



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1994

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

On travaille dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, de dimension 4, muni de la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1. a. Valeurs des polynômes aux quatre points

Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, les trois facteurs de P_i s'annulent aux trois entiers de $\{0, 1, 2, 3\}$ distincts de i . Ainsi $P_i(j) = 0$ si $j \neq i$.

Aux autres points, les normalisations donnent :

$$P_0(0) = -\frac{1}{6}(-1)(-2)(-3) = 1, \quad P_1(1) = \frac{1}{2}(1)(-1)(-2) = 1.$$

$$P_2(2) = -\frac{1}{2}(2)(1)(-1) = 1, \quad P_3(3) = \frac{1}{6}(3)(2)(1) = 1.$$

Par conséquent :

$$P_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. b. Une base d'interpolation

Méthode 1 — Liberté par évaluation

Les quatre polynômes appartiennent à E . Supposons

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i = 0,$$

où les α_i sont réels. En évaluant en j , pour chaque $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, la question précédente donne $\alpha_j = 0$.

La famille est libre et possède $4 = \dim E$ éléments. Donc

$\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E .

Méthode 2 — Génération par les valeurs d'un polynôme

Pour $Q \in E$, posons

$$R = Q - \sum_{i=0}^3 Q(i) P_i.$$

Ce polynôme appartient à E et vérifie $R(j) = 0$ pour $j = 0, 1, 2, 3$.

Un polynôme non nul de degré au plus 3 ne peut pas avoir quatre racines distinctes. Ainsi $R = 0$, donc

$$Q = \sum_{i=0}^3 Q(i) P_i.$$

La famille $\mathcal{C}$ engendre E et comporte $\dim E$ éléments : c'est une base. La première méthode prouve rapidement la liberté ; la seconde fournit déjà la formule des coordonnées dans cette base.

1. c. Matrice de passage

La matrice de passage M de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$ a pour colonnes les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$. Elle vérifie donc $[Q]_{\mathcal{B}} = M[Q]_{\mathcal{C}}$.

Développons les produits :

$$(X-1)(X-2)(X-3) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6.$$

$$X(X-2)(X-3) = X^3 - 5X^2 + 6X.$$

$$X(X-1)(X-3) = X^3 - 4X^2 + 3X.$$

$$X(X-1)(X-2) = X^3 - 3X^2 + 2X.$$

Il en résulte :

$$P_0 = 1 - \frac{11}{6}X + X^2 - \frac{1}{6}X^3, \quad P_1 = 3X - \frac{5}{2}X^2 + \frac{1}{2}X^3.$$

$$P_2 = -\frac{3}{2}X + 2X^2 - \frac{1}{2}X^3, \quad P_3 = \frac{1}{3}X - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

1. d. Inverse par le pivot de Gauss

La matrice M est inversible puisqu'elle est une matrice de passage entre deux bases. On applique à la matrice augmentée $(M \mid I_4)$ des opérations sur les lignes, notées

$L_1, L_2, L_3, L_4 :$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11/6 & 3 & -3/2 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5/2 & 2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Pour éliminer les fractions, on effectue $L_2 \leftarrow 6L_2, L_3 \leftarrow 2L_3, L_4 \leftarrow 6L_4 :$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

Puis $L_2 \leftarrow L_2 + 11L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_1 :$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 2 & 11 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right).$$

On échange L_2 et L_4 , puis on divise la nouvelle ligne L_2 par 3 :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 18 & -9 & 2 & 11 & 6 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

On effectue $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 18L_2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2/3 & -1/3 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -4 & 5 & 6 & 0 & -36 \end{array} \right).$$

Après $L_3 \leftarrow -L_3$, puis $L_4 \leftarrow L_4 - 9L_3$, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 6 & 18 & 54 \end{array} \right).$$

On normalise $L_4 \leftarrow L_4/2$, puis on effectue $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_4$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 & 27 \end{array} \right).$$

Enfin, $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{3}L_4$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$, donnent :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 9 & 27 \end{array} \right).$$

La partie gauche est l'identité ; la partie droite est donc l'inverse cherché :

$$M^{-1} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{array} \right).$$

2. a. Linéarité du reste

Le polynôme P est non nul et de degré 4. La division euclidienne fournit, pour chaque $T \in \mathbb{R}[X]$, une unique décomposition $T = AP + R$ avec $R \in E$, où $R = \varphi(T)$.

