



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1995

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Dans tout le problème, les scalaires sont réels et $n \geq 3$.

1. (a) Valeurs propres de A_3

Méthode 1 — Résoudre le système définissant les vecteurs propres.

Pour $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$, l'équation $A_3 V = \lambda V$ équivaut à

$$\begin{cases} b = \lambda a, \\ 2a + 2c = \lambda b, \\ b = \lambda c. \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$, alors $b = 0$ et $c = -a$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient : 0 est valeur propre.

Si $\lambda \neq 0$, les première et troisième équations donnent $a = c$. Alors $a \neq 0$, car $a = 0$ entraînerait $b = c = 0$. La deuxième équation devient $4a = \lambda^2 a$, donc $\lambda^2 = 4$. Ainsi $\lambda = 2$

ou $\lambda = -2$. Réciproquement, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont respectivement associés à

2 et -2.

Le spectre est donc $\boxed{\text{Sp}(A_3) = \{-2, 0, 2\}}$.

Méthode 2 — Utiliser deux sous-espaces stables.

Posons $L = \{(a, 0, -a) : a \in \mathbb{R}\}$ et $S = \{(a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Tout vecteur se décompose suivant

$$(a, b, c) = \left(\frac{a-c}{2}, 0, -\frac{a-c}{2}\right) + \left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}\right).$$

Les deux espaces sont supplémentaires. La matrice A_3 est nulle sur L et transforme (a, b, a) en $(b, 4a, b)$, qui appartient à S .

Dans la base $((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ de S , sa restriction a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. Ses vecteurs

propres vérifient $b = \lambda a$ et $4a = \lambda b$: les valeurs propres sont 2 et -2 , avec les vecteurs déjà obtenus. En ajoutant l'action nulle sur L , on retrouve exactement les trois valeurs propres $-2, 0$ et 2 .

La première méthode s'applique directement à un petit système ; la seconde exploite la symétrie entre les première et troisième coordonnées.

1. (b) Diagonalisation de A_3

Les trois vecteurs propres

$$V_{-2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont associés à trois valeurs propres distinctes. Ils sont donc linéairement indépendants et forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Avec $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(-2, 0, 2)$, les relations précédentes donnent

$A_3 Q = Q D$. Puisque les colonnes de Q forment une base, Q est inversible et $A_3 = Q D Q^{-1}$.

Ainsi A_3 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

1. (c) Inversibilité de A_3

Le vecteur $V_0 \neq 0$ vérifie $A_3 V_0 = 0$. Le noyau de A_3 n'est donc pas réduit au vecteur nul. Par la caractérisation de l'inversibilité d'une matrice carrée,

A_3 n'est pas inversible.

2. (a) Images des monômes

La colonne $j + 1$ de A_n contient les coordonnées de $u(X^j)$ dans la base canonique. La première colonne donne $u(1) = (n - 1)X$ et la dernière donne $u(X^{n-1}) = (n - 1)X^{n-2}$.

Pour $1 \leq j \leq n - 2$, la colonne $j + 1$ a deux coefficients non nuls : j à la ligne j et $n - 1 - j$ à la ligne $j + 2$. Par conséquent,

$$u(X^j) = jX^{j-1} + (n - 1 - j)X^{j+1} \quad (1 \leq j \leq n - 2).$$

2. (b) Expression de $u(P)$

Vérifions d'abord la formule sur les monômes, puis utilisons la linéarité. Pour $1 \leq j \leq n - 2$,

$$(n - 1)XX^j - (X^2 - 1)(X^j)' = (n - 1)X^{j+1} - jX^{j+1} + jX^{j-1} = u(X^j).$$

Pour le monôme constant, l'expression vaut $(n - 1)X = u(1)$. Pour le dernier monôme, elle vaut

$$(n-1)X^n - (n-1)(X^n - X^{n-2}) = (n-1)X^{n-2} = u(X^{n-1}).$$

Ainsi, si

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n-1} p_j X^j,$$

la linéarité de u , de la dérivation et de la multiplication par un polynôme donne

$$\boxed{u(P(X)) = (n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X)}.$$

Le terme éventuel de degré n s'annule, ce qui est cohérent avec $u(P) \in E$.

3. (a) Racine 1

Comme P est un vecteur propre, $P \neq 0$ et

$$(n-1)XP(X) - (X^2-1)P'(X) = \lambda P(X).$$

En évaluant en $X = 1$, on obtient $(n-1)P(1) = \lambda P(1)$, soit $(n-1-\lambda)P(1) = 0$.

