



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1998

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PARTIE I : Étude d'un produit scalaire

1.a. On montre d'abord la convergence absolue pour les monômes. Pour $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et positive ou nulle. Par croissance comparée, $t^k e^{-t/2} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$. Il existe donc $R > 0$ tel que, pour $t \geq R$:

$$0 \leq t^k e^{-t} \leq e^{-t/2}.$$

L'intégrale de $e^{-t/2}$ sur $[R, +\infty[$ converge. Par comparaison, celle de $t^k e^{-t}$ converge ; il n'y a pas de difficulté près de 0 par continuité.

Pour un polynôme

$$P(t) = \sum_{k=0}^d a_k t^k,$$

on a, pour $t \geq 0$:

$$|P(t)| e^{-t} \leq \sum_{k=0}^d |a_k| t^k e^{-t}.$$

Le membre droit a une intégrale convergente, comme somme finie de fonctions intégrables. Ainsi $\int_0^{+\infty} |P(t)| e^{-t} dt$ converge. L'intégrale demandée est donc absolument convergente, y compris lorsque $P = 0$.

1.b. Pour $R > 0$, on effectue l'intégration par parties sur le segment $[0, R]$, avec $u(t) = t^{k+1}$ et $v'(t) = e^{-t}$:

$$\int_0^R t^{k+1} e^{-t} dt = [-t^{k+1} e^{-t}]_0^R + (k+1) \int_0^R t^k e^{-t} dt.$$

Le terme en 0 est nul puisque $k+1 \geq 1$. Par croissance comparée, $R^{k+1} e^{-R} \rightarrow 0$. Les deux intégrales convergent par I.1.a, donc le passage à la limite donne :

$$I_{k+1} = (k+1)I_k.$$

D'autre part, $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$. Une récurrence donne $I_k = k!$ pour tout $k \geq 0$, avec $0! = 1$.

2.a. Pour $P, Q \in E_n$, le produit PQ est un polynôme, donc l'intégrale définissant $\langle P, Q \rangle$ converge absolument par I.1.a. L'application est bien définie. Elle est symétrique puisque $PQ = QP$, et bilinéaire par linéarité des intégrales convergentes. De plus :

$$\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt \geq 0.$$

Si P est non nul, il ne peut pas s'annuler sur tout $]0, +\infty[$, car un polynôme non nul n'a qu'un nombre fini de racines. Il existe donc $t_0 > 0$ tel que $P(t_0) \neq 0$. La fonction continue $P(t)^2 e^{-t}$ est strictement positive en t_0 , donc elle est minorée par une constante strictement positive sur un petit segment de longueur positive autour de t_0 . Son intégrale totale est alors strictement positive.

Ainsi $\langle P, P \rangle = 0$ si et seulement si $P = 0$. Toutes les propriétés d'un produit scalaire sont vérifiées.

2.b. Pour $0 \leq i, j \leq n$, le produit de monômes est t^{i+j} . Donc, d'après I.1.b :

$$\langle X^i, X^j \rangle = I_{i+j} = (i+j)!.$$

Même si $i+j > n$, le calcul reste valable : l'intégrabilité a été établie pour tout polynôme, sans restriction de degré.

3.a. Question adaptée au programme actuel : la construction est guidée par des conditions d'orthogonalité, sans supposer connu un procédé général d'orthogonalisation.

Méthode 1 — Détermination des coefficients.

Un polynôme unitaire de degré 0 est nécessairement $Q_0 = 1$. Écrivons $Q_1 = X + c$. La condition d'orthogonalité est :

$$0 = \langle Q_1, Q_0 \rangle = I_1 + cI_0 = 1 + c.$$

Donc $Q_1 = X - 1$. Écrivons maintenant $Q_2 = X^2 + dX + e$. La condition $\langle Q_2, Q_0 \rangle = 0$ donne :

$$2 + d + e = 0.$$

Puisque $\langle 1, Q_1 \rangle = 0$, la condition $\langle Q_2, Q_1 \rangle = 0$ donne :

$$0 = I_3 - I_2 + d(I_2 - I_1) = 6 - 2 + d(2 - 1) = 4 + d.$$

Ainsi $d = -4$ puis $e = 2$. On obtient $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 1$, $Q_2 = X^2 - 4X + 2$. Chacun est unitaire et de degré demandé, et les trois produits scalaires entre polynômes distincts sont nuls par construction.

