



**PRÉPASIMPLE**

prepasimple.fr

---

**EM Lyon**

**Mathématiques 1**

**1999**

*Corrigé de mathématiques approfondies*

---

**Mathématiques approfondies — Prépa ECG**

*Annales de concours · Corrigé*

## Problème 1

1. La matrice  $A_3$  est réelle et symétrique. Le théorème spectral réel assure donc qu'elle est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour construire une diagonalisation explicite sans déterminant, on résout l'équation  $A_3X = \lambda X$ . Pour  $X = {}^t(x, y, z)$ , elle équivaut à :

$$y = \lambda x, \quad x + z = \lambda y, \quad y = \lambda z.$$

Si  $\lambda = 0$ , les équations donnent  $y = 0$  et  $z = -x$ . L'espace propre associé est donc  $\text{Vect}({}^t(1, 0, -1))$ .

Si  $\lambda \neq 0$ , les première et troisième équations donnent  $x = z$ . Si  $x = 0$ , alors  $y = z = 0$ , ce qui est exclu pour un vecteur propre. Ainsi,  $x \neq 0$  et la deuxième équation devient  $2x = \lambda^2 x$ , d'où  $\lambda^2 = 2$ .

Les valeurs possibles sont donc  $\sqrt{2}$  et  $-\sqrt{2}$ , et les vecteurs  $v_+ = {}^t(1, \sqrt{2}, 1)$  et  $v_- = {}^t(1, -\sqrt{2}, 1)$  leur sont respectivement associés. On pose également  $v_0 = {}^t(1, 0, -1)$ .

Ces trois vecteurs sont non nuls et associés à des valeurs propres distinctes, donc ils sont linéairement indépendants. La matrice dont ils sont les colonnes est ainsi inversible :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Les équations propres donnent  $A_3P = PD$ . En multipliant à droite par  $P^{-1}$ , on obtient  $A_3 = PDP^{-1}$ .

On peut contrôler l'inverse explicitement :

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, les vecteurs  $v_+, v_0, v_-$  sont orthogonaux et leurs normes au carré valent respectivement 4, 2, 4 ; les lignes affichées sont leurs transposées divisées par ces normes au carré, ce qui donne  $P^{-1}P = I_3$ .

2. Puisque  $\theta \in ]0, \pi[$ ,  $\sin \theta > 0$ , et toutes les divisions par  $\sin \theta$  sont légitimes.

Les formules d'addition donnent, pour tout entier  $k \geq 0$  :

$$\sin((k+2)\theta) + \sin(k\theta) = 2 \cos \theta \sin((k+1)\theta).$$

Pour le vérifier, on écrit les deux sinus comme ceux de  $(k+1)\theta + \theta$  et  $(k+1)\theta - \theta$  ; les termes contenant  $\cos((k+1)\theta) \sin \theta$  se compensent.

Soit  $(s_k) \in S_\theta$ . La formule demandée est vraie pour  $k = 0$ , car  $s_0 = 0$ , et pour  $k = 1$ , car  $s_1 = s_1 \sin \theta / \sin \theta$ .

Si elle est vraie aux indices  $k$  et  $k+1$ , la relation de récurrence donne :

$$s_{k+2} = 2 \cos \theta s_{k+1} - s_k = \frac{s_1}{\sin \theta} (2 \cos \theta \sin((k+1)\theta) - \sin(k\theta)) = s_1 \frac{\sin((k+2)\theta)}{\sin \theta}.$$

Une récurrence à deux termes initiaux établit donc la formule pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Réciproquement, pour chaque  $a \in \mathbb{R}$ , la suite définie par  $s_k = a \sin(k\theta) / \sin \theta$  vérifie  $s_0 = 0$  et la relation de récurrence, d'après l'identité trigonométrique précédente. Elle appartient à  $S_\theta$  et son terme d'indice 1 vaut  $a$ .

Ainsi, si  $u_k = \sin(k\theta) / \sin \theta$ ,  $S_\theta = \{a(u_k)_{k \in \mathbb{N}} : a \in \mathbb{R}\}$ . La suite  $(u_k)$  est non nulle, puisque  $u_1 = 1$ . C'est une base de  $S_\theta$ , qui est donc un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. a. L'équation propre  $A_n X = \lambda X$  se lit ligne par ligne : la première ligne de  $A_n$  contient seulement un coefficient 1 en colonne 2 ; les lignes d'indices 2 à  $n - 1$  contiennent des coefficients 1 en colonnes voisines ; la dernière contient seulement un coefficient 1 en colonne  $n - 1$ .

On obtient donc :

$$\lambda x_1 = x_2, \quad \forall k \in \llbracket 2, n - 1 \rrbracket, \quad \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1}, \quad \lambda x_n = x_{n-1}.$$

### Méthode 1 — Coordonnée de valeur absolue maximale

Pour  $2 \leq k \leq n - 1$ , l'inégalité triangulaire donne :

$$|\lambda| |x_k| = |x_{k-1} + x_{k+1}| \leq |x_{k-1}| + |x_{k+1}| \leq 2m.$$

Aux extrémités,  $|\lambda| |x_1| = |x_2| \leq m \leq 2m$  et  $|\lambda| |x_n| = |x_{n-1}| \leq m \leq 2m$ .