Soient $T = AP + R$, $U = BP + V$ leurs divisions euclidiennes et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\alpha T + \beta U = (\alpha A + \beta B)P + (\alpha R + \beta V).$$

Le polynôme $\alpha R + \beta V$ appartient à E , donc c'est le reste, par unicité. Ainsi :

$$\boxed{\varphi(\alpha T + \beta U) = \alpha \varphi(T) + \beta \varphi(U)}.$$

L'application φ est linéaire.

2. b. Formule du reste par interpolation

Méthode 1 — Coordonnées du reste dans la base $\mathcal{C}$

Écrivons $T = AP + \widehat{T}$. Pour $j \in \{0, 1, 2, 3\}$, comme $P(j) = 0$, on a $\widehat{T}(j) = T(j)$.

Le reste est dans E ; il possède donc des coordonnées $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans $\mathcal{C}$. En évaluant

$$\widehat{T} = \sum_{i=0}^3 \alpha_i P_i$$

en j , on obtient $\alpha_j = T(j)$.

$$\boxed{\widehat{T} = T(0)P_0 + T(1)P_1 + T(2)P_2 + T(3)P_3}.$$

Méthode 2 — Construction d'un reste par divisibilité

Posons

$$R = \sum_{i=0}^3 T(i)P_i.$$

On a $R \in E$ et $R(j) = T(j)$ pour les quatre entiers $j = 0, 1, 2, 3$.

Le polynôme $T - R$ possède donc ces quatre racines distinctes. En factorisant successivement par $X, X - 1, X - 2, X - 3$, on déduit que P divise $T - R$. Ainsi $T = AP + R$ pour un polynôme A .

Comme $R \in E$, l'unicité de la division euclidienne donne $R = \widehat{T}$. La première méthode identifie les coordonnées ; la seconde permet de construire directement le reste sans calculer le quotient.

2. c. Coordonnées des monômes

Pour $T \in E$, la division par P a un quotient nul et un reste égal à T . La formule précédente donne donc :

$$1 = P_0 + P_1 + P_2 + P_3.$$

$$X = P_1 + 2P_2 + 3P_3.$$

$$X^2 = P_1 + 4P_2 + 9P_3.$$

$$X^3 = P_1 + 8P_2 + 27P_3.$$

Ainsi :

$$[1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [X]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad [X^2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad [X^3]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \\ 27 \end{pmatrix}.$$

En juxtaposant ces colonnes, on retrouve M^{-1} , matrice qui transforme les coordonnées dans $\mathcal{B}$ en coordonnées dans $\mathcal{C}$.

3. a. Endomorphisme de E

Pour tout $Q \in E$, $\psi(Q) = \varphi(QS)$ est un reste de degré au plus 3, donc appartient à E .

Pour $Q, R \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la distributivité du produit et la linéarité de φ donnent :

$$\psi(\alpha Q + \beta R) = \varphi(\alpha QS + \beta RS) = \alpha\psi(Q) + \beta\psi(R).$$

Ainsi $\boxed{\psi \text{ est un endomorphisme de } E}$.

3. b. Images de la base et diagonalisation

Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, on applique la formule du reste au polynôme $P_i S$:

$$\psi(P_i) = \sum_{j=0}^3 P_i(j)S(j)P_j = S(i)P_i.$$

Par conséquent :

$$\boxed{\psi(P_0) = S(0)P_0, \quad \psi(P_1) = S(1)P_1, \quad \psi(P_2) = S(2)P_2, \quad \psi(P_3) = S(3)P_3}.$$

Chaque P_i est non nul, puisque $P_i(i) = 1$. La base $\mathcal{C}$ est donc une base de vecteurs propres. Ainsi $\boxed{\psi \text{ est diagonalisable}}$, avec :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\psi) = \begin{pmatrix} S(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S(3) \end{pmatrix}.$$

Ce résultat reste vrai si certaines valeurs $S(i)$ sont égales ou nulles : l'existence de cette base propre suffit.