Calculons les normes nécessaires ensuite :

$$\langle Q_0, Q_0 \rangle = 1,$$

$$\langle Q_1, Q_1 \rangle = I_2 - 2I_1 + I_0 = 2 - 2 + 1 = 1,$$

$$\langle Q_2, Q_2 \rangle = I_4 - 8I_3 + 20I_2 - 16I_1 + 4I_0 = 24 - 48 + 40 - 16 + 4 = 4.$$

Méthode 2 — Soustraction des projections sur les directions déjà construites.

On explique la procédure dans ce cas particulier. Pour obtenir un polynôme orthogonal à Q_0 , on soustrait au polynôme de départ un multiple de Q_0 choisi pour annuler son produit scalaire avec Q_0 :

$$Q_1 = X - \frac{\langle X, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0 = X - 1.$$

Le dénominateur vaut 1. On a $\langle Q_1, Q_1 \rangle = 1$ et $\langle Q_0, Q_1 \rangle = 0$. Pour le degré 2, posons :

$$Q_2 = X^2 - \frac{\langle X^2, Q_0 \rangle}{\langle Q_0, Q_0 \rangle} Q_0 - \frac{\langle X^2, Q_1 \rangle}{\langle Q_1, Q_1 \rangle} Q_1.$$

La bilinéarité et $\langle Q_0, Q_1 \rangle = 0$ montrent directement que le produit scalaire de cette expression avec chaque Q_i , pour $i = 0, 1$, est nul. Les numérateurs valent 2 et $6 - 2 = 4$, donc :

$$Q_2 = X^2 - 2 - 4(X - 1) = X^2 - 4X + 2.$$

Les soustractions portent sur des polynômes de degrés plus petits, donc le coefficient dominant reste 1. Cette méthode retrouve la même famille. La première approche résout un système sur les coefficients ; la seconde construit les corrections orthogonales successives.

3.b. L'intégrale existe par I.1.a, puisque l'intégrande est un polynôme multiplié par e^{-t} . Décomposons le polynôme dans la famille orthogonale obtenue :

$$X^2 + uX + v = Q_2 + (u + 4)Q_1 + (u + v + 2)Q_0.$$

En développant le carré de sa norme, tous les termes croisés sont nuls par orthogonalité.

On obtient donc exactement :

$$\int_0^{+\infty} (t^2 + ut + v)^2 e^{-t} dt = \langle Q_2, Q_2 \rangle + (u + 4)^2 \langle Q_1, Q_1 \rangle + (u + v + 2)^2 \langle Q_0, Q_0 \rangle.$$

Avec les normes calculées en I.3.a, cette identité devient

$$H(u, v) = 4 + (u + 4)^2 + (u + v + 2)^2.$$

3.c. Méthode 1 — Somme de carrés et vérification de la hessienne.

La formule de I.3.b montre que H est polynomiale, donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Elle donne aussi $H(u, v) \geq 4$, avec égalité exactement lorsque $u + 4 = 0$ et $u + v + 2 = 0$, soit $(u, v) = (-4, 2)$. Ce point est donc l'unique minimum global, de valeur 4.