Ainsi, la majoration demandée est vraie pour tous les indices. Comme  $X \neq 0$ ,  $m > 0$ , et il existe un indice  $j$  tel que  $|x_j| = m$ . Pour cet indice,  $|\lambda|m \leq 2m$ . En divisant par  $m > 0$ , on conclut  $|\lambda| \leq 2$ .

### Méthode 2 — Forme quadratique associée à la matrice

Les équations propres donnent aussi  ${}^t X A_n X = \lambda {}^t X X$ . Par la définition des coefficients de  $A_n$ ,

$${}^t X A_n X = 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1}.$$

L'inégalité  $2|ab| \leq a^2 + b^2$ , issue de  $(|a| - |b|)^2 \geq 0$ , donne :

$$|\lambda| \sum_{k=1}^n x_k^2 = \left| 2 \sum_{k=1}^{n-1} x_k x_{k+1} \right| \leq \sum_{k=1}^{n-1} (x_k^2 + x_{k+1}^2) \leq 2 \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Comme  $X$  est non nul, la somme des carrés est strictement positive. On conclut de nouveau  $|\lambda| \leq 2$ . Cette seconde méthode contrôle directement la valeur propre par la norme euclidienne ; la première fournit en plus les majorations individuelles demandées.

3. b. La fonction  $\theta \mapsto 2 \cos \theta$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, \pi[$  : sa dérivée y vaut  $-2 \sin \theta < 0$ . Ses limites aux extrémités sont 2 et  $-2$ .

Le théorème de la bijection montre qu'elle réalise une bijection de  $]0, \pi[$  sur  $] -2, 2[$ . Sous l'hypothèse  $|\lambda| < 2$ , il existe donc un unique  $\theta \in ]0, \pi[$  tel que  $\lambda = 2 \cos \theta$ .

La question 2 fournit une unique suite de  $S_\theta$  dont le terme  $s_1$  vaut  $x_1$ . Puisque  $s_0 = 0$ ,  $s_2 = 2 \cos \theta s_1 = \lambda x_1 = x_2$ .

Pour  $2 \leq k \leq n-1$ , si  $s_{k-1} = x_{k-1}$  et  $s_k = x_k$ , la relation de récurrence et les équations de 3.a donnent :

$$s_{k+1} = \lambda s_k - s_{k-1} = \lambda x_k - x_{k-1} = x_{k+1}.$$

On en déduit  $s_k = x_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ . À l'indice suivant,

$$s_{n+1} = \lambda s_n - s_{n-1} = \lambda x_n - x_{n-1} = 0.$$

Il reste à vérifier  $x_1 \neq 0$ . Si  $x_1 = 0$ , l'équation  $x_2 = \lambda x_1$  donne  $x_2 = 0$ . Puis  $x_{k+1} = \lambda x_k - x_{k-1}$  entraîne de proche en proche la nullité de toutes les coordonnées, en contradiction avec  $X \neq 0$ .

La formule de la question 2 appliquée au terme  $s_{n+1}$  donne donc :

$$0 = x_1 \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

Comme  $x_1 \neq 0$  et  $\sin \theta > 0$ ,  $\sin((n+1)\theta) = 0$ . Il existe un entier  $p$  tel que  $(n+1)\theta = p\pi$ . Puisque  $0 < \theta < \pi$ , on a  $0 < p < n+1$ , donc  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\theta = p\pi/(n+1)$ .

3. c. Fixons  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On a  $0 < \theta_p < \pi$ , donc la première coordonnée  $\sin \theta_p$  de  $X_p$  est strictement positive. Le vecteur  $X_p$  est non nul.

Posons  $u_k = \sin(k\theta_p)$  pour  $0 \leq k \leq n+1$ . L'identité établie en question 2 donne :

$$u_{k-1} + u_{k+1} = 2 \cos \theta_p u_k = \lambda_p u_k \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

De plus,  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \sin(p\pi) = 0$ . Aux indices 1 et  $n$ , ces termes nuls donnent respectivement  $u_2 = \lambda_p u_1$  et  $u_{n-1} = \lambda_p u_n$ ; aux indices intérieurs, on retrouve directement les deux coordonnées voisines.

Ces égalités sont précisément celles de  $A_n X_p = \lambda_p X_p$ . Ainsi,  $\lambda_p$  est une valeur propre de  $A_n$ , et  $X_p$  un vecteur propre associé.

3. d. Les angles vérifient  $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < \pi$ . La stricte décroissance du cosinus sur cet intervalle donne  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$ .

Les vecteurs  $X_1, \dots, X_n$  sont non nuls et associés à des valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants. Comme ils sont au nombre de  $n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , ils forment une base.

