



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1993

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Partie I

1. Soit E un espace vectoriel réel ; on note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E .

Pour tout $\phi \in \mathcal{L}(E)$, on note $\phi^0 = \text{Id}$, $\phi^1 = \phi$ et, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\phi^n = \phi^{n-1} \circ \phi$.

Soient p, q deux éléments de $\mathcal{L}(E)$ non nuls et tels que $p + q = \text{Id}$; a, b deux réels distincts et non nuls ; et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f = ap + bq$ et $f^2 = a^2p + b^2q$.

1. a. Montrer que $(f - a \text{Id}) \circ (f - b \text{Id}) = (f - b \text{Id}) \circ (f - a \text{Id}) = 0$ et que $f - a \text{Id} = (b - a)q$ et $f - b \text{Id} = (a - b)p$.

1. b. En déduire que $p \circ q = q \circ p = 0$.

1. c. Montrer que $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n , $f^n = a^n p + b^n q$.

3. a. Calculer $f \circ \left(\frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q \right)$.

3. b. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} à l'aide de p, q, a, b .

4. a. Montrer que l'ensemble des valeurs propres de f est $\{a, b\}$.

4. b. En supposant que E est de dimension finie, f est-il diagonalisable ?

Partie II

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 13 & -60 & 20 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 24 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^2 = \alpha M + \beta \text{Id}$. Déterminer α et β .
2. En déduire deux réels a et b tels que $(M - a \text{Id})(M - b \text{Id}) = 0$.
3. Montrer qu'il existe un couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on exprimera en fonction de M et de Id , tel que $A + B = \text{Id}$ et $aA + bB = M$.
4. En déduire la valeur de M^n pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$. Pour $n < 0$, on utilise la convention $M^n = (M^{-1})^{-n}$ après avoir justifié l'inversibilité de M .

Problème II

Les parties I et II sont indépendantes. La résolution de la partie III utilise des résultats des parties I et II.

Partie I

A — Soit f l'application de $]0; \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(0) = 1$ et, pour tout $x \in]0; \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

1. Étudier les variations de f sur $]0; \frac{\pi}{2}]$.
2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

3. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
4. Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, d'unité 5 cm.

B — Soit g une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$.

1. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, qu'il existe un réel $A \geq 0$ tel que, pour tout réel $x > 0$:

$$\left| \int_0^1 \sin(xt)g(t) dt \right| \leq \frac{A}{x}.$$

2. En déduire la limite, quand x tend vers $+\infty$, de $\int_0^1 \sin(xt)g(t) dt$.

C — Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(0) = 0$.

1. On nomme ϕ l'application de $]0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{P(x)}{\sin(\pi x/2)}$.

1. a. Exprimer ϕ à l'aide de la fonction f étudiée au A.
1. b. En déduire que ϕ possède un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$. Le définir.
2. Montrer enfin que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 P(t) \frac{\sin((n + \frac{1}{2})\pi t)}{\sin(\pi t/2)} dt = 0.$$

L'intégrande est considéré avec son prolongement continu en $t = 0$.

Partie II

On désigne par E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et par h l'application de E dans E qui, à tout polynôme P , associe le polynôme $Q = h(P)$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x (t-x)P(t) dt + \frac{x^2}{2} \int_0^1 P(t) dt.$$

A — Étude de h .

1. Soit $P \in E$ et $Q = h(P)$.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $Q'(x) = x \int_0^1 P(t) dt - \int_0^x P(t) dt$.

1. b. Calculer Q'' .

2. Montrer que h est une application linéaire, que le noyau de h est l'ensemble des polynômes constants et que l'image de h est l'ensemble des polynômes Q tels que $Q(0) = Q'(0) = Q'(1) = 0$.

On pourra calculer, pour un tel polynôme Q , $h(Q'')$.

B — On considère la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = \frac{x^2}{2} - x, \quad \forall n \geq 2, \quad P_n = h(P_{n-1}).$$

1. Calculer P_2 et P_3 .

2. Quelles sont les valeurs de $P_n(0)$, $P'_n(0)$ et $P'_n(1)$ pour $n \geq 2$?

3. Exprimer en fonction de n le monôme de plus haut degré de P_n .

4. Dédurre de A.1 la relation : $\forall n \geq 2, \quad P_n'' = \int_0^1 P_{n-1}(t) dt - P_{n-1}.$

Établir alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les deux relations :

$$\forall n \geq 2, \quad \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^2} \int_0^1 P_{n-1}(t) \cos(k\pi t) dt,$$

$$\forall n \geq 1, \quad \int_0^1 P_n(t) \cos(k\pi t) dt = \frac{1}{(k\pi)^{2n}}.$$

Partie III

A

1. Établir, pour tout entier naturel N non nul et pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\sum_{k=1}^N \cos(kt) = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(t/2)} - \frac{1}{2}.$$

2. En déduire, pour N et n entiers naturels non nuls :

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^{2n}} = \pi^{2n} \int_0^1 P_n(t) \left(\frac{\sin((N + \frac{1}{2})\pi t)}{2 \sin(\pi t/2)} - \frac{1}{2} \right) dt,$$

puis

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = -\frac{\pi^{2n}}{2} \int_0^1 P_n(t) dt.$$

L'intégrande de la première formule est considéré avec son prolongement continu en $t = 0$.

3. Application : montrer que les sommes des séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2},$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4}$$

et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$$

peuvent s'exprimer sous la forme $\frac{\pi^a}{b}$, où a et b sont des entiers que l'on calculera.

B

1. On pose

$$P_n = \sum_{p=0}^{2n} a_{n,p} X^p.$$

Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_{n,0} = 0, \quad a_{n,1} = 0,$$

$$a_{n,2} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{2n-2} \frac{a_{n-1,p}}{p+1},$$

$$a_{n,p} = -\frac{a_{n-1,p-2}}{p(p-1)} \quad \text{pour tout entier } p \text{ tel que } 3 \leq p \leq 2n.$$

2. Le but de cette question est d'écrire un programme permettant de calculer le réel β_n tel que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \beta_n \pi^{2n},$$

pour un entier n compris entre 1 et 25 donné par l'utilisateur.

2. a. Quel type de variable informatique est adapté à la représentation d'un polynôme ?
2. b. Écrire un programme en Python qui calcule les coefficients de P_n , puis le réel β_n , et l'affiche.

On pourra représenter les coefficients par un tableau NumPy. Pour la saisie et l'affichage, `input(message)` affiche un message puis renvoie le texte saisi, `int(texte)` convertit ce texte en entier et `print(valeur)` affiche une valeur. Les calculs avec des nombres flottants donnent une approximation numérique de β_n .