Sous l'hypothèse $\lambda \neq n-1$, le facteur $n-1-\lambda$ est non nul. Donc $\boxed{P(1) = 0}$: 1 est racine de P .

3. (b) Racine -1

Évaluons la même identité en $X = -1$. Elle donne $(1-n)P(-1) = \lambda P(-1)$, donc $(1-n-\lambda)P(-1) = 0$.

Puisque $\lambda \neq 1-n$, il vient $\boxed{P(-1) = 0}$: -1 est racine de P .

3. (c) Cas $\lambda = n-1$

On a $n-1 \neq 1-n$ car $n \geq 3$. D'après 3. (b), -1 est racine de P . Comme P est non nul, cette racine possède une multiplicité $s \geq 1$ et

$$P(X) = (X+1)^s T(X), \quad T(-1) \neq 0,$$

avec T non nul de degré au plus $n-1-s$; en particulier, $T \in E$.

La dérivée est $P' = s(X+1)^{s-1}T + (X+1)^sT'$. En remplaçant dans l'équation propre et en simplifiant le facteur polynomial non nul $(X+1)^s$, on obtient l'identité

$$[(n-1)X - s(X-1) - (n-1)]T - (X^2-1)T' = 0.$$

Cette simplification est une égalité entre polynômes ; elle n'exige pas de diviser une valeur numérique en $X = -1$.

En évaluant l'identité simplifiée en -1 , on trouve $[2s - 2(n-1)]T(-1) = 0$. Puisque $T(-1) \neq 0$,

$$\boxed{s = n - 1}.$$

La relation $\deg P = s + \deg T \leq n - 1$ impose alors $\deg T = 0$. Ainsi T est constant et non nul, et les vecteurs propres considérés sont de la forme

$$\boxed{P(X) = a(X+1)^{n-1}, a \neq 0}.$$

3. (d) Cas $\lambda = 1 - n$

D'après 3. (a), 1 est racine de P . Notons $r \geq 1$ sa multiplicité :

$$P(X) = (X-1)^r T(X), \quad T(1) \neq 0.$$

La substitution dans l'équation propre et la simplification du facteur $(X-1)^r$ donnent

$$[(n-1)X - r(X+1) - (1-n)]T - (X^2-1)T' = 0.$$

Évaluons en 1 : $[2(n-1) - 2r]T(1) = 0$. Ainsi $r = n - 1$.

Comme $\deg P \leq n - 1$, le polynôme T est constant. Il est non nul car $P \neq 0$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\boxed{P(X) = a(X-1)^{n-1}}.$$

3. (e) Valeurs propres intermédiaires

Les hypothèses permettent d'appliquer 3. (a) et 3. (b) : 1 et -1 sont racines de P . En extrayant leurs multiplicités respectives $r \geq 1$ et $s \geq 1$, on écrit

$$P(X) = (X-1)^r (X+1)^s T(X), \quad T(1) \neq 0, \quad T(-1) \neq 0.$$

Le polynôme T est non nul et appartient à E . La contrainte sur le degré donne déjà $r + s \leq n - 1$, donc $1 \leq r \leq n - 2$.

En dérivant le produit et en substituant dans l'équation propre, la simplification du facteur $(X - 1)^r(X + 1)^s$ donne

$$[(n - 1)X - r(X + 1) - s(X - 1) - \lambda]T - (X^2 - 1)T' = 0.$$

En évaluant en 1, et en utilisant $T(1) \neq 0$, on obtient $n - 1 - 2r - \lambda = 0$, soit $\lambda = n - 1 - 2r$.

En évaluant en -1 , et en utilisant $T(-1) \neq 0$, on obtient $-(n - 1) + 2s - \lambda = 0$, soit $\lambda = 2s - (n - 1)$.

L'égalité entre ces deux expressions de λ entraîne $r + s = n - 1$. Finalement,

$$\boxed{1 \leq r \leq n - 2, \quad s = n - 1 - r, \quad \lambda = n - 1 - 2r}.$$

Enfin, $\deg P = r + s + \deg T \leq n - 1$ impose $\deg T = 0$. Le polynôme T est donc constant et non nul.