Pour montrer qu'il n'y a pas d'autre valeur propre, soit  $\mu$  une valeur propre réelle et  $Y \neq 0$  un vecteur propre associé. On décompose

$$Y = \sum_{p=1}^n c_p X_p$$

dans cette base. L'équation  $A_n Y = \mu Y$  devient :

$$\sum_{p=1}^n c_p (\lambda_p - \mu) X_p = 0.$$

La liberté de la base donne  $c_p (\lambda_p - \mu) = 0$  pour chaque  $p$ . Un coefficient  $c_p$  au moins est non nul, puisque  $Y \neq 0$ . Pour cet indice,  $\mu = \lambda_p$ .

Ainsi, l'ensemble des valeurs propres est exactement  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Cette preuve n'a pas supposé  $|\mu| < 2$  : elle exclut aussi les deux valeurs limites 2 et  $-2$  sans laisser de cas non

traité.

4. On identifie les colonnes de  $U_n$  à l'aide des vecteurs définis en 3.b.

Pour chaque  $q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , sa colonne d'indice  $q$  a pour coordonnées  $u_{p,q} = \sin(p\theta_q)$  pour  $1 \leq p \leq n$  : c'est donc le vecteur  $X_q$ .

On a ainsi  $U_n = (X_1 \cdots X_n)$ . On remarque aussi que  $u_{p,q} = u_{q,p}$ , donc  ${}^t(U_n) = U_n$ .

5. D'après 3.d et 4, les colonnes de  $U_n$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$ . La matrice  $U_n$  est donc inversible.

Posons  $D_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . La colonne d'indice  $p$  de  $A_n U_n$  est  $A_n X_p = \lambda_p X_p$ , qui est également la colonne d'indice  $p$  de  $U_n D_n$ .

Ainsi,  $A_n U_n = U_n D_n$ . L'inversibilité déjà établie autorise la multiplication à gauche par  $U_n^{-1}$  :

$$D_n = U_n^{-1} A_n U_n = \text{diag} \left( 2 \cos \frac{\pi}{n+1}, 2 \cos \frac{2\pi}{n+1}, \dots, 2 \cos \frac{n\pi}{n+1} \right).$$

6. a. La matrice  $A_n$  est symétrique. Pour tous  $p, q \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , les équations propres donnent :

$$\lambda_p {}^t(X_p) X_q = {}^t(A_n X_p) X_q = {}^t(X_p) {}^t(A_n) X_q = {}^t(X_p) A_n X_q = \lambda_q {}^t(X_p) X_q.$$

Si  $p \neq q$ , les valeurs propres sont distinctes, donc  $\lambda_p - \lambda_q \neq 0$ . L'égalité précédente entraîne  ${}^t(X_p) X_q = 0$ .

La base  $(X_1, \dots, X_n)$  est donc orthogonale. En écrivant le produit scalaire par ses coordonnées :

$$\sum_{k=1}^n \sin(k\theta_p) \sin(k\theta_q) = 0 \quad \text{si } p \neq q.$$

Le terme d'indice  $k = 0$  étant nul, on peut l'ajouter et obtenir la somme de l'énoncé, de  $k = 0$  à  $n$ .

6. b. Fixons  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et notons  $\theta = \theta_p$ . On démontre une identité de télescopage entièrement réelle.

Par les formules d'addition, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  :

$$2 \sin \theta \cos(2k\theta) = \sin((2k+1)\theta) - \sin((2k-1)\theta).$$

En sommant de  $k = 0$  à  $n$ , les termes intermédiaires se compensent :

$$2 \sin \theta \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sin((2n+1)\theta) - \sin(-\theta).$$

Or  $(n+1)\theta = p\pi$ , donc  $(2n+1)\theta = 2p\pi - \theta$ . Par périodicité et imparité du sinus,  $\sin((2n+1)\theta) = -\sin \theta$  et  $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ .

Le membre de droite est ainsi nul. Comme  $\sin \theta > 0$ , on peut diviser et conclure :

$$\sum_{k=0}^n \cos(2k\theta_p) = 0.$$

Les formules d'addition et  $\cos^2 u + \sin^2 u = 1$  donnent aussi  $\cos(2u) = 1 - 2 \sin^2 u$ . Par conséquent :

$$0 = \sum_{k=0}^n (1 - 2 \sin^2(k\theta_p)) = (n+1) - 2 \sum_{k=0}^n \sin^2(k\theta_p).$$

Le terme d'indice 0 étant nul, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \sin^2(k\theta_p) = (n+1)/2.$$

6. c. Puisque les colonnes de  $U_n$  sont les  $X_p$ , le coefficient d'indices  $(p, q)$  de  ${}^t(U_n)U_n$  vaut  ${}^t(X_p)X_q$ .