Vérifions également les points critiques et la hessienne. On a :

$$\nabla H(u, v) = \begin{pmatrix} 4u + 2v + 12 \\ 2u + 2v + 4 \end{pmatrix}.$$

L'annulation de la seconde composante donne $u + v = -2$; la première donne alors $2u + 8 = 0$. L'unique point critique est bien $(-4, 2)$. La hessienne, constante, est :

$$H_H(u, v) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour chercher ses valeurs propres sans déterminant, on résout le système $4x + 2y = \lambda x$, $2x + 2y = \lambda y$. Un vecteur propre non nul ne peut pas avoir $x = 0$, puisque la première

équation imposerait alors $y = 0$. On écrit donc $y = (\lambda - 4)x/2$, puis la seconde équation donne :

$$4 + (2 - \lambda)(\lambda - 4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda - 3)^2 = 5.$$

Pour $\lambda = 3 \pm \sqrt{5}$, le vecteur $(2, \lambda - 4)$ vérifie le système, donc les deux valeurs propres sont bien $3 - \sqrt{5}$ et $3 + \sqrt{5}$. Elles sont strictement positives puisque $\sqrt{5} < 3$. Le critère hessien confirme un minimum local strict en $(-4, 2)$; la somme de carrés établit en plus son caractère global et sa valeur 4.

Méthode 2 — Critère global sur un ouvert convexe.

Le domaine $\mathbb{R}^2$ est un ouvert convexe, H est de classe $\mathcal{C}^2$, et sa hessienne a partout les deux valeurs propres strictement positives calculées ci-dessus. Le critère global du programme s'applique donc au point critique $(-4, 2)$: c'est un minimum global. Sa valeur est $H(-4, 2) = 4$.

Pour vérifier l'unicité avec la forme quadratique, si $(h, k) \neq (0, 0)$, la formule exacte de Taylor pour ce polynôme de degré 2 donne :

$$H(-4 + h, 2 + k) - H(-4, 2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} H_H \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = h^2 + (h + k)^2 > 0.$$

La première méthode exploite directement la décomposition orthogonale de la question précédente ; la seconde illustre le critère hessien global, applicable à d'autres fonctions dont les dérivées secondes ont le même signe sur un domaine convexe.

PARTIE II : Construction d'une base orthogonale

1. La dérivation et la multiplication par un polynôme fixé sont linéaires, donc Φ est linéaire. Pour $P \in E_n$, XP'' est de degré au plus $n - 1$ lorsqu'il n'est pas nul, et $(1 - X)P'$ est de degré au plus n . Les cas constant et nul ne posent pas de difficulté. Ainsi $\Phi(P) \in E_n$, et Φ est un endomorphisme.

Pour la matrice, on calcule $\Phi(1) = 0$ et, pour $1 \leq j \leq n$:

$$\Phi(X^j) = j(j-1)X^{j-1} + jX^{j-1} - jX^j = j^2X^{j-1} - jX^j.$$

En numérotant lignes et colonnes de 0 à n , la matrice A est donc définie par :

$$A_{j,j} = -j \quad (0 \leq j \leq n), \quad A_{j-1,j} = j^2 \quad (1 \leq j \leq n),$$

et tous ses autres coefficients sont nuls. Elle est triangulaire supérieure avec diagonale $0, -1, \dots, -n$ et coefficients $1, 4, 9, \dots, n^2$ immédiatement au-dessus de la diagonale. Par exemple, pour $n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2.a. Pour $k = 0$, la famille comporte uniquement $\Phi(1) = 0$; elle est donc liée. Le polynôme 1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 0.

Supposons $k \geq 1$. Pour $j = 0$, $\Phi(1) + k = k$ est dans E_{k-1} . Pour $1 \leq j \leq k$:

$$\Phi(X^j) + kX^j = (k - j)X^j + j^2X^{j-1}.$$

Si $j < k$, le degré est au plus $k - 1$. Si $j = k$, le terme de degré k disparaît, et le degré est encore au plus $k - 1$. La famille entière est donc constituée de $k + 1$ polynômes dans E_{k-1} , de dimension k . Elle est liée.