4. (a) Construction de vecteurs propres

Fixons $r \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ et posons $P_r = (X - 1)^r(X + 1)^{n-1-r}$. Ce polynôme est non nul et de degré $n - 1$.

Supposons d'abord $1 \leq r \leq n - 2$. La dérivation du produit donne

$$(X^2 - 1)P'_r = [r(X + 1) + (n - 1 - r)(X - 1)]P_r.$$

Le facteur entre crochets se simplifie en $(n - 1)X + 2r - (n - 1)$. D'après 2. (b),

$$u(P_r) = [(n - 1)X - ((n - 1)X + 2r - (n - 1))]P_r = (n - 1 - 2r)P_r.$$

Pour $r = 0$, on dérive directement $P_0 = (X + 1)^{n-1}$:

$$(X^2 - 1)P'_0 = (n - 1)(X - 1)P_0, \text{ donc } u(P_0) = (n - 1)P_0.$$

Pour $r = n - 1$, on dérive directement $P_{n-1} = (X - 1)^{n-1}$:

$$(X^2 - 1)P'_{n-1} = (n - 1)(X + 1)P_{n-1}, \text{ donc } u(P_{n-1}) = (1 - n)P_{n-1}.$$

Les trois cas se réunissent dans la formule

$$u(P_r) = (n - 1 - 2r)P_r \quad \text{pour } 0 \leq r \leq n - 1.$$

Les cas extrêmes ont été traités séparément pour éviter toute écriture comportant un exposant négatif inutile.

4. (b) Base propre et diagonalisation

Méthode 1 — Utiliser les valeurs propres distinctes.

D'après 4. (a), les n polynômes P_r sont vecteurs propres pour les valeurs propres $\lambda_r = n - 1 - 2r$. Si $r \neq k$, alors $\lambda_r - \lambda_k = 2(k - r) \neq 0$. Les valeurs propres sont donc deux à deux distinctes.

Les vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes forment une famille libre. La famille $\mathcal{C} = (P_r)_{0 \leq r \leq n-1}$ possède n éléments dans l'espace E de dimension n ; c'est donc une base de E .

La matrice de u dans cette base est

$$D_n = \text{diag}(n - 1, n - 3, \dots, 3 - n, 1 - n).$$

Si Q_n est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des P_r dans $\mathcal{B}$, elle est inversible et $A_n = Q_n D_n Q_n^{-1}$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est une base de E et A_n est diagonalisable.

Méthode 2 — Prouver la liberté par les multiplicités en 1.

Supposons qu'une relation

$$\sum_{r=0}^{n-1} c_r P_r = 0$$

comporte un coefficient non nul. Soit m le plus petit indice pour lequel $c_m \neq 0$.

En extrayant le facteur commun $(X - 1)^m$, l'égalité de polynômes devient

$$\sum_{r=m}^{n-1} c_r (X - 1)^{r-m} (X + 1)^{n-1-r} = 0.$$

En évaluant en 1, tous les termes pour $r > m$ s'annulent, et il reste $c_m 2^{n-1-m} = 0$. C'est impossible puisque $c_m \neq 0$ et $2^{n-1-m} > 0$.

La famille est donc libre, puis une base par sa taille. La formule de 4. (a) montre qu'il s'agit d'une base propre, d'où la diagonalisation annoncée.

Cette méthode prouve directement que ces polynômes forment une base ; elle reste utile lorsque leurs multiplicités sont connues avant toute étude d'un endomorphisme.

5. Inversibilité de A_n

Méthode 1 — Lire les valeurs propres.

Grâce à la base propre construite, A_n est inversible si et seulement si chacun des coefficients diagonaux de D_n est non nul. Or

$$n - 1 - 2r = 0 \iff r = \frac{n-1}{2}.$$

Un tel indice entier appartient à $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ si et seulement si n est impair. Si n est pair, les valeurs propres sont toutes des entiers impairs non nuls et D_n^{-1} est la matrice diagonale

de coefficients $1/(n-1-2r)$.

Ainsi A_n est inversible si et seulement si n est pair.

Si n est impair, le noyau de u est précisément la droite engendrée par

$$P_{(n-1)/2}(X) = (X^2 - 1)^{(n-1)/2}.$$

Méthode 2 — Étudier directement le noyau par un système.