Par 6.a, ce coefficient est nul si  $p \neq q$ ; par 6.b, il vaut  $(n+1)/2$  si  $p = q$ . Ainsi :

$${}^t(U_n)U_n = \frac{n+1}{2}I_n.$$

La symétrie  ${}^t(U_n) = U_n$  établie en 4 donne  $U_n^2 = (n+1)I_n/2$ . Puisque  $n+1 > 0$ , cette égalité fournit :

$$U_n^{-1} = \frac{2}{n+1}U_n.$$

En réorganisant l'égalité de 5, on a  $A_n = U_n D_n U_n^{-1}$ . En remplaçant l'inverse, on conclut :

$$A_n = \frac{2}{n+1}U_n D_n U_n.$$

## Problème 2

Les limites aux bornes 0 et 1 sont prises à l'intérieur du domaine. Une dérivée en 0 désigne ici la dérivée à droite; les propriétés de classe  $C^1$  ou  $C^2$  à cette borne signifient que ces dérivées se prolongent continûment jusqu'à 0.

1. a. Sur  $]0, 1[$ , la fonction  $t \mapsto -\ln(1-t)$  est continue, et  $t \neq 0$ . Le quotient  $f(t) = -\ln(1-t)/t$  y est donc continu.

Au voisinage de 0, le développement limité usuel du logarithme, avec le changement de variable  $u = -t$ , donne  $\ln(1-t) = -t + o(t)$ . Ainsi, pour  $t > 0$  :

$$f(t) = \frac{t + o(t)}{t} = 1 + o(1).$$

Donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = 1 = f(0)$ . La fonction  $f$  est continue sur tout  $[0, 1[$ .

1. b. Rectification de l'énoncé : le PDF demande de calculer  $f(t)$ , dont l'expression est déjà donnée. La demande est rectifiée en «calculer  $f'(t)$ », conformément à l'étude de la dérivée dans les questions suivantes.

Sur  $]0, 1[$ , le numérateur et le dénominateur sont de classe  $C^1$ , et le dénominateur ne s'annule pas. Le quotient est de classe  $C^1$ .

La dérivée de  $-\ln(1-t)$  est  $1/(1-t)$ . La règle du quotient donne :

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad f'(t) = \frac{\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)}{t^2}.$$

1. c. On utilise les développements limités usuels en 0 :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2), \quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + o(t).$$

Après multiplication de la seconde égalité par  $t$  :

$$\frac{t}{1-t} = t + t^2 + o(t^2).$$

Le numérateur de  $f'(t)$  vaut donc  $t^2/2 + o(t^2)$ . En divisant par  $t^2$  pour  $t > 0$  :

$$f'(t) = \frac{1}{2} + o(1).$$

Ainsi,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f'(t) = 1/2$ .

Pour vérifier directement la dérivabilité à droite en 0, le développement du logarithme donne aussi  $f(t) = 1 + t/2 + o(t)$ . Par conséquent :

$$\frac{f(t) - f(0)}{t} = \frac{1}{2} + o(1).$$

On a donc  $f'(0) = 1/2$ . La dérivée, continue sur  $]0, 1[$ , tend vers sa valeur en 0 :  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[0, 1[$ .

1. d. Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire

Posons  $h(t) = \ln(1-t) + t/(1-t)$  pour  $t \in [0, 1[$ . On a  $h(0) = 0$ . Pour  $0 < t < 1$  :

$$h'(t) = -\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2} > 0.$$

La fonction  $h$  est continue en 0 et strictement croissante sur  $[0, 1[$ . Ainsi,  $h(t) \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1[$ , avec égalité seulement en  $t = 0$ .

## Méthode 2 — Tangente à la fonction logarithme

La fonction logarithme est concave sur  $]0, +\infty[$ , car sa dérivée seconde y vaut  $-1/u^2 < 0$ . Le graphe d'une fonction concave dérivable est situé sous chacune de ses tangentes.

Pour un réel  $t \in [0, 1[$ , on applique cette propriété à la tangente au point  $u = 1 - t > 0$ , puis on évalue la tangente en  $u = 1$  :

$$\ln 1 \leq \ln(1 - t) + \frac{1 - (1 - t)}{1 - t}.$$

Comme  $\ln 1 = 0$ , on retrouve  $\ln(1 - t) + t/(1 - t) \geq 0$ . La première méthode donne directement le signe strict pour  $t > 0$ ; la seconde permet de reconnaître une inégalité de tangente liée à la concavité.

1. e. Pour  $0 < t < 1$ , la question 1.d donne un numérateur strictement positif dans la formule de  $f'(t)$ , et  $t^2 > 0$ . Ainsi,  $f'(t) > 0$ . La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, 1[$ .