3. c. Valeurs propres et sous-espaces propres

Pour $S(X) = 2X^3 + X^2 - 3X + 1$, on calcule :

$$S(0) = 1, \quad S(1) = 2 + 1 - 3 + 1 = 1, \quad S(2) = 16 + 4 - 6 + 1 = 15, \quad S(3) = 54 + 9 - 9 + 1 = 55.$$

Soit $Q = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3$. Alors :

$$\psi(Q) - \lambda Q = (1 - \lambda)\alpha_0 P_0 + (1 - \lambda)\alpha_1 P_1 + (15 - \lambda)\alpha_2 P_2 + (55 - \lambda)\alpha_3 P_3.$$

Comme $\mathcal{C}$ est une base, cette expression est nulle si et seulement si ses quatre coefficients sont nuls. Un vecteur propre non nul existe donc exactement pour $\lambda \in \{1, 15, 55\}$.

$$\boxed{\text{Sp}(\psi) = \{1, 15, 55\}}.$$

$$\boxed{\text{Ker}(\psi - \text{Id}_E) = \text{Vect}(P_0, P_1)}.$$

$$\boxed{\text{Ker}(\psi - 15 \text{Id}_E) = \text{Vect}(P_2), \quad \text{Ker}(\psi - 55 \text{Id}_E) = \text{Vect}(P_3)}.$$

Ces sous-espaces ont respectivement les dimensions 2, 1, 1, et leur somme directe est E .

PROBLÈME 2

PREMIÈRE PARTIE

1. a. Continuité et dérivabilité

Les fonctions $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto e^{-x^2}$ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Pour $n = 0$, on utilise directement la définition $f_0(x) = e^{-x^2}$, sans ambiguïté en 0.

Chaque f_n est la restriction à $[0, +\infty[$ d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Elle est donc continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et dérivable à droite en 0.

$$f'_0(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, la règle du produit donne :

$$f'_n(x) = nx^{n-1}e^{-x^2} - 2x^{n+1}e^{-x^2} = x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2).$$

À l'origine, les dérivées à droite sont :

$$f'_0(0) = 0, \quad f'_1(0) = 1, \quad f'_n(0) = 0 \text{ pour } n \geq 2.$$

Pour $n \geq 1$, on peut aussi les vérifier avec le quotient $\frac{f_n(h) - f_n(0)}{h} = h^{n-1}e^{-h^2}$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

1. b. Variations et limites

Pour $x > 0$, $f'_0(x) < 0$, tandis que $f_0(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 0$. Ainsi f_0 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	0	—
$f_0(x)$	1	$\searrow 0$

Pour $n \geq 1$, posons $a_n = \sqrt{n/2}$. Pour $x > 0$, les facteurs x^{n-1} et e^{-x^2} sont strictement positifs. Le signe de $f'_n(x)$ est donc celui de $n - 2x^2$: positif avant a_n , nul en a_n , négatif après a_n .

On a $f_n(0) = 0$. De plus, en posant $y = x^2$, les croissances comparées donnent $x^n e^{-x^2} = y^{n/2} e^{-y} \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Le maximum est :

$$m_n = f_n(a_n) = \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2} e^{-n/2} = \left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}.$$

x	0	a_n	$+\infty$
$f'_n(x)$, pour $x > 0$	+	0	—
$f_n(x)$	0	$\nearrow m_n$	$\searrow 0$

Ainsi

$$f_n \text{ croît strictement sur } [0, a_n] \text{ et décroît strictement sur } [a_n, +\infty[$$

pour $n \geq 1$.