Pour $V = (v_1, \dots, v_n)$, l'équation $A_n V = 0$ impose $v_2 = 0$, $v_{n-1} = 0$ et, pour $2 \leq k \leq n-1$,

$$(n+1-k)v_{k-1} + kv_{k+1} = 0, \quad \text{soit} \quad v_{k+1} = -\frac{n+1-k}{k}v_{k-1}.$$

Les dénominateurs k sont strictement positifs. Les équations de rang impair propagent $v_2 = 0$ et donnent toutes les coordonnées paires nulles. Les équations de rang pair expriment toutes les coordonnées impaires comme un multiple non nul de v_1 .

Si n est pair, $n-1$ est impair : la condition finale $v_{n-1} = 0$ impose alors $v_1 = 0$, puis $V = 0$. Le noyau est nul et la matrice carrée est inversible.

Si n est impair, $n-1$ est pair : la dernière condition est déjà satisfaite. En choisissant $v_1 = 1$, les relations construisent un vecteur non nul du noyau ; la matrice n'est pas inversible.

On retrouve le même critère. Cette seconde preuve ne nécessite pas de connaître la diagonalisation.

PROBLÈME 2

Posons $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} = r(t^4)$ et $I(x) = \int_0^x f(t) dt$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $1+t^4 \geq 1$. Toutes les intégrales sur les segments considérés existent, et I est de classe C^1 avec $I' = f$.

1. (a) Encadrement de F

Pour $x > 0$ et $t \in [0, x]$, on a $0 < f(t) \leq 1$. Par positivité et croissance de l'intégrale,

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt \leq x.$$

La division par $x > 0$ donne $\boxed{0 \leq F(x) \leq 1}$. En réalité, $F(x) > 0$ car f est strictement positive.

1. (b) Parité de F

Pour $x \neq 0$, faisons le changement de variable imposé $y = -t$ dans $I(-x)$. Les bornes deviennent 0 et x , et $dt = -dy$. Comme $(-y)^4 = y^4$,

$$I(-x) = - \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{1+y^4}} = -I(x).$$

Il en résulte

$$F(-x) = \frac{I(-x)}{-x} = \frac{I(x)}{x} = F(x).$$

L'égalité est également vraie en 0. Ainsi $\boxed{F \text{ est paire}}$.

1. (c) Dérivée sur $]0, +\infty[$

Sur cet intervalle, $F = I/x$ est le quotient de deux fonctions de classe C^1 , avec dénominateur non nul. Donc F y est de classe C^1 et

$$F'(x) = \frac{x f(x) - I(x)}{x^2} = \frac{r(x^4) - F(x)}{x}.$$

Ainsi $\boxed{x F'(x) = -F(x) + r(x^4)}$.

Le même calcul vaut pour tout $x \neq 0$; en particulier, F est aussi de classe C^1 sur $] -\infty, 0[$.

1. (d) Décroissance de F

La fonction f est décroissante sur $[0, +\infty[$: si $0 \leq t \leq x$, alors $t^4 \leq x^4$ et $f(t) \geq f(x) = r(x^4)$.

En intégrant sur $[0, x]$, on obtient $I(x) \geq xr(x^4)$, d'où $r(x^4) \leq F(x)$.

D'après 1. (c), $F'(x) \leq 0$ pour $x > 0$, donc F est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Pour préciser le tracé ultérieur, remarquons que si $x > 0$, alors $f(t) > f(x)$ pour $0 \leq t < x$. La différence est continue et strictement positive, par exemple sur $[0, x/2]$; son intégrale est donc strictement positive. Ainsi $F(x) > r(x^4)$ et $F'(x) < 0$ pour $x > 0$.

2. (a) Continuité en 0

Méthode 1 — Utiliser l'encadrement déjà établi.

Pour $x > 0$, les questions 1. (a) et 1. (d) donnent $r(x^4) \leq F(x) \leq 1$. La parité prolonge cet encadrement à $x < 0$.

Comme $r(x^4) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$, le théorème d'encadrement donne $F(x) \rightarrow 1 = F(0)$. Ainsi F est continue en 0.

Méthode 2 — Utiliser la continuité de l'intégrande.

Pour $x \neq 0$, $F(x) - 1 = \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - f(0)) dt$, puisque $f(0) = 1$. La continuité de f en 0 signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|t| < \delta$ entraîne $|f(t) - 1| < \varepsilon$.