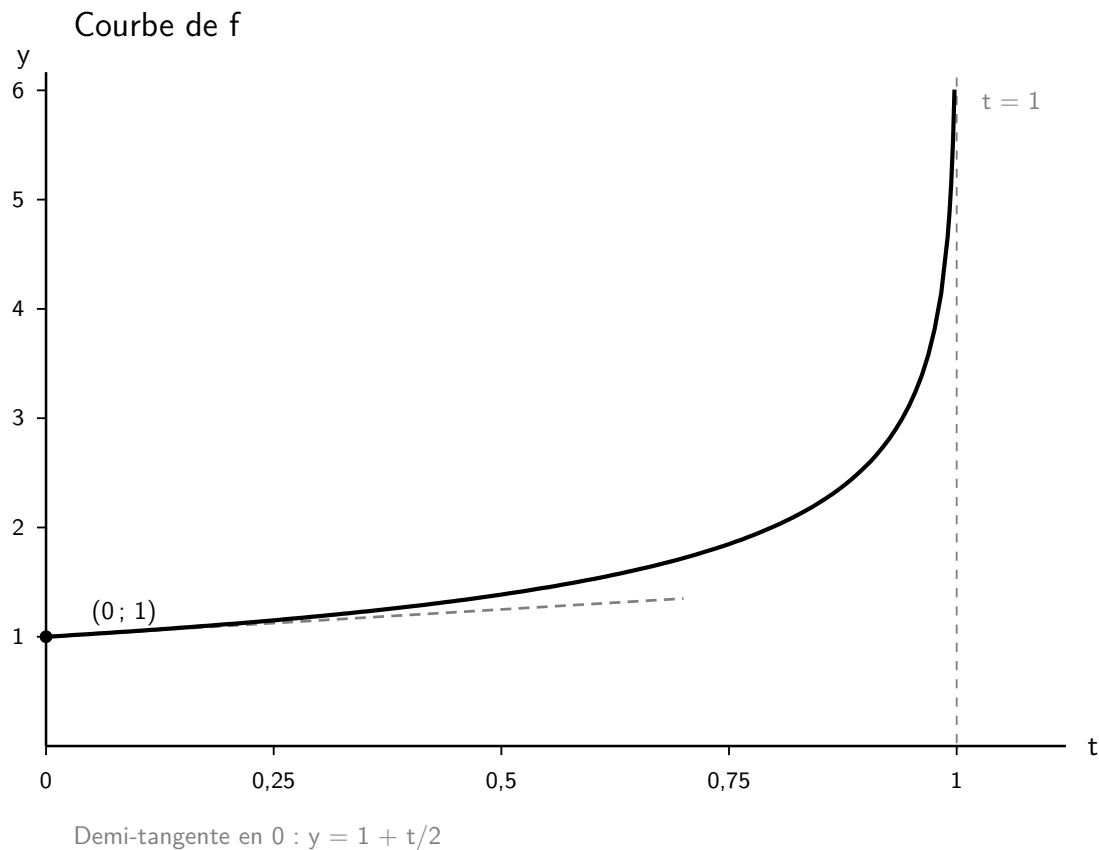
On sait que  $f(0) = 1$ . Lorsque  $t \rightarrow 1^-$ ,  $-\ln(1 - t) \rightarrow +\infty$  et  $t \rightarrow 1$ , donc  $f(t) \rightarrow +\infty$ .

Le tableau de variation est :

| $t$              | 0     | $]0, 1[$   | $1^-$     |
|------------------|-------|------------|-----------|
| Signe de $f'(t)$ | $1/2$ | +          |           |
| Variation de $f$ | 1     | croissante | $+\infty$ |

1. f. La courbe part de  $(0, 1)$ , est strictement croissante et, par l'hypothèse admise, convexe. Comme  $f'(0) = 1/2$ , sa demi-tangente à droite au point  $(0, 1)$  a pour équation  $y = 1 + t/2$ .

La limite  $f(t) \rightarrow +\infty$  en  $1^-$  donne une asymptote verticale d'équation  $t = 1$ . On ne calcule pas la dérivée seconde de  $f$ , conformément à la consigne.



2. a. Si  $x \in [0, 1[$ , la fonction  $f$  est continue sur le segment  $[0, x]$ . Son intégrale sur ce segment existe. Pour  $x = 0$ , elle vaut 0.

Pour  $x = 1$ , la seule difficulté est la borne supérieure. Sur  $[1/2, 1[$ , on a  $0 \leq f(t) \leq 2[-\ln(1-t)]$ , puisque  $1/t \leq 2$  et  $-\ln(1-t) > 0$ .

Une primitive de  $-\ln(1-t)$  sur  $]0, 1[$  est  $L(t) = (1-t)\ln(1-t) - (1-t)$ . En effet, la dérivée du premier terme vaut  $-\ln(1-t) - 1$ , et celle du second vaut 1.

La croissance comparée  $u \ln u \rightarrow 0$  lorsque  $u \rightarrow 0^+$  donne  $L(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow 1^-$ . Ainsi :

$$\int_{1/2}^1 [-\ln(1-t)] dt = 0 - L(1/2) = \frac{1 + \ln 2}{2} < +\infty.$$

Par comparaison des intégrales de fonctions positives,  $\int_{1/2}^1 f(t) dt$  converge. Sur  $[0, 1/2]$ ,

$f$  est continue et intégrable. L'intégrale impropre  $\int_0^1 f(t) dt$  existe donc, et elle est absolument convergente puisque  $f \geq 0$ .

La fonction  $g$  est ainsi bien définie sur tout  $[0, 1]$ .

2. b. Sur  $[0, 1[$ , le théorème fondamental du calcul intégral s'applique, car  $f$  est continue.