1. c. Comparaison de deux fonctions successives

Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \geq 0$, $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$; cette identité vaut aussi pour $n = 0$ et $x = 0$ grâce à la définition de f_0 .

$$\text{Ainsi } f_{n+1}(x) - f_n(x) = (x - 1)f_n(x).$$

Sur $[0, 1]$, on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. L'inégalité est stricte pour $0 < x < 1$; à $x = 1$, les deux valeurs sont e^{-1} . À $x = 0$, l'inégalité est stricte si $n = 0$, puisque $f_1(0) = 0 < 1 = f_0(0)$, et c'est une égalité si $n \geq 1$.

$$\text{Pour } x > 1, f_n(x) > 0 \text{ et } x - 1 > 0, \text{ donc } f_{n+1}(x) > f_n(x).$$

1. d. Tracé des trois courbes

La courbe C_0 part de $(0, 1)$ avec une tangente horizontale et décroît vers l'axe des abscisses.

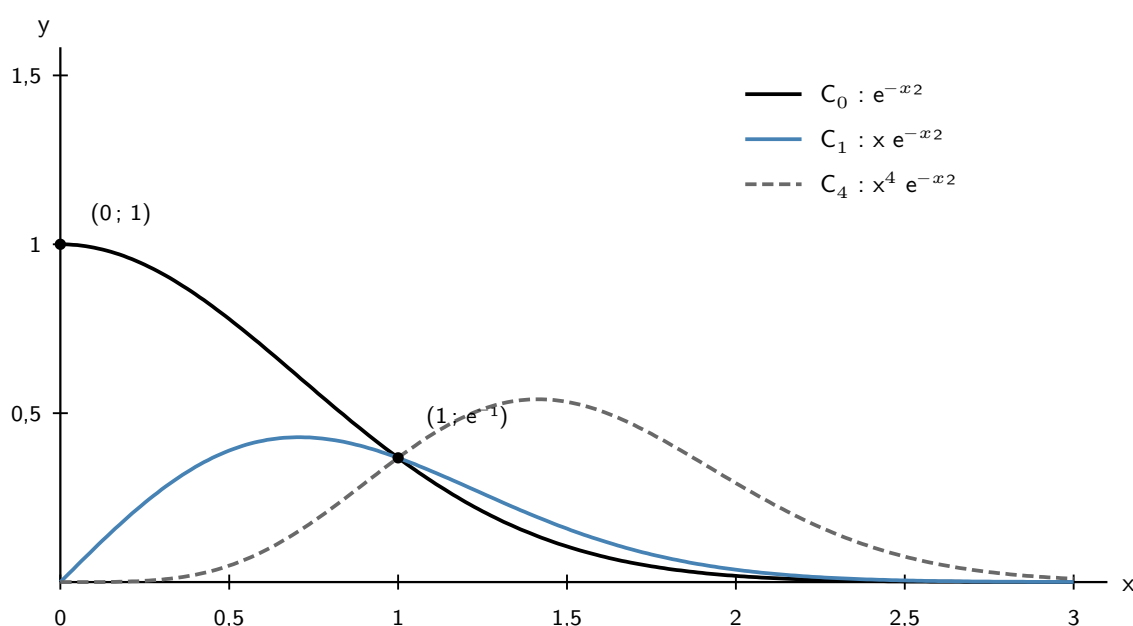
La courbe C_1 part de $(0, 0)$ avec une tangente de pente 1. Elle atteint son maximum en $x = 1/\sqrt{2}$, de valeur $1/\sqrt{2e} \simeq 0,429$, puis décroît vers 0.

La courbe C_4 part de $(0, 0)$ avec une tangente horizontale. Elle atteint son maximum en

$x = \sqrt{2}$, de valeur $4e^{-2} \simeq 0,541$, puis décroît vers 0.

Les trois courbes passent par $(1, e^{-1})$. Pour $0 < x < 1$, $f_4(x) < f_1(x) < f_0(x)$; pour $x > 1$, $f_0(x) < f_1(x) < f_4(x)$. Leurs limites sont nulles à l'infini et leurs valeurs restent strictement positives pour $x > 0$.