Il existe par conséquent des réels $c_0, \dots, c_k$, non tous nuls, tels que

$$\sum_{j=0}^k c_j (\Phi(X^j) + kX^j) = 0.$$

Posons

$$P = \sum_{j=0}^k c_j X^j.$$

La liberté des monômes garantit $P \neq 0$. Par linéarité :

$$\Phi(P) + kP = 0.$$

Donc $-k$ est une valeur propre de Φ , comme demandé.

2.b. Les valeurs propres $0, -1, \dots, -n$ obtenues en II.2.a sont réelles et deux à deux distinctes. Elles sont au nombre de $n + 1$, qui est la dimension de E_n . Le critère de diagonalisation par l'existence d'autant de valeurs propres distinctes que la dimension donne que Φ est diagonalisable.

Sa matrice triangulaire de II.1 confirme que ces valeurs forment tout son spectre réel.

2.c. Chaque sous-espace propre est non nul, donc a une dimension au moins égale à 1. Par diagonalisation, leur somme directe est E_n et la somme de leurs dimensions vaut $n + 1$. Il y a $n + 1$ sous-espaces propres, donc chacun a la dimension 1.

Pour chaque k , on prend un vecteur propre non nul associé à $-k$ et on le divise par son coefficient dominant, qui est non nul. Cela donne un polynôme unitaire P_k . Comme tous les vecteurs de cet espace propre sont proportionnels, un seul peut avoir son coefficient dominant égal à 1. L'existence et l'unicité demandées sont donc établies.

2.d. Soit d le degré de P_k . Si $d \geq 1$, la formule de II.1 montre que le coefficient dominant de $\Phi(P_k)$ est $-d$, puisque P_k est unitaire. Dans $-kP_k$, il vaut $-k$. La comparaison des coefficients de X^d donne $d = k$.

Si $d = 0$, $P_k = 1$ et $\Phi(P_k) = 0$. L'équation $\Phi(P_k) = -kP_k$ impose alors $k = 0$.

Réciproquement, si $k = 0$, un degré $d \geq 1$ serait impossible par la comparaison précédente. Ainsi, dans tous les cas, $\deg P_k = k$.

2.e. Les polynômes $Q_0 = 1$, $Q_1 = X - 1$ et $Q_2 = X^2 - 4X + 2$ sont unitaires. On calcule :

$$\Phi(Q_0) = 0,$$

$$\Phi(Q_1) = 1 - X = -(X - 1) = -Q_1,$$

$$\Phi(Q_2) = 2X + (1 - X)(2X - 4) = -2X^2 + 8X - 4 = -2Q_2.$$

Par l'unicité du polynôme unitaire dans chaque sous-espace propre, $P_0 = Q_0$, $P_1 = Q_1$ et $P_2 = Q_2$.

3.a. Pour $P, Q \in E_n$, les deux intégrandes de l'identité sont des polynômes multipliés par e^{-t} ; leurs intégrales convergent absolument par I.1.a. La dérivée indiquée vaut :

$$(tP'(t)e^{-t})' = (tP''(t) + (1 - t)P'(t))e^{-t} = \Phi(P)(t)e^{-t}.$$

On effectue d'abord une intégration par parties sur $[0, R]$:

$$\int_0^R \Phi(P)(t)Q(t)e^{-t} dt = [tP'(t)Q(t)e^{-t}]_0^R - \int_0^R tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt.$$

Le terme de bord en 0 est nul à cause du facteur t . Le terme en R tend vers 0, puisque c'est un polynôme en R multiplié par e^{-R} . Le passage à la limite dans les intégrales convergentes donne :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt.$$

3.b. Le membre droit de II.3.a est symétrique en P et Q . En échangeant les arguments puis en utilisant la symétrie du produit scalaire :

$$\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle \Phi(Q), P \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle.$$

Comme Φ est déjà un endomorphisme, cette égalité pour tous $P, Q \in E_n$ prouve qu'il est symétrique.

3.c. Les vecteurs $P_0, \dots, P_n$ sont associés à des valeurs propres distinctes ; ils sont donc libres et constituent une base de E_n . L'endomorphisme Φ est symétrique sur cet espace euclidien, donc ses espaces propres distincts sont orthogonaux. La base est donc orthogonale.