Il donne  $g'(x) = f(x)$  pour  $0 < x < 1$ .

En 0, pour  $x > 0$ , on écrit :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Par continuité de  $f$  en 0, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $|f(t) - 1| \leq \varepsilon$  sur un segment  $[0, \delta]$  suffisamment petit. Pour  $0 < x \leq \delta$ , la différence entre le quotient précédent et 1 est donc en valeur absolue au plus  $\varepsilon$ .

Ainsi,  $g'(0) = 1 = f(0)$ . Comme  $f$  est de classe  $C^1$  jusqu'en 0, l'identité  $g' = f$  entraîne que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, 1[$ , avec  $g'' = f'$  et notamment  $g''(0) = 1/2$ .

Il reste la continuité en 1. La convergence de l'intégrale impropre établie en 2.a signifie précisément :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

Donc  $g(x) \rightarrow g(1)$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $g'(x) = f(x)$  pour tout  $x \in [0, 1[$ .

2. c. Méthode 1 — Moyenne intégrale sur un intervalle terminal

Pour  $0 \leq x < 1$ , la relation de Chasles donne :

$$\frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} \int_x^1 f(t) dt.$$

La croissance de  $f$  entraîne  $f(t) \geq f(x)$  pour  $x \leq t < 1$ . En intégrant d'abord jusqu'à une borne  $b < 1$ , puis en faisant tendre  $b$  vers 1, on obtient  $\int_x^1 f(t) dt \geq (1 - x)f(x)$ .

Le quotient demandé est donc supérieur ou égal à  $f(x)$ . Comme  $f(x) \rightarrow +\infty$  en  $1^-$ , il tend lui-même vers  $+\infty$ .

## Méthode 2 — Théorème des accroissements finis

Fixons  $x \in [0, 1[$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[x, 1]$ , y compris à la borne 1, et dérivable sur  $]x, 1[$ . Le théorème des accroissements finis fournit un réel  $c_x \in ]x, 1[$  tel que :

$$\frac{g(1) - g(x)}{1 - x} = g'(c_x) = f(c_x).$$

Le quotient est le même que celui de l'énoncé. Comme  $x < c_x < 1$ , on a  $c_x \rightarrow 1^-$  lorsque  $x \rightarrow 1^-$ . Ainsi,  $f(c_x) \rightarrow +\infty$ , ce qui prouve de nouveau la limite.

La première méthode compare une moyenne intégrale au minimum de la fonction sur l'intervalle ; la seconde remplace cette moyenne par une valeur de la dérivée. Les deux justifient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = +\infty.$$

2. d. D'après 2.b et 1.e,  $g'(x) = f(x) \geq 1 > 0$  pour  $x \in [0, 1[$ . La fonction  $g$  est strictement croissante jusqu'à 1, où elle est continue.

On a  $g(0) = 0$  et, comme admis dans l'énoncé,  $g(1) \simeq 1,65$  avec une erreur inférieure à  $10^{-2}$ .

| $x$              | 0 | $]0, 1[$   | 1                  |
|------------------|---|------------|--------------------|
| Signe de $g'(x)$ | 1 | +          |                    |
| Variation de $g$ | 0 | croissante | $g(1) \simeq 1,65$ |

La dérivée n'est pas finie à gauche en 1, comme le montre 2.c, mais la valeur de  $g$  y reste finie.

2. e. La fonction  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $[0, 1[$  et  $g''(x) = f'(x)$ . Pour  $0 < x < 1$ ,  $f'(x) > 0$  ; de plus,  $g''(0) = 1/2$ .