Le schéma ci-dessous utilise la même échelle sur les deux axes ; sur papier, on peut choisir 10 cm pour une unité comme demandé. Les courbes sont calculées à partir de leurs expressions exactes.



2. a. Existence et unicité de x_n

Pour $n \geq 2$, posons $g_n(x) = f_n(x) + x - 1$ sur $[0, 1]$. C'est une fonction continue et dérivable, avec $g_n(0) = -1$ et $g_n(1) = e^{-1} > 0$.

Pour $0 < x < 1$, $n - 2x^2 > 0$, donc $f'_n(x) > 0$ et $g'_n(x) = f'_n(x) + 1 > 0$. Ainsi g_n est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'un zéro ; la stricte croissance assure son unicité. Les valeurs aux extrémités montrent que ce zéro appartient à $]0, 1[$.

$$\boxed{\forall n \geq 2, \exists ! x_n \in]0, 1[\text{ tel que } x_n^n e^{-x_n^2} = 1 - x_n.}$$

2. b. Limite de la suite

Méthode 1 — Monotonie, puis contradiction

Comme $0 < x_n < 1$, la comparaison de la question 1. c. est stricte en x_n :

$$g_{n+1}(x_n) = f_{n+1}(x_n) + x_n - 1 < f_n(x_n) + x_n - 1 = 0.$$

Puisque g_{n+1} est strictement croissante et s'annule en x_{n+1} , cela entraîne $x_n < x_{n+1}$. La suite est donc strictement croissante et majorée par 1. Elle converge vers un réel $\ell \in]0, 1]$.

Supposons $\ell < 1$. Comme $x_n \leq \ell$ et $e^{-x_n^2} \leq 1$, on a :

$$0 \leq 1 - x_n = x_n^n e^{-x_n^2} \leq \ell^n.$$

Or $0 < \ell < 1$, donc $\ell^n \rightarrow 0$. Le passage à la limite donne $1 - \ell = 0$, en contradiction avec $\ell < 1$. Ainsi $\boxed{x_n \rightarrow 1}$.

Méthode 2 — Localisation des racines près de 1

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ et $r = 1 - \varepsilon \in]0, 1[$. Alors :

$$g_n(r) = r^n e^{-r^2} - \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon < 0.$$

Pour n assez grand, $g_n(r) < 0$. Comme g_n est strictement croissante et $g_n(x_n) = 0$, on obtient $r < x_n < 1$, donc $0 < 1 - x_n < \varepsilon$.

Cette propriété pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ prouve également $x_n \rightarrow 1$. Pour $\varepsilon \geq 1$, la majoration $0 < 1 - x_n < 1$ suffit. Cette seconde méthode établit directement la convergence, sans avoir besoin de la monotonie de la suite.

3. a. Convergence des intégrales I_n

Pour tout $n \geq 0$, f_n est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Il n'y a donc aucune difficulté d'intégration au voisinage de 0.

À l'infini, avec $y = x^2$, les croissances comparées donnent :

$$x^2 f_n(x) = x^{n+2} e^{-x^2} = y^{(n+2)/2} e^{-y} \rightarrow 0.$$

Il existe ainsi $A \geq 1$ tel que $0 \leq f_n(x) \leq 1/x^2$ pour $x \geq A$. L'intégrale de référence

$\int_A^{+\infty} x^{-2} dx$ converge ; par comparaison des fonctions positives, l'intégrale de f_n converge aussi.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx \text{ existe et est fini.}}$$

De plus, $I_n > 0$, puisque f_n est strictement positive sur $]0, +\infty[$.