Si $0 < |x| < \delta$, tous les points du segment d'extrémités 0 et x vérifient cette majoration. L'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne alors

$$|F(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|} \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} |f(t) - 1| dt \leq \varepsilon.$$

La limite est donc bien 1. Cette seconde méthode s'applique aux moyennes intégrales d'une fonction continue, même sans monotonie.

2. (b) i. Encadrement de $r(u)$

La fonction r est de classe C^2 sur $] -1, +\infty[$ et

$$r'(u) = -\frac{1}{2}(1+u)^{-3/2}, \quad r''(u) = \frac{3}{4}(1+u)^{-5/2}.$$

Pour $u \geq 0$, la formule de Taylor à l'ordre 1 avec reste intégral, appliquée sur le segment $[0, u]$, donne

$$r(u) = r(0) + ur'(0) + \int_0^u (u-v)r''(v) dv = 1 - \frac{u}{2} + \int_0^u (u-v)\frac{3}{4}(1+v)^{-5/2} dv.$$

Sur ce segment, $0 < r''(v) \leq 3/4$ et $u-v \geq 0$. Par conséquent,

$$0 \leq r(u) - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{4} \int_0^u (u-v) dv = \frac{3}{8}u^2.$$

L'égalité en $u = 0$ est incluse. Ainsi

$$\boxed{0 \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}} - \left(1 - \frac{u}{2}\right) \leq \frac{3}{8}u^2 \quad (u \geq 0)}.$$

2. (b) ii. Développement limité de F en 0

Appliquons l'encadrement précédent à $u = t^4$ pour $t \in [0, x]$, avec $x > 0$:

$$0 \leq f(t) - 1 + \frac{t^4}{2} \leq \frac{3}{8}t^8.$$

En intégrant puis en divisant par $x > 0$, il vient

$$0 \leq F(x) - \left(1 - \frac{x^4}{10}\right) \leq \frac{3}{8} \frac{x^8}{9} = \frac{x^8}{24}.$$

La parité de F et celle des puissances concernées donnent le même encadrement pour $x < 0$. Il est également vrai en 0.

Puisque $x^8 = o(x^4)$ au voisinage de 0,

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{x^4}{10} + o(x^4) \quad (x \rightarrow 0)}.$$

Plus précisément, en notant $R_F(x) = F(x) - 1 + x^4/10$, on dispose du contrôle $0 \leq R_F(x) \leq x^8/24$.

2. (b) iii. Dérivabilité en 0

Pour $x \neq 0$, le développement précédent donne

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = -\frac{x^3}{10} + o(x^3).$$

Ce quotient tend vers 0 lorsque $x \rightarrow 0$. C'est la définition de la dérivée en 0, d'où

$$\boxed{F'(0) = 0}.$$

2. (c) Développement limité de F' en 0

Il faut utiliser la formule de la dérivée, et non dériver formellement le reste du développement de F .

L'encadrement de 2. (b) i., avec $u = x^4$, donne

$$r(x^4) = 1 - \frac{x^4}{2} + R_r(x), \quad 0 \leq R_r(x) \leq \frac{3}{8}x^8.$$

D'autre part, $F(x) = 1 - x^4/10 + R_F(x)$, avec $0 \leq R_F(x) \leq x^8/24$. Pour $x \neq 0$, la relation de 1. (c) entraîne

$$F'(x) = \frac{r(x^4) - F(x)}{x} = -\frac{2}{5}x^3 + \frac{R_r(x) - R_F(x)}{x}.$$

Le reste vérifie

$$\left| \frac{R_r(x) - R_F(x)}{x} \right| \leq \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{24} \right) |x|^7 = \frac{5}{12} |x|^7.$$

Comme $|x|^7 = o(|x|^3)$, et puisque $F'(0) = 0$,

$$\boxed{F'(x) = -\frac{2}{5}x^3 + o(x^3) \quad (x \rightarrow 0)}.$$

2. (d) Classe C^1 sur $\mathbb{R}$

La fonction F est de classe C^1 sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ par 1. (c).

Elle est continue et dérivable en 0 par 2. (a) et 2. (b) iii.

Le développement de 2. (c) montre que $F'(x) \rightarrow 0 = F'(0)$ lorsque $x \rightarrow 0$. La dérivée est donc également continue au point de raccordement.

Ainsi $\boxed{F \in C^1(\mathbb{R})}$.