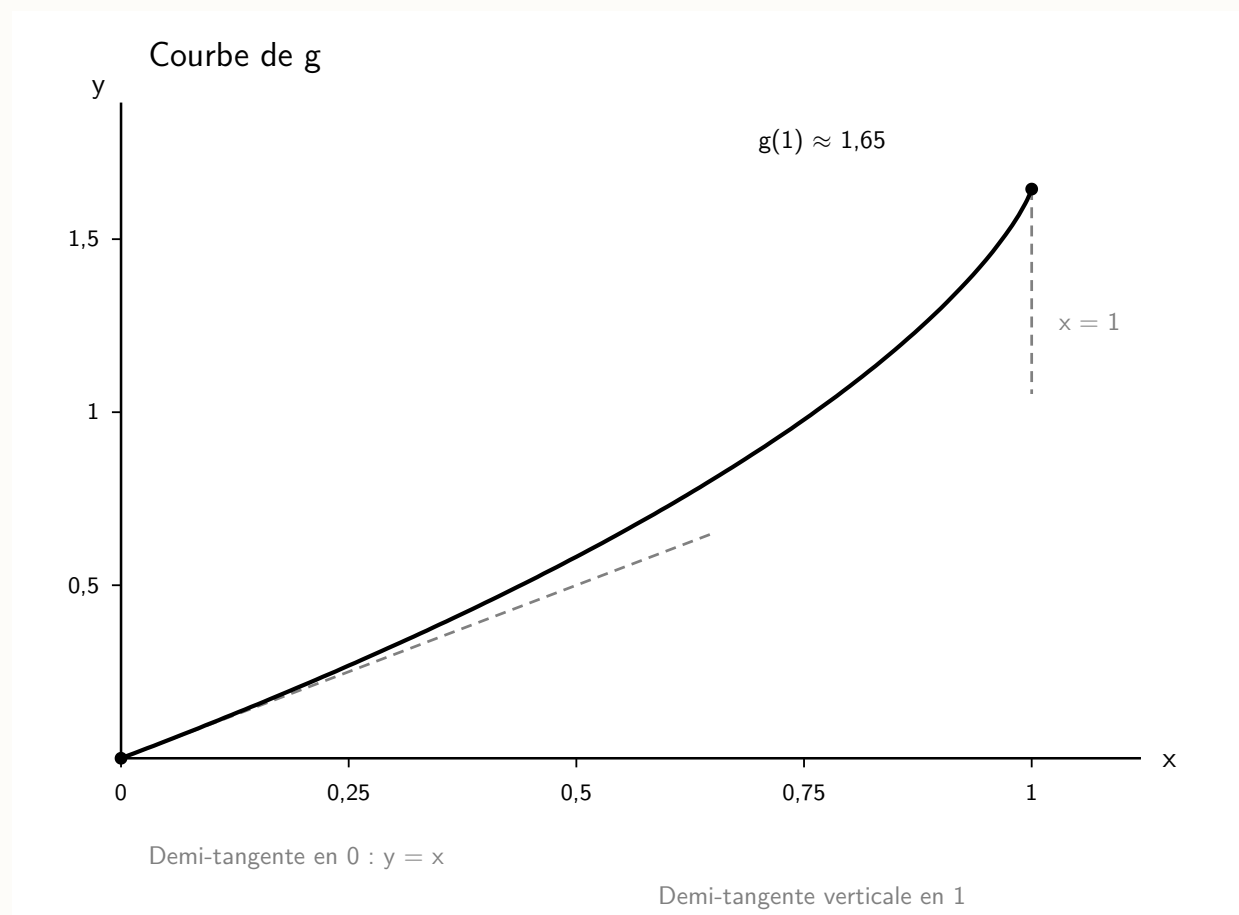
Ainsi,  $g''$  est positive sur l'intérieur de l'intervalle. Le critère de convexité donne que  $g$

est convexe sur  $[0, 1[$ . On peut aussi le lire directement sur sa dérivée  $g' = f$ , qui est strictement croissante.

2. f. La courbe de  $g$  part de l'origine, est strictement croissante et convexe, et atteint le point  $(1, g(1))$ , avec  $g(1) \simeq 1,65$ .

En 0,  $g'(0) = 1$ , donc la demi-tangente à droite est la droite  $y = x$ .

En 1, la fonction est continue et la pente des cordes  $[g(x) - g(1)]/(x - 1)$  tend vers  $+\infty$ . La courbe a donc une demi-tangente verticale à gauche au point  $(1, g(1))$ , d'équation  $x = 1$ . Cette droite est une tangente au point final, et non une asymptote :  $g(1)$  est fini.



3. a. Pour tout  $t \in [0, 1[, |t| < 1$ . La série géométrique de raison  $t$  converge et sa somme est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} t^k = \frac{1}{1-t}.$$

Lorsque  $t = 0$ , le terme d'indice 0 vaut 1 et tous les suivants sont nuls, donc la même formule reste vraie.

Le reste après le terme d'indice  $n$  est bien la série

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k,$$

définie pour tout  $t \in [0, 1[$ .

3. b. Pour  $0 < t < 1$ , on décale les indices d'une série convergente :

$$R_n(t) = t^{n+1} \sum_{j=0}^{+\infty} t^j = \frac{t^{n+1}}{1-t}.$$

Pour  $t = 0$ , tous les termes du reste sont nuls, et la formule donne également 0.

Le numérateur est polynomial et le dénominateur continu et non nul sur  $[0, 1[$ . Le quotient est donc continu sur cet intervalle, pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ .

3. c. La somme géométrique se décompose exactement en une somme finie et son reste :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + R_n(t).$$

Pour  $x < 1$ , toutes ces fonctions sont continues sur  $[0, x]$ . En intégrant l'égalité sur ce segment et en utilisant seulement la linéarité pour la somme finie :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k dt + \int_0^x R_n(t) dt.$$

Comme  $\int_0^x t^k dt = x^{k+1}/(k+1)$ , cela donne l'égalité demandée :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t) dt.$$

Pour  $x = 0$ , les deux membres valent 0. Aucun échange entre une intégrale et une somme infinie n'a été utilisé.

3. d. Si  $0 \leq t \leq x < 1$ , la formule de 3.b donne :

$$0 \leq R_n(t) = \frac{t^{n+1}}{1-t} \leq \frac{t^{n+1}}{1-x}.$$

Par croissance de l'intégrale sur le segment :

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{1}{1-x} \int_0^x t^{n+1} dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}.$$

Puisque  $n+2 \geq 2$  et  $x \in [0, 1[$ ,  $x^{n+2} \leq x$ . On obtient donc la borne demandée :

$$0 \leq \int_0^x R_n(t) dt \leq \frac{x}{(n+2)(1-x)}.$$

Tous les dénominateurs sont strictement positifs ; pour  $x = 0$ , l'inégalité est une égalité.

