient à une base orthonormale.

Ainsi $\mu_j > 0$ pour chaque j , et toutes les divisions utilisées ensuite sont légitimes.

7. b. Posons $c_j = f(e'_j)/\mu_j$. D'après II.6 :

$$\langle c_j, c_k \rangle = 0 \quad \text{si } j \neq k, \quad \|c_j\| = \frac{\|f(e'_j)\|}{\mu_j} = 1.$$

La famille $\mathcal{C} = (c_1, \dots, c_n)$ est donc orthonormale. Elle est libre : si

$$\sum_{j=1}^n b_j c_j = 0,$$

le produit scalaire avec c_k donne $b_k = 0$ pour chaque k .

Elle possède n éléments dans $\mathbb{R}^n$, donc c'est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

7. c. Rectification de l'énoncé : la transposée de Q manque dans la formule imprimée à cette question. L'égalité correcte est $A = R\Delta^t Q$, comme le demande également la partie III.

La colonne j de AQ contient les coordonnées de $f(e'_j)$. La colonne j de $R\Delta$ est $\mu_j c_j$, soit précisément $f(e'_j)$. Les colonnes étant égales pour chaque j , on a :

$$AQ = R\Delta.$$

En multipliant à droite par $Q^{-1} = {}^t Q$, on obtient $A = R\Delta^t Q$.

Partie III

La définition d'une matrice orthogonale a été explicitée dans le sujet : ${}^t U U = I_3$. On construit ici de telles matrices à partir de bases orthonormales, conformément au rappel initial.

Par I.2.c, ${}^t M M = S$. La partie I fournit $S = P D {}^t P$, avec $D = \text{diag}(3, 3, 9)$. On peut donc choisir :

$$Q = P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \Delta = \text{diag}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 3).$$

Vérifions avant d'appliquer II.7 que M est inversible. Si $Mv = 0$, les équations sont $2v_1 + v_2 = 0$, $2v_2 + v_3 = 0$ et $v_1 + 2v_3 = 0$. Les deux premières donnent $v_2 = -2v_1$, puis $v_3 = 4v_1$. La troisième donne $9v_1 = 0$, donc $v = 0$. Le noyau est nul et, en dimension finie pour une matrice carrée, M est inversible.

Notons q_1, q_2, q_3 les colonnes de Q décrites en I.1.b. Les colonnes de R doivent être

$Mq_1/\sqrt{3}$, $Mq_2/\sqrt{3}$ et $Mq_3/3$. On calcule :

$$Mq_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Mq_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad Mq_3 = 3q_3.$$

Ainsi :

$$R = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par II.7.b, ses colonnes sont une base orthonormale ; on peut également le vérifier directement. Les colonnes avant division par $\sqrt{6}$ ont toutes un carré de norme égal à 6, et leurs produits scalaires sont $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, $\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0$ et $\sqrt{6} - \sqrt{6} = 0$.

Ainsi ${}^tRR = I_3$, et I.1.b a déjà établi ${}^tQQ = I_3$. Enfin, les calculs des colonnes donnent $MQ = R\Delta$. En multipliant par ${}^tQ$, on obtient la factorisation demandée $M = R\Delta{}^tQ$.

Deuxième problème

On suppose $0 < a < 1$. Les notations I_n , F , G et H utilisées dans ce problème sont celles de son propre énoncé.

I — Calcul d'une somme et d'une intégrale

1. a. Question adaptée au programme actuel. On conserve la somme symétrique des indices en utilisant uniquement des cosinus réels.

Le cosinus est pair, donc $\cos(-kx) = \cos(kx)$. En séparant les indices négatifs, l'indice

nul et les indices positifs :

$$\sum_{k=-n}^n \cos(kx) = \cos(0) + \sum_{k=1}^n (\cos(-kx) + \cos(kx)) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx).$$

On obtient

$$1 + 2C_n(x) = \sum_{k=-n}^n \cos(kx),$$

pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0; \pi]$, y compris $x = 0$.

1. b. Question adaptée au programme actuel. On remplace le calcul algébrique initial par une identité réelle qui permettra de sommer par télescopage.