3. (a) i. Relation entre $h(x)$ et $h(1/x)$

Fixons $x > 0$. Le changement de variable imposé $z = 1/t$ est de classe C^1 et bijectif sur le segment à extrémités 1 et x , contenu dans $]0, +\infty[$. On a $t = 1/z$ et $dt = -dz/z^2$.

Puisque $z > 0$, $\sqrt{1 + z^{-4}} = \sqrt{1 + z^4}/z^2$. Ainsi

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}} = -\frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}}.$$

Les bornes $t = 1$ et $t = x$ deviennent $z = 1$ et $z = 1/x$. Par conséquent,

$$h(x) = -\int_1^{1/x} \frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}} = -h(1/x).$$

Le calcul respecte l'orientation des intégrales, que x soit inférieur ou supérieur à 1. Donc

$$\boxed{h(x) + h(1/x) = 0 \quad (x > 0)}.$$

3. (a) ii. Relation fonctionnelle pour F

Par la relation de Chasles, $h(x) = I(x) - I(1) = xF(x) - F(1)$ et

$$h(1/x) = \frac{1}{x}F(1/x) - F(1).$$

Leur somme est nulle d'après la question précédente. Il en résulte

$$\boxed{xF(x) + \frac{1}{x}F(1/x) = 2F(1) \quad (x > 0)}.$$

3. (b) i. Limite de F en $+\infty$

Méthode 1 — Exploiter la relation fonctionnelle.

Divisons l'identité précédente par $x > 0$:

$$F(x) = \frac{2F(1)}{x} - \frac{F(1/x)}{x^2}.$$

D'après 1. (a), $0 \leq F(1/x) \leq 1$, donc $F(1/x)/x^2 \rightarrow 0$. Le premier terme tend aussi vers 0.

Ainsi

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0}.$$

La continuité en 0 donne en outre $F(1/x) \rightarrow 1$. La relation non divisée montre alors $xF(x) \rightarrow 2F(1) > 0$, donc $F(x) \sim 2F(1)/x$.

Méthode 2 — Majorer directement l'intégrale.

Pour $t \geq 1$, $\sqrt{1+t^4} \geq t^2$, donc $0 < f(t) \leq 1/t^2$. Pour $x \geq 1$, la relation de Chasles donne

$$0 \leq I(x) = F(1) + \int_1^x f(t) dt \leq F(1) + \int_1^x \frac{dt}{t^2} = F(1) + 1 - \frac{1}{x} \leq F(1) + 1.$$

Ainsi $0 \leq F(x) \leq (F(1) + 1)/x \rightarrow 0$. Cette seconde méthode fournit la limite sans relation fonctionnelle; elle exprime la bornitude de l'intégrale accumulée.

3. (b) ii. Limite de F' en $+\infty$

Pour $x > 0$, $F'(x) = (r(x^4) - F(x))/x$. Les deux valeurs $r(x^4)$ et $F(x)$ appartiennent à $[0, 1]$. Leur différence a donc une valeur absolue au plus 1 :

$$|F'(x)| \leq \frac{1}{x}.$$

Par encadrement, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0}$.

4. (a) Programme de rectangles

Question adaptée au programme actuel. Code adapté en Python.

Comme $F(1) = \int_0^1 f(t) dt$, partageons $[0, 1]$ en 1000 intervalles de longueur $\Delta = 1/1000$. La somme des rectangles à gauche est

$$S_G = \frac{1}{1000} \sum_{k=0}^{999} \frac{1}{\sqrt{1 + (k/1000)^4}}.$$

Le programme suivant calcule cette somme ; il a été exécuté.

Python

```
from numpy import sqrt

N = 1000
pas = 1.0 / N
somme = 0.0

for k in range(N):
    t = k * pas
    somme = somme + 1.0 / sqrt(1.0 + t**4)

F1_approchee = pas * somme
print(F1_approchee)
```

La variable k prend exactement les valeurs de 0 à 999, car la borne supérieure de $\text{range}(N)$ est exclue. La variable t est l'abscisse gauche du rectangle ; somme accumule les hauteurs ; $F1_approchee$ est la somme de leurs aires.

L'exécution donne $S_G \simeq 0,9271837263$.

Pour contrôler l'erreur sans confondre approximation et valeur exacte, utilisons la décroissance de f sur $[0, 1]$. La somme à droite S_D et la somme à gauche vérifient $S_D \leq F(1) \leq S_G$. Leur différence est télescopique :

$$S_G - S_D = \frac{f(0) - f(1)}{1000} = \frac{1 - 1/\sqrt{2}}{1000} < 0,000293.$$

On obtient numériquement l'encadrement $0,9268908331 < F(1) < 0,9271837264$. Ces deux bornes affichées ont été arrondies vers l'extérieur.