3. e. Fixons  $x \in [0, 1[$ . La borne de 3.d tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , car  $x$  est fixé et  $1-x > 0$ .

Par 3.c, les sommes partielles vérifient :

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x R_n(t) dt.$$

Elles convergent donc vers  $\int_0^x (1-t)^{-1} dt = -\ln(1-x)$ . Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x).$$

Pour  $x > 0$ , on divise les sommes partielles et leur limite par  $x$ , qui est une constante non nulle. La série

$$\sum_{k \geq 0} x^k / (k+1)$$

converge alors et sa somme vaut  $-\ln(1-x)/x = f(x)$ .

Pour  $x = 0$ , la série a pour premier terme 1 et pour autres termes 0, donc sa somme vaut  $1 = f(0)$ . Finalement :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1}.$$

4. a. Soit  $x \in [0, 1]$ . Pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $0 \leq x^n/n^2 \leq 1/n^2$ .

La série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge, car son exposant 2 est strictement supérieur à 1. Par comparaison des séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} x^n/n^2$$

converge.

Cela traite aussi les bornes : la série est nulle pour  $x = 0$  et devient la série de Riemann de référence pour  $x = 1$ .

La définition de  $\rho_n(t)$  est légitime pour  $t \in [0, 1[$ , puisque la série dont elle est un reste converge par 3.e.

4. b. La formule de 3.e donne, pour tout  $t \in [0, 1[$  :

$$\rho_n(t) = f(t) - \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k+1}.$$

Le premier terme est continu par 1.a et le second est une somme finie de fonctions polynomiales. Leur différence est donc continue sur  $[0, 1[$ .

Cette preuve traite en particulier  $t = 0$  et ne suppose aucun théorème général sur la continuité d'une somme infinie.

4. c. Pour  $t \in [0, 1[$ , l'égalité précédente s'écrit

$$f(t) = \sum_{k=0}^n t^k / (k+1) + \rho_n(t).$$

Pour  $x < 1$ , toutes les fonctions intervenant sont continues sur  $[0, x]$ . On intègre cette égalité en utilisant la linéarité pour la seule somme finie :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \int_0^x t^k dt + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

La primitive des puissances donne donc :

$$g(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t) dt.$$

Pour  $x = 0$ , cette égalité est encore vraie, avec tous les termes nuls.

4. d. Tous les termes définissant  $\rho_n(t)$  sont positifs ou nuls. Pour  $k \geq n + 1$ , on a

$k + 1 \geq n + 2$ , donc :

$$0 \leq \frac{t^k}{k+1} \leq \frac{t^k}{n+2}.$$

On somme d'abord cette inégalité de  $k = n + 1$  à un entier  $N$ , puis on fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ . Les deux séries convergent et la somme géométrique du membre de droite vaut  $t^{n+1}/[(n+2)(1-t)]$ .

Ainsi :

$$0 \leq \rho_n(t) \leq \frac{t^{n+1}}{(n+2)(1-t)} \leq \frac{1}{(n+2)(1-t)},$$

la dernière inégalité venant de  $0 \leq t^{n+1} \leq 1$ . La conclusion reste vraie en  $t = 0$ , où  $\rho_n(0) = 0$ .

4. e. Pour  $0 \leq x < 1$ , on intègre l'encadrement de 4.d sur  $[0, x]$ . La continuité de  $\rho_n$  et celle de  $1/(1-t)$  sur ce segment assurent l'existence des intégrales :

$$0 \leq \int_0^x \rho_n(t) dt \leq \frac{1}{n+2} \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \frac{-\ln(1-x)}{n+2}.$$

Le numérateur de la borne est positif ou nul puisque  $1-x \in ]0, 1]$ . Pour  $x = 0$ , les trois termes valent 0.

4. f. Fixons  $x \in [0, 1[$ . Le nombre  $-\ln(1-x)$  est fini, donc la borne de 4.e tend vers 0

lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Par encadrement,  $\int_0^x \rho_n(t) dt \rightarrow 0$ .

La formule de 4.c entraîne alors :

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}.$$

La série correspondante est convergente par 4.a. En changeant l'indice  $j = k + 1$ , on

obtient :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad g(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{x^j}{j^2}.$$

La conclusion a été obtenue en intégrant des sommes finies puis en contrôlant leurs restes, sans échange non justifié entre intégrale et somme infinie. En  $x = 0$ , elle donne bien  $g(0) = 0$ .

## Relevé des adaptations

---

Problème 2, 1.b : rectification de « calculer  $f(t)$  » en « calculer  $f'(t)$  ». L'expression de  $f(t)$  est donnée dans le préambule, et la question 1.c demande ensuite la limite de  $f'(t)$ .