On peut vérifier l'orthogonalité directement : pour $i \neq j$, la symétrie donne $-i\langle P_i, P_j \rangle = -j\langle P_i, P_j \rangle$. Comme $i - j \neq 0$, $\langle P_i, P_j \rangle = 0$.

PARTIE III : Calcul d'une valeur approchée d'une intégrale

On a $a = 2 - \sqrt{2} > 0$, $b = 2 + \sqrt{2} > a$, $a + b = 4$ et $ab = 2$.

1.a. Méthode 1 — Exactitude sur une base.

Toute fonction polynôme de degré au plus 1 est une combinaison linéaire de 1 et de X . L'égalité demandée est linéaire en P ; elle est donc vraie pour tous ces polynômes si et

seulement si elle est vraie pour $P = 1$ et $P = X$. Comme $I_0 = I_1 = 1$, cela donne le système :

$$\alpha + \beta = 1, \quad a\alpha + b\beta = 1.$$

Puisque $b - a = 2\sqrt{2} \neq 0$, ce système a une unique solution :

$$\alpha = \frac{b-1}{b-a} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}, \quad \beta = \frac{1-a}{b-a} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Réciproquement, ces valeurs satisfont les deux équations, donc l'égalité est vraie pour tout polynôme de degré au plus 1. Les deux poids sont strictement positifs.

Méthode 2 — Interpolation affine.

Un polynôme P de degré au plus 1 vérifie :

$$P(t) = P(a)\frac{b-t}{b-a} + P(b)\frac{t-a}{b-a}.$$

En effet, les deux membres sont des polynômes de degré au plus 1 qui coïncident en deux points distincts ; leur différence est donc nulle. En intégrant cette identité et en utilisant $I_0 = I_1 = 1$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = P(a)\frac{b-1}{b-a} + P(b)\frac{1-a}{b-a}.$$

On retrouve les deux poids. La première méthode impose l'exactitude sur une base ; la seconde explique pourquoi les coefficients sont les intégrales des deux polynômes d'interpolation.

1.b. Par orthogonalité de $P_2 = Q_2$ et $P_0 = 1$, $\int_0^{+\infty} P_2(t)e^{-t} dt = \langle P_2, 1 \rangle = 0$. On peut aussi vérifier directement $I_2 - 4I_1 + 2I_0 = 2 - 4 + 2 = 0$.

Puisque a et b sont les deux racines de P_2 , $\alpha P_2(a) + \beta P_2(b) = 0$. Les deux membres sont donc égaux.

1.c. La division euclidienne de P par le polynôme unitaire P_2 , de degré 2, donne $P = QP_2 + R$, avec $\deg R < 2$ ou $R = 0$. Si P a le degré au plus 3, le quotient a le degré au plus 1 lorsqu'il est non nul. Ainsi Q et R appartiennent tous deux à E_1 .

Comme $P_0 = 1$ et $P_1 = X - 1$ forment une base de E_1 , et que P_2 est orthogonal à chacun, la bilinéarité donne $\langle P_2, Q \rangle = 0$. Toutes les intégrales suivantes convergent par I.1.a. On en déduit :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \langle P_2, Q \rangle + \int_0^{+\infty} R(t)e^{-t} dt = \alpha R(a) + \beta R(b).$$

En a et b , le terme QP_2 est nul, donc $R(a) = P(a)$ et $R(b) = P(b)$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \alpha P(a) + \beta P(b)$$

pour tout polynôme de degré au plus 3. La formule possède donc une exactitude allant au-delà des seules fonctions affines utilisées pour déterminer les poids.