Les formules d'addition du sinus donnent, pour tous réels u, v :

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v,$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v.$$

En soustrayant ces deux égalités, puis en prenant $u = kx$ et $v = x/2$, on obtient :

$$\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos(kx).$$

Sommons maintenant cette identité pour $k = -n, \dots, n$. Les termes intermédiaires s'annulent deux à deux :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \sum_{k=-n}^n \cos(kx) = \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right) - \sin\left(\left(-n - \frac{1}{2}\right)x\right).$$

Le sinus est impair, donc le membre de droite vaut $2 \sin((n + 1/2)x)$. L'identité annoncée est démontrée pour tout réel x , sans division par un sinus.

1. c. On combine les deux résultats précédents. Pour $x \in]0; \pi]$, on a $x/2 \in]0; \pi/2]$, donc $\sin(x/2) > 0$.

D'après I.1.a et I.1.b :

$$2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) (1 + 2C_n(x)) = 2 \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right).$$

En divisant par $4 \sin(x/2)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

La valeur $x = 0$ est exclue de cette écriture du quotient ; elle sera traitée par prolongement à la question suivante.

2. Pour $x \in]0; \pi]$, I.1.c identifie l'intégrande à $1/2 + C_n(x)$. Cette dernière fonction est continue sur $[0; \pi]$ et vaut $n + 1/2$ en 0. L'intégrande admet donc un prolongement continu au point 0 : l'intégrale existe, que l'on la lise comme intégrale de ce prolongement ou comme intégrale impropre en 0.

Il n'y a qu'une somme finie à intégrer, donc la linéarité donne :

$$J_n = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) \, dx.$$

Pour chaque entier $k \geq 1$, $\int_0^\pi \cos(kx) \, dx = [\sin(kx)/k]_0^\pi = 0$. Ainsi :

$$\forall n \geq 1, \quad J_n = \frac{\pi}{2}.$$

3. On étudie le seul point où le quotient pourrait poser un problème, à savoir 0. Sur $]0; \pi]$, le dénominateur ne s'annule pas et φ est de classe C^1 .

Les développements de Taylor en 0 des fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(x/2)$ donnent :

$$\cos(ax) - 1 = -\frac{a^2 x^2}{2} + o(x^2), \quad \sin(x/2) = \frac{x}{2} + o(x).$$

Ces développements concernent directement les fonctions indiquées, dont les dérivées se calculent par la règle de dérivation usuelle. On en déduit :

$$\varphi(x) = \frac{-a^2 x^2/2 + o(x^2)}{x/2 + o(x)} = -a^2 x + o(x).$$

Ainsi $\varphi(x) \rightarrow 0 = \varphi(0)$, et la dérivée à droite en 0 existe :

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = -a^2.$$

Pour vérifier la continuité de la dérivée, calculons-la pour $x > 0$:

$$\varphi'(x) = \frac{-a \sin(ax) \sin(x/2) - \frac{1}{2}(\cos(ax) - 1) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

Les mêmes formules de Taylor donnent $\sin(ax) = ax + o(x)$, $\cos(x/2) = 1 + o(1)$, ainsi que les développements déjà utilisés. Le numérateur vaut :

$$-\frac{a^2 x^2}{2} + \frac{a^2 x^2}{4} + o(x^2) = -\frac{a^2 x^2}{4} + o(x^2),$$

tandis que le dénominateur vaut $x^2/4 + o(x^2)$. Par conséquent $\varphi'(x) \rightarrow -a^2 = \varphi'(0)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.

En π , le dénominateur vaut 1 et le quotient se prolonge comme une fonction de classe C^1 dans un voisinage de π . Ainsi φ est de classe C^1 sur le segment $[0; \pi]$, avec $\varphi'(0) = -a^2$.