3. b. Relation de récurrence

Fixons $n \geq 0$ et $A > 0$. On effectue une intégration par parties sur le segment $[0, A]$, avec $u(x) = x^{n+1}$ et $v'(x) = x e^{-x^2}$, donc $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$:

$$\int_0^A x^{n+2} e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} x^{n+1} e^{-x^2} \right]_0^A + \frac{n+1}{2} \int_0^A x^n e^{-x^2} dx.$$

Le terme en 0 est nul car $n+1 \geq 1$. Le terme en A tend vers 0 lorsque $A \rightarrow +\infty$, par les croissances comparées. Les deux intégrales impropres convergent d'après 3. a. ; on peut donc passer à la limite dans cette égalité.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

3. c. Expressions à l'aide de factorielles

La valeur initiale paire est donnée dans l'énoncé : $I_0 = \sqrt{\pi}/2$.

La valeur initiale impaire s'obtient par une primitive sur $[0, A]$:

$$\int_0^A x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} (1 - e^{-A^2}) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Ainsi $I_1 = 1/2$.

Pour $p \geq 1$, la récurrence donne :

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)(2p-3)\cdots 1}{2^p} I_0.$$

Les facteurs pairs de $(2p)!$ ont pour produit $2 \cdot 4 \cdots 2p = 2^p p!$. Le produit des facteurs impairs vaut donc $(2p)!/(2^p p!)$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p+1} p!} \sqrt{\pi}}.$$

La formule est également valable pour $p = 0$, avec $0! = 1$.

Pour $p \geq 1$, la récurrence appliquée aux indices impairs donne :

$$I_{2p+1} = p(p-1)\cdots 1 I_1 = \frac{p!}{2}.$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = \frac{p!}{2}}.$$

Elle inclut $p = 0$. En particulier, $I_2 = \sqrt{\pi}/4$, valeur utile dans la deuxième partie.

4. Convergence des intégrales avec sinus et cosinus

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, les deux intégrandes sont continues sur $[0, +\infty[$ et vérifient :

$$|x^n e^{-x^2} \cos(ax)| \leq x^n e^{-x^2} = f_n(x).$$

$$|x^n e^{-x^2} \sin(ax)| \leq x^n e^{-x^2} = f_n(x).$$

L'intégrale de la fonction positive f_n converge. Par comparaison, les deux intégrales des valeurs absolues convergent; la convergence absolue entraîne la convergence.

$$\boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \cos(ax) dx \text{ et } \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} \sin(ax) dx \text{ convergent absolument}}.$$

DEUXIÈME PARTIE

La première partie assure l'existence de $F(a)$ et de $G(a)$ pour tout réel a .

1. Relation entre G et F

Fixons $a \in \mathbb{R}$. Pour $A > 0$, une intégration par parties sur $[0, A]$ avec $u(x) = \sin(ax)$ et $v'(x) = xe^{-x^2}$ donne :

$$\int_0^A xe^{-x^2} \sin(ax) dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} \sin(ax) \right]_0^A + \frac{a}{2} \int_0^A e^{-x^2} \cos(ax) dx.$$

Le terme en 0 est nul. Le terme en A tend vers 0, car sa valeur absolue est au plus $e^{-A^2}/2$. Les deux intégrales impropres convergent, donc le passage à la limite donne :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, G(a) = \frac{a}{2}F(a)}.$$

La formule inclut $a = 0$: dans ce cas $G(0) = 0$.

2. a. Taylor avec reste intégral et majoration

Fixons $x \geq 0$ et posons $q(u) = \cos(xu)$ pour $u \in \mathbb{R}$. Cette fonction est de classe C^2 , avec $q'(u) = -x \sin(xu)$ et $q''(u) = -x^2 \cos(xu)$.