2.a. Les hypothèses sur f donnent une fonction de classe $\mathcal{C}^4$ sur chaque segment $[0, t]$, avec dérivées à droite à l'extrémité 0, et $|f^{(4)}| \leq M$. En particulier $M \geq 0$. L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, entre 0 et $t \geq 0$, donne :

$$\left| f(t) - \sum_{j=0}^3 \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j \right| \leq \frac{M}{4!} t^4.$$

L'inégalité triangulaire permet donc de choisir :

$$T(t) = |f(0)| + |f'(0)|t + \frac{|f''(0)|}{2}t^2 + \frac{|f'''(0)|}{6}t^3 + \frac{M}{24}t^4.$$

Ce polynôme est de degré au plus 4 et vérifie $0 \leq |f(t)| \leq T(t)$ pour $t \geq 0$. L'intégrale de $T(t)e^{-t}$ converge par I.1.a. Par comparaison, celle de $|f(t)|e^{-t}$ converge. L'intégrale demandée est donc absolument convergente.

2.b. Méthode 1 — Noyau et dimensions.

Les évaluations et les évaluations des dérivées sont linéaires, donc D est linéaire. Si $D(P) = 0$, on a $P(a) = P'(a) = P(b) = P'(b) = 0$. Si P était non nul, a et b seraient deux racines distinctes de multiplicité au moins 2. Le degré de P serait alors au moins 4, ce qui contredit $P \in E_3$. Donc $P = 0$ et D est injective.

Les espaces E_3 et $\mathbb{R}^4$ ont tous deux la dimension 4. Une application linéaire injective entre eux est bijective. Donc D est un isomorphisme.

Méthode 2 — Construction explicite d'un inverse.

Posons $h = b - a > 0$ et $z = (X - a)/h$. Définissons les quatre polynômes, chacun de degré au plus 3 :

$$A_a = (1 + 2z)(1 - z)^2, \quad B_a = hz(1 - z)^2,$$

$$A_b = z^2(3 - 2z), \quad B_b = hz^2(z - 1).$$

La dérivation par rapport à X utilise $z' = 1/h$. En développant les expressions en z et en évaluant en $z = 0$ et $z = 1$, on vérifie :

Polynôme	Valeur en a	Dérivée en a	Valeur en b	Dérivée en b
A_a	1	0	0	0
B_a	0	1	0	0
A_b	0	0	1	0
B_b	0	0	0	1

Par exemple, $(1 + 2z)(1 - z)^2 = 1 - 3z^2 + 2z^3$ a une dérivée nulle en 0 et en 1 ; $z(1 - z)^2 = z - 2z^2 + z^3$ a une dérivée égale à 1 en 0 et à 0 en 1. Les deux autres expressions se développent en $3z^2 - 2z^3$ et $z^3 - z^2$, ce qui donne les deux dernières lignes. Le facteur h compense le facteur $1/h$ dans les dérivées de B_a et B_b .

Pour tout quadruplet (r_0, r_1, r_2, r_3) , le polynôme $r_0A_a + r_1B_a + r_2A_b + r_3B_b$ a donc pour image ce quadruplet. Les quatre polynômes sont libres puisque leurs images sont les quatre vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$; ils forment une base de E_3 . Cette formule est l'inverse de D , ce qui prouve qu'il est un isomorphisme.

La première méthode prouve la bijectivité sans calculer l'interpolant ; la seconde fournit un procédé explicite pour le construire.

2.c. Le quadruplet $(f(a), f'(a), f(b), f'(b))$ appartient à $\mathbb{R}^4$. La bijectivité de D lui donne un unique antécédent $S \in E_3$. Les quatre égalités demandées sont précisément l'égalité $D(S) = (f(a), f'(a), f(b), f'(b))$.

Si l'on souhaite l'explicitier, les polynômes construits en III.2.b donnent :

$$S = f(a)A_a + f'(a)B_a + f(b)A_b + f'(b)B_b.$$

L'existence et l'unicité ne nécessitent aucun théorème général d'interpolation supposé connu.

3.a. Posons $C = (f(x_0) - S(x_0))/(P_2(x_0))^2$. Ce réel est bien défini puisque x_0 est distinct des seules racines a, b de P_2 . On a $g = f - S - CP_2^2$.