4. On applique l'intégration par parties imposée. Notons $b_n = n + 1/2 > 0$. Comme φ est de classe C^1 sur $[0; \pi]$:

$$I_n = \left[-\frac{\varphi(x) \cos(b_n x)}{b_n} \right]_0^\pi + \frac{1}{b_n} \int_0^\pi \varphi'(x) \cos(b_n x) dx.$$

Le terme de bord est nul : $\varphi(0) = 0$ et $\cos((n + 1/2)\pi) = 0$. La dérivée φ' est continue sur un segment, donc il existe $L \geq 0$ tel que $|\varphi'(x)| \leq L$ sur $[0; \pi]$. Ainsi :

$$|I_n| \leq \frac{1}{n + 1/2} \int_0^\pi |\varphi'(x)| \, dx \leq \frac{\pi L}{n + 1/2}.$$

Le dernier membre tend vers 0. Par encadrement, $I_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

II — Calcul de la somme d'une série

1. On travaille avec une somme finie, ce qui permet d'utiliser directement la linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^n u_k = \int_0^\pi \cos(ax) C_n(x) \, dx.$$

Pour $x > 0$, la formule I.1.c donne :

$$\cos(ax) C_n(x) = -\frac{1}{2} \cos(ax) + \cos(ax) \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2 \sin(x/2)}.$$

On écrit $\cos(ax) = 1 + (\cos(ax) - 1)$ dans le second terme. La définition de φ entraîne :

$$\cos(ax) \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2 \sin(x/2)} = \frac{\sin((n + 1/2)x)}{2 \sin(x/2)} + \frac{1}{2} \varphi(x) \sin((n + 1/2)x).$$

Les trois fonctions à intégrer admettent un prolongement continu en 0, comme établi en I.2 et I.3. On peut donc intégrer cette identité jusqu'à 0 :

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos(ax) \, dx + J_n + \frac{1}{2} I_n.$$

Comme $a > 0$, $\int_0^\pi \cos(ax) \, dx = \sin(\pi a)/a$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + J_n.$$

2. Une série converge lorsque ses sommes partielles ont une limite finie. Par II.1, I.2 et I.4 :

$$\sum_{k=1}^n u_k = -\frac{\sin(\pi a)}{2a} + \frac{1}{2}I_n + \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} u_n$$

converge donc et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a}.$$

3. Méthode 1 — Transformation du produit de cosinus.

Les formules d'addition du cosinus donnent :

$$\cos(u + v) + \cos(u - v) = 2 \cos u \cos v.$$

On les applique avec $u = ax$ et $v = nx$, puis on intègre :

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin((a+n)\pi)}{a+n} + \frac{\sin((a-n)\pi)}{a-n} \right).$$

Les dénominateurs sont non nuls, puisque $0 < a < 1$ et $n \geq 1$. Les formules d'addition du sinus, avec $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$, donnent :

$$\sin((a+n)\pi) = \sin((a-n)\pi) = (-1)^n \sin(\pi a).$$

Ainsi :

$$u_n = \frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{2} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) = \frac{(-1)^n a \sin(\pi a)}{a^2 - n^2}.$$

Donc
$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} a \sin(\pi a)}{n^2 - a^2}.$$

Méthode 2 — Deux intégrations par parties.

Posons $v_n = \int_0^\pi \sin(ax) \sin(nx) \, dx$. Toutes les fonctions sont de classe C^1 sur le segment. Une première intégration par parties donne :

$$u_n = \left[\frac{\cos(ax) \sin(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{a}{n} \int_0^\pi \sin(ax) \sin(nx) \, dx = \frac{a}{n} v_n.$$

Une deuxième intégration par parties fournit :

$$v_n = \left[-\frac{\sin(ax) \cos(nx)}{n} \right]_0^\pi + \frac{a}{n} \int_0^\pi \cos(ax) \cos(nx) \, dx = -\frac{(-1)^n \sin(\pi a)}{n} + \frac{a}{n} u_n.$$

En reportant dans la première égalité :

$$u_n = -\frac{a(-1)^n \sin(\pi a)}{n^2} + \frac{a^2}{n^2} u_n.$$

Donc $(n^2 - a^2)u_n = (-1)^{n-1} a \sin(\pi a)$. Comme $n^2 - a^2 > 0$, la division donne de nouveau
$$u_n = \frac{(-1)^{n-1} a \sin(\pi a)}{n^2 - a^2}.$$

La transformation trigonométrique donne directement une primitive ; les intégrations par parties font apparaître un système entre deux intégrales et offrent une méthode réutilisable pour d'autres produits de fonctions.