En particulier, l'approximation admise $F(1) \simeq 0,93$ à 10^{-2} près est cohérente avec le programme et avec la majoration théorique de son erreur.

4. (b) Courbe représentative de F

La fonction est paire : sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ et, par parité, strictement croissante sur $] -\infty, 0[$.

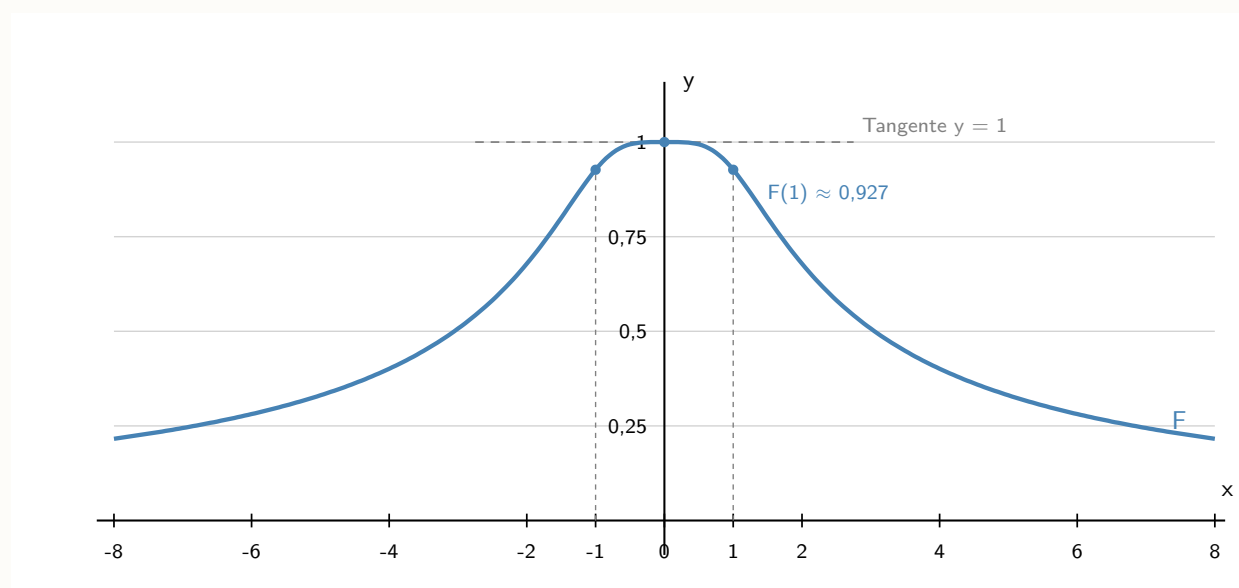
Elle vérifie $F(0) = 1$, $F'(0) = 0$ et $F(x) < 1$ pour $x \neq 0$. Elle possède donc un maximum global strict en 0 ; sa tangente en ce point est la droite $y = 1$. Le développement $F(x) = 1 - x^4/10 + o(x^4)$ précise son aplatissement près de l'origine.

Ses valeurs restent strictement positives et tendent vers 0 aux deux extrémités de la droite réelle. L'axe des abscisses est donc une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$. Les points d'abscisse 1 et -1 ont pour ordonnée environ 0,93.

Les variations se résument ainsi :

Intervalle ou point	$] -\infty, 0[$	0	$]0, +\infty[$
Signe de F'	+	0	—
Variation de F	croît de 0 vers 1	maximum 1	décroît de 1 vers 0

La figure suivante représente F sur $[-8, 8]$. Les points de la courbe sont calculés à partir de son intégrale ; les coordonnées des deux points d'abscisse ± 1 sont représentées à leur valeur numérique, environ 0,927.



Aucune étude de concavité ni des points d'inflexion n'est nécessaire.

Relevé des adaptations

Problème 2, question 4. (a) : le programme demandé est écrit en Python au lieu du langage ancien, conformément au référentiel informatique. La méthode des rectangles, les 1000 pas et la précision donnée dans l'énoncé sont conservés.

Aucune autre question mathématique n'a été modifiée.