La formule de Taylor avec reste intégral entre a et $a + h$, valable avec des intégrales orientées quel que soit le signe de h , donne :

$$q(a + h) = q(a) + hq'(a) + \int_a^{a+h} (a + h - u)q''(u) du.$$

En substituant les expressions de q , q' et q'' , on obtient :

$$\boxed{\cos((a + h)x) = \cos(ax) - hx \sin(ax) - x^2 \int_a^{a+h} (a + h - u) \cos(xu) du}.$$

Pour contrôler le signe de h dans la majoration, si $h \neq 0$, on utilise le changement de

variable affine $u = a + hv$, avec v allant de 0 à 1 :

$$\int_a^{a+h} (a + h - u) \cos(xu) du = h^2 \int_0^1 (1 - v) \cos(x(a + hv)) dv.$$

Cette identité reste correcte lorsque $h < 0$, car les deux facteurs h proviennent respectivement de $a + h - u$ et de du . Ainsi :

$$\left| \int_a^{a+h} (a + h - u) \cos(xu) du \right| \leq h^2 \int_0^1 (1 - v) dv = \frac{h^2}{2}.$$

Pour $h = 0$, l'intégrale est nulle, donc la même inégalité vaut. Finalement :

$$\boxed{\left| \int_a^{a+h} (a + h - u) \cos(xu) du \right| \leq \frac{h^2}{2}}.$$

2. b. Contrôle du taux d'accroissement

Fixons $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Notons $R_{a,h}(x) = \int_a^{a+h} (a + h - u) \cos(xu) du$. La question précédente donne, pour $x \geq 0$:

$$e^{-x^2} \left(\frac{\cos((a+h)x) - \cos(ax)}{h} + x \sin(ax) \right) = -\frac{x^2 e^{-x^2}}{h} R_{a,h}(x).$$

La valeur absolue du membre de droite est au plus $\frac{|h|}{2} x^2 e^{-x^2}$. On intègre d'abord cette égalité et cette majoration sur $[0, A]$. La fonction du membre de gauche est continue, et l'inégalité triangulaire pour l'intégrale donne :

$$\left| \frac{\int_0^A e^{-x^2} \cos((a+h)x) dx - \int_0^A e^{-x^2} \cos(ax) dx}{h} + \int_0^A x e^{-x^2} \sin(ax) dx \right|$$

$$\leq \frac{|h|}{2} \int_0^A x^2 e^{-x^2} dx.$$

Les trois intégrales de gauche convergent d'après la première partie, et celle de droite converge vers I_2 . Le passage à la limite lorsque $A \rightarrow +\infty$ est donc justifié terme à terme dans cette somme finie.

$$\left| \frac{F(a+h) - F(a)}{h} + G(a) \right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{8} |h|.$$

2. c. Dérivabilité de F

Pour chaque réel fixé a , le membre de droite de la majoration précédente tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0$ avec $h \neq 0$. Le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = -G(a).$$

C'est exactement la définition de la dérivée en a . Ainsi :

$$F \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall a \in \mathbb{R}, F'(a) = -G(a).$$

La preuve repose sur un contrôle explicite du reste de Taylor, puis sur des limites d'intégrales convergentes sur des segments.

3. Expressions de F et de G

Les questions 1. et 2. c. donnent, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$F'(a) = -\frac{a}{2} F(a).$$

Suivons l'indication en posant $H(a) = e^{a^2/4} F(a)$. Les deux facteurs sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et :

$$H'(a) = e^{a^2/4} \left(\frac{a}{2} F(a) + F'(a) \right) = 0.$$

Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante sur cet intervalle, par le théorème des accroissements finis. Ainsi H est constante sur $\mathbb{R}$.

En $a = 0$, la valeur initiale donnée dans le sujet est :

$$H(0) = F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc $e^{a^2/4}F(a) = \sqrt{\pi}/2$, d'où :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, F(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-a^2/4}}.$$

En utilisant $G(a) = \frac{a}{2}F(a)$, on conclut :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, G(a) = \frac{a\sqrt{\pi}}{4} e^{-a^2/4}}.$$

Ces expressions donnent bien $F(0) = \sqrt{\pi}/2$ et $G(0) = 0$. Elles respectent aussi les parités découlant des définitions : F est paire et G est impaire.

Relevé des adaptations

Aucune question ne nécessite d'adaptation au programme actuel. Le tracé demandé au problème 2, première partie, question 1. d., est fourni en SVG intégré, calculé à partir des fonctions de l'énoncé.