La formule permet également de vérifier la convergence absolue de la série : pour $n \geq 1$, $n^2 - a^2 \geq (1 - a^2)n^2$, donc :

$$|u_n| \leq \frac{a \sin(\pi a)}{1 - a^2} \frac{1}{n^2}.$$

Le coefficient est positif car $a \in]0; 1[$, et la série de Riemann d'exposant 2 converge. Ainsi

$$\sum_{n \geq 1} |u_n|$$

converge.

4. Par II.3, le terme de la série demandée vaut $2u_n / \sin(\pi a)$. La division est permise, car $\pi a \in]0; \pi[$ implique $\sin(\pi a) > 0$.

En utilisant la convergence et la somme établies en II.2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}a}{n^2 - a^2} = \frac{2}{\sin(\pi a)} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(\pi a)}{2a} \right) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} - \frac{1}{a}.$$

Cette série est aussi absolument convergente, d'après la majoration de II.3.

III — Calcul d'une intégrale

1. Soit $\alpha > 1$. Sur $[0; 1]$, la fonction $t \mapsto 1/(1 + t^\alpha)$ est continue, donc intégrable. Pour $t \geq 1$:

$$0 \leq \frac{1}{1 + t^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}.$$

L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge puisque $\alpha > 1$. Par comparaison d'intégrales positives, l'intégrale demandée converge.

Les quantités $F(\alpha)$, $G(\alpha)$ et $H(\alpha)$ sont donc bien définies, et Chasles donne $F(\alpha) = G(\alpha) + H(\alpha)$.

2. a. On utilise une identité géométrique finie, valable même à $t = 1$. Pour

$r = -t^\alpha \in [-1; 0]$, on a $1 - r = 1 + t^\alpha > 0$ et :

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

En isolant $1/(1 - r)$, on obtient :

$$\frac{1}{1 + t^\alpha} = \sum_{k=0}^n (-1)^k t^{k\alpha} + (-1)^{n+1} \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha}.$$

Pour $t = 0$, le terme d'indice 0 est la constante 1 et tous les autres termes sont nuls ; cette convention, explicitée dans le sujet, donne bien l'égalité. Aucun développement en série infinie n'est utilisé ici.

2. b. L'intégrande est continue et positive sur $[0; 1]$. Comme $1 + t^\alpha \geq 1$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt \leq \int_0^1 t^{(n+1)\alpha} dt = \frac{1}{(n+1)\alpha + 1}.$$

Le dernier membre tend vers 0. Par encadrement, l'intégrale du reste tend vers 0.

2. c. On intègre uniquement l'identité finie de III.2.a. Pour chaque entier $n \geq 0$:

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{(n+1)\alpha}}{1 + t^\alpha} dt.$$

En effet, $k\alpha \geq 0$, donc $\int_0^1 t^{k\alpha} dt = 1/(k\alpha + 1)$, y compris pour $k = 0$. Par III.2.b, le dernier terme tend vers 0. Les sommes partielles convergent donc vers $G(\alpha)$:

$$G(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + 1}.$$

La convergence a été prouvée par contrôle explicite du reste, sans échange entre une somme infinie et une intégrale.

3. a. On effectue le changement de variable imposé sur un segment avant de passer à la limite. Pour $B > 1$, posons $u = t^{1-\alpha}$. Cette fonction est de classe C^1 et strictement décroissante sur $[1; B]$, avec une dérivée non nulle.