En a et b , P_2 est nul et S coïncide avec f , donc $g(a) = g(b) = 0$. En x_0 , la définition de C donne aussi $g(x_0) = 0$.

Pour préparer l'application répétée de Rolle, on remarque de plus :

$$g' = f' - S' - 2CP_2P_2'.$$

Les conditions d'interpolation des dérivées et $P_2(a) = P_2(b) = 0$ impliquent $g'(a) = g'(b) = 0$.

3.b. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^4$ sur chaque segment utile. On peut donc appliquer Rolle successivement ; toutes les fonctions considérées sont continues sur les segments fermés et dérivables dans leurs intérieurs.

Si $a < x_0 < b$, les égalités $g(a) = g(x_0) = g(b) = 0$ donnent deux points $\xi_1 \in]a, x_0[$ et $\xi_2 \in]x_0, b[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$. Avec $g'(a) = g'(b) = 0$, cela donne quatre zéros distincts, ordonnés ainsi :

$$a < \xi_1 < x_0 < \xi_2 < b.$$

Si $0 \leq x_0 < a$, Rolle s'applique sur $[x_0, a]$ et $[a, b]$. Il donne $\xi_1 \in]x_0, a[$ et $\xi_2 \in]a, b[$. Les quatre zéros distincts de g' sont alors ξ_1, a, ξ_2, b , dans cet ordre.

Si $x_0 > b$, Rolle s'applique sur $[a, b]$ et $[b, x_0]$. Il donne $\xi_1 \in]a, b[$ et $\xi_2 \in]b, x_0[$. Les quatre zéros distincts de g' sont a, ξ_1, b, ξ_2 , dans cet ordre.

Ces cas couvrent toutes les positions possibles de x_0 . Lorsque $x_0 = 0$, le premier point donné par Rolle est dans $]0, a[$; il reste donc strictement positif. Dans tous les cas, les quatre zéros de g' sont strictement positifs. Notons-les $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$.

Rolle appliqué à g' entre les zéros consécutifs donne trois zéros de g'' , un dans chaque intervalle $]r_i, r_{i+1}[$. Ils sont distincts. Rolle appliqué à g'' entre ces trois zéros donne deux zéros distincts de g'' . Enfin, Rolle appliqué à g'' entre ces deux zéros donne un point $c \in]r_1, r_4[\subset]0, +\infty[$ tel que $g^{(4)}(c) = 0$.

3.c. Le polynôme S est de degré au plus 3, donc $S^{(4)} = 0$. Comme P_2 est unitaire de degré 2, son carré est unitaire de degré 4 et sa dérivée quatrième est la constante $4! = 24$. Ainsi :

$$g^{(4)}(t) = f^{(4)}(t) - 24C.$$

En c , la relation de III.3.b donne $0 = f^{(4)}(c) - 24C$, donc $C = f^{(4)}(c)/24$. En remplaçant C par sa définition :

$$f(x_0) - S(x_0) = \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} f^{(4)}(c).$$

Puisque $c > 0$ et que la dérivée quatrième est bornée en valeur absolue par M :

$$|f(x_0) - S(x_0)| \leq \frac{(P_2(x_0))^2}{4!} M.$$

Le point c peut dépendre de x_0 ; aucune indépendance de ce choix n'est nécessaire.

3.d. Pour $x \notin \{a, b\}$, on applique III.3.c en choisissant $x_0 = x$. Pour $x = a$ ou $x = b$, $f(x) - S(x) = 0$ par interpolation, et $P_2(x) = 0$; l'inégalité est donc encore vraie, avec égalité.

Ainsi, pour tout $x \geq 0$:

$$|f(x) - S(x)| \leq \frac{M}{24} (P_2(x))^2.$$

Le cas $x = 0$ est inclus dans III.3.c puisque $a, b > 0$.

