



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1991

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

Notations

$\mathcal{B}$ est la base canonique de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^4$, Id est l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$ et

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est sa matrice relativement à $\mathcal{B}$. On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on note

$$M_A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix}$$

et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est M_A .

Partie A

1. Déterminer les valeurs propres réelles de g et, pour chaque valeur propre de g , déterminer une base du sous-espace propre associé. Est-ce que g est diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Soit $A = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$.

a. Montrer que f_A est combinaison linéaire de Id , g , $g \circ g$, $g \circ g \circ g$.

b. En déduire les valeurs propres réelles de f_A .

On pourra compléter les vecteurs propres réels de g par les vecteurs $u = (1, 0, -1, 0)$ et $w = (0, 1, 0, -1)$, et étudier l'action de f_A sur le plan $\text{Vect}(u, w)$.

c. Dans cette question 2.c, et celle-ci seulement, on suppose $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = -2$. Déterminer, pour chaque valeur propre réelle de f_A , la dimension du sous-espace propre associé.

Partie B

1. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta \neq 0$, et $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur (α, β) pour qu'il existe $X \in \mathbb{R}^4$ tel que $f_A(X) = (0, 0, 0, 0)$ et $X \neq (0, 0, 0, 0)$.

2. Trouver quatre nombres réels α, β, u, v tels que, en notant $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$ et $B = (u, u + v, u + 2v, u + 3v)$, on ait :

$$\beta \neq 0, \quad u \neq 0, \quad M_A M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

PROBLÈME 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$.

Partie I — Calcul de I_1

1. Montrer que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$ est convergente.
2. Vérifier que, pour tout réel $x \neq -1$,

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right).$$

3. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - x + 1) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$

Calculer la fonction dérivée de f . En déduire I_1 .

Partie II — Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$ est convergente.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$3nI_{n+1} = (3n-1)I_n.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est convergente.

3. Soient a un nombre réel strictement compris entre 0 et 1 et n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer les trois inégalités suivantes :

$$\int_0^a \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq a, \quad \int_a^1 \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1-a}{(1+a^3)^n}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx \leq \frac{1}{3n-1}.$$

4. Dédurre de la question précédente la limite de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

Partie III — Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. On considère les trois suites définies, pour $n \geq 1$, par $u_n = n^{1/3}I_n$, $v_n = \ln u_n$,
 $w_n = v_{n+1} - v_n$.
 - a. Calculer le développement limité à l'ordre 2 de w_n en fonction de $\frac{1}{n}$. Quelle est la nature de la série numérique de terme général w_n ?

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers un nombre réel h strictement positif.
On ne cherchera pas à calculer h .

c. Indiquer la nature de la série numérique de terme général I_n .

2. On considère la série numérique de terme général $a_n = (-1)^{n-1} I_n$ pour $n \geq 1$.

a. La série numérique de terme général a_n est-elle absolument convergente ?

b. Soit

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k,$$

pour tout entier $n \geq 1$. Vérifier que :

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

c. Montrer que la série numérique de terme général a_n est convergente.

d. Soit t un nombre réel strictement positif. À l'aide d'un changement de variable simple, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 + x^3} dx$.

En déduire la valeur de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$