En notant $\beta = \alpha/(\alpha - 1) > 1$, on a $t = u^{-1/(\alpha-1)}$, $t^\alpha = u^{-\beta}$ et $dt = -\frac{1}{\alpha-1}u^{-\beta} du$. Les bornes $t = 1$ et $t = B$ correspondent à $u = 1$ et $u = B^{1-\alpha}$. Ainsi :

$$\int_1^B \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \int_{B^{1-\alpha}}^1 \frac{u^{-\beta}}{1+u^{-\beta}} du = \frac{1}{\alpha-1} \int_{B^{1-\alpha}}^1 \frac{du}{1+u^\beta}.$$

Lorsque $B \rightarrow +\infty$, $B^{1-\alpha} \rightarrow 0$. L'intégrale de gauche converge par III.1 ; l'intégrande de droite est continue sur $[0; 1]$. On peut donc passer à la limite et obtenir :

$$H(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1} G\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right).$$

Comme $\beta > 1$, la série de III.2.c peut être utilisée avec le paramètre β . On transforme chaque terme sans réordonner la série :

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(\alpha-1)(k\beta+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\alpha + \alpha - 1}.$$

Avec le simple changement d'indice $n = k + 1$, on conclut :

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}.$$

Chaque dénominateur est strictement positif, car $\alpha > 1$ et $n \geq 1$.

3. b. On additionne les séries convergentes de G et de H en synchronisant leurs sommes

partielles. D'après III.2.c et III.3.a :

$$G(\alpha) = 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{n\alpha + 1},$$

$$H(\alpha) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n\alpha - 1}.$$

En utilisant $F = G + H$ et la somme de deux limites finies :

$$F(\alpha) = 1 + \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n\alpha - 1} - \frac{1}{n\alpha + 1} \right).$$

Or :

$$\frac{1}{n\alpha - 1} - \frac{1}{n\alpha + 1} = \frac{2}{n^2\alpha^2 - 1}.$$

Ainsi :

$$F(\alpha) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1}.$$

Il n'y a aucun réarrangement des termes. De plus, pour $n \geq 1$, $n^2\alpha^2 - 1 \geq (\alpha^2 - 1)n^2$, donc :

$$\left| \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\alpha^2 - 1} \right| \leq \frac{2}{\alpha^2 - 1} \frac{1}{n^2}.$$

La nouvelle série est absolument convergente, par comparaison à la série de Riemann d'exposant 2.

4. On applique II.4 avec $a = 1/\alpha$. Les hypothèses sont vérifiées : $\alpha > 1$ implique

$0 < 1/\alpha < 1$. Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}/\alpha}{n^2 - 1/\alpha^2} = \frac{\pi}{\sin(\pi/\alpha)} - \alpha.$$

Le terme de gauche est α fois celui de la série de III.3.b, car :

$$\frac{2(-1)^{n-1}/\alpha}{n^2 - 1/\alpha^2} = \alpha \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \alpha^2 - 1}.$$

En divisant par $\alpha > 0$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2 \alpha^2 - 1} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)} - 1.$$

En reportant dans III.3.b, on obtient finalement :

$$\forall \alpha > 1, \quad F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} = \frac{\pi/\alpha}{\sin(\pi/\alpha)}.$$

Le dénominateur est strictement positif puisque $\pi/\alpha \in]0; \pi[$. La formule est donc bien définie sur tout le domaine demandé.

Relevé des adaptations

Premier problème, II.7.c : rectification d'une erreur de l'énoncé imprimé. La formule est remplacée par $A = R\Delta {}^tQ$. Elle découle de $AQ = R\Delta$ et concorde avec la formule demandée en partie III.

Premier problème, partie III : la définition ${}^tUU = I_3$ d'une matrice orthogonale est explicitée, pour que le terme employé dans la question puisse être utilisé sans supposer de théorie supplémentaire.

Deuxième problème, I.1.a : la somme initiale est remplacée par sa formulation réelle

$$\sum_{k=-n}^n \cos(kx),$$

en conservant la symétrie des indices et le lien avec C_n .

Deuxième problème, I.1.b : le calcul algébrique initial est remplacé par une identité issue des formules d'addition du sinus, puis par un télescopage. Cette preuve entièrement réelle établit la même formule finale en I.1.c et préserve toutes les questions suivantes.

Deuxième problème, III.2.a : la convention du terme d'indice 0, égal à la constante 1 même pour $t = 0$, est explicitée pour lever toute ambiguïté à cette borne.