3.e. L'intégrale de $f(x)e^{-x}$ converge absolument par III.2.a et celle de $S(x)e^{-x}$ par I.1.a. Comme $S \in E_3$, la formule exacte de III.1.c donne :

$$\int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx = \alpha S(a) + \beta S(b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

L'erreur est donc l'intégrale de $(f - S)e^{-x}$. Par l'inégalité triangulaire, la majoration de III.3.d et la convergence de l'intégrale du polynôme P_2^2 :

$$\left| \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x} dx - \alpha f(a) - \beta f(b) \right| \leq \int_0^{+\infty} |f(x) - S(x)|e^{-x} dx$$

$$\leq \frac{M}{24} \int_0^{+\infty} P_2(x)^2 e^{-x} dx.$$

Or $P_2 = Q_2$ et I.3.a donne $\int_0^{+\infty} P_2(x)^2 e^{-x} dx = 4$. La borne d'erreur est donc $4M/24 = M/6$, comme demandé.

4. La fonction $f(t) = 1/(10 + t)$ est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0, +\infty[$. Ses dérivées vérifient :

$$f'(t) = -\frac{1}{(10+t)^2}, \quad f''(t) = \frac{2}{(10+t)^3}, \quad f'''(t) = -\frac{6}{(10+t)^4}, \quad f^{(4)}(t) = \frac{24}{(10+t)^5}.$$

La dérivée quatrième est continue, positive et bornée par $M = 24/10^5$. Toutes les hypothèses de la partie III sont vérifiées. Posons :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{10+t} dt, \quad q = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

La question III.3.e donne $|I - q| \leq M/6 = 4 \times 10^{-5}$.

Méthode 1 — Utilisation de l'encadrement numérique admis.

L'encadrement fourni dans le sujet porte exactement sur q , puisque $\alpha = (2 + \sqrt{2})/4$ est le poids de $f(a)$ et $\beta = (2 - \sqrt{2})/4$ celui de $f(b)$. Le résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé original, est $0,0915 \leq q \leq 0,0916$.

Avec la borne d'erreur :

$$0,09146 \leq I \leq 0,09164.$$

Le milieu de cet intervalle est 0,09155 et sa demi-longueur vaut 0,00009. Une réponse justifiée par les seules bornes fournies est donc :

$$I \approx 0,09155, \quad |I - 0,09155| \leq 9 \times 10^{-5}.$$

Il s'agit d'une précision en erreur absolue ; on ne déduit pas le nombre de décimales garanties du seul nombre de chiffres écrits.

Méthode 2 — Calcul exact du terme d'approximation.

On peut améliorer la précision sans calculer l'intégrale. Les relations $\alpha + \beta = 1$, $\alpha a + \beta b = 1$ et $a + b = 4$ donnent $\alpha b + \beta a = 3$. Ainsi :

$$q = \frac{\alpha}{10+a} + \frac{\beta}{10+b} = \frac{10(\alpha + \beta) + \alpha b + \beta a}{(10+a)(10+b)} = \frac{13}{100 + 10(a+b) + ab} = \frac{13}{142}.$$

La différence entre le nombre décimal choisi et cette fraction est :

$$\left| 0,09155 - \frac{13}{142} \right| = \frac{1}{1420000}.$$

L'inégalité triangulaire donne alors :

$$|I - 0,09155| \leq 4 \times 10^{-5} + \frac{1}{1420000} < 4,1 \times 10^{-5}.$$

Donc 0,09155 est aussi une valeur approchée avec une erreur absolue strictement inférieure à 0,000041. La première méthode utilise directement les données admises ; la seconde supprime l'incertitude sur le calcul de q et améliore la précision certifiée.

Relevé des adaptations

- I.3.a. La référence à un procédé général d'orthogonalisation non supposé connu est remplacée par des indications pour déterminer successivement Q_0 , Q_1 et Q_2 à l'aide des conditions d'orthogonalité. L'objectif, la numérotation et le résultat $Q_2 = X^2 - 4X + 2$ sont conservés.