



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1991

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

Question adaptée au programme actuel. Le problème est étudié sur $\mathbb{R}$: les vecteurs, les coefficients et les valeurs propres recherchées sont réels. Les matrices de l'énoncé sont conservées. L'indication ajoutée en A.2.b permet d'étudier toutes les valeurs propres réelles de f_A , même lorsque les vecteurs propres réels de g ne suffisent pas.

Partie A

1. Valeurs propres réelles et sous-espaces propres de g .

Question adaptée au programme actuel : recherche du spectre et de la diagonalisation sur $\mathbb{R}$.

On a $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_3, x_4, x_1)$. Pour un réel λ , l'équation $g(X) = \lambda X$ donne

$$x_2 = \lambda x_1, \quad x_3 = \lambda x_2, \quad x_4 = \lambda x_3, \quad x_1 = \lambda x_4.$$

Si $x_1 = 0$, les trois premières égalités imposent $X = 0$. Un vecteur propre étant non nul, on doit donc avoir $x_1 \neq 0$. En substituant successivement, $x_1 = \lambda^4 x_1$, d'où $\lambda^4 = 1$. Pour un réel λ , cette équation impose $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

Réciproquement, les vecteurs

$$v_+ = (1, 1, 1, 1), \quad v_- = (1, -1, 1, -1)$$

vérifient $g(v_+) = v_+$ et $g(v_-) = -v_-$. Les équations précédentes donnent alors les espaces propres complets :

$$\text{SEP}(g, 1) = \text{Vect}(v_+), \quad \text{SEP}(g, -1) = \text{Vect}(v_-).$$

Une base de chacun est respectivement (v_+) et (v_-) . Les deux espaces propres sont en

somme directe, puisque leurs valeurs propres sont distinctes, et leur somme a dimension $2 < 4$. Ils ne peuvent fournir une base de $\mathbb{R}^4$: g n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

2. a. Expression de f_A comme polynôme de g .

Les deux puissances utiles de J sont

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En additionnant coefficient par coefficient,

$$a_1 I + a_2 J + a_3 J^2 + a_4 J^3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} = M_A.$$

L'association d'une matrice à un endomorphisme dans une base fixée respecte les sommes, les produits par un scalaire et la composition. Ainsi,

$$f_A = a_1 \text{Id} + a_2 g + a_3 g^2 + a_4 g^3.$$

b. Toutes les valeurs propres réelles de f_A .

Question adaptée au programme actuel. Il faut compléter les deux droites propres de g par le plan indiqué dans le sujet pour ne manquer aucune valeur propre réelle de f_A .

Posons $u = (1, 0, -1, 0)$ et $w = (0, 1, 0, -1)$. La famille $\mathcal{C} = (v_+, v_-, u, w)$ est libre. En effet, l'égalité $rv_+ + sv_- + tu + zw = 0$ donne

$$r + s + t = 0, \quad r - s + z = 0, \quad r + s - t = 0, \quad r - s - z = 0.$$

Les première et troisième égalités donnent $t = 0$ et $r + s = 0$; les deuxième et quatrième donnent $z = 0$ et $r - s = 0$. Ainsi $r = s = t = z = 0$. Cette famille de quatre vecteurs libres est donc une base de $\mathbb{R}^4$.

On a $g(u) = -w$ et $g(w) = u$. Sur $V = \text{Vect}(u, w)$, la matrice de g dans (u, w) est donc

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } K^2 = -I_2, K^3 = -K. \text{ En utilisant A.2.a, posons}$$

$$s_+ = a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad s_- = a_1 - a_2 + a_3 - a_4, \quad c = a_1 - a_3, \quad d = a_2 - a_4.$$

On obtient $f_A(v_+) = s_+v_+$, $f_A(v_-) = s_-v_-$ et, sur V , la matrice $cI_2 + dK = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$.

Ainsi,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f_A) = \begin{pmatrix} s_+ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & -d & c \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer les valeurs propres sur le plan, considérons un réel λ et des coordonnées (t, z) . Les équations sont

$$(c - \lambda)t + dz = 0, \quad -dt + (c - \lambda)z = 0.$$

En multipliant la première équation par $c - \lambda$ et en retranchant d fois la seconde, on obtient $((c - \lambda)^2 + d^2)t = 0$. De même, en ajoutant d fois la première à $c - \lambda$ fois la seconde, on obtient $((c - \lambda)^2 + d^2)z = 0$.

Si $d \neq 0$, ce coefficient est strictement positif pour chaque réel λ , donc $t = z = 0$. Le plan n'apporte alors aucun vecteur propre réel. Les seules valeurs propres réelles de f_A sont les éléments de l'ensemble $\{s_+, s_-\}$, qui peut ne contenir qu'une valeur si ces deux nombres sont égaux.

Si $d = 0$, f_A agit sur tout le plan V par multiplication par c . Le plan apporte donc la valeur propre c , et les valeurs propres réelles de f_A sont les éléments de $\{s_+, s_-, c\}$, en ne comptant qu'une fois chaque valeur identique.

Il n'existe pas d'autres valeurs propres : dans la base $\mathcal{C}$, les équations propres se séparent en celles sur les deux droites et celles sur le plan, et un vecteur propre doit avoir au moins une composante non nulle.

c. Sous-espaces propres pour $A = (1, 2, 3, -2)$.

Question adaptée au programme actuel : seuls les sous-espaces propres réels sont recherchés.

Méthode 1 — Utilisation de la base adaptée.

Les paramètres calculés en A.2.b valent

$$s_+ = 1 + 2 + 3 - 2 = 4, \quad s_- = 1 - 2 + 3 + 2 = 4, \quad c = 1 - 3 = -2, \quad d = 2 - (-2) = 4.$$

Comme $d \neq 0$, la seule valeur propre réelle est 4. Sur les deux premières droites, f_A agit

par multiplication par 4; sur le plan V , l'équation propre pour $\lambda = 4$ n'a que la solution nulle. Donc

$$\text{SEP}(f_A, 4) = \text{Vect}(v_+, v_-), \quad \dim \text{SEP}(f_A, 4) = 2.$$

Méthode 2 — Résolution directe du système propre pour 4.

La matrice est

$$M_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $X = (x, y, z, t)$, les première et deuxième équations de $(M_A - 4I)X = 0$ sont

$$-3(x - z) + 2(y - t) = 0, \quad -2(x - z) - 3(y - t) = 0.$$

Les troisième et quatrième sont leurs opposées. Posons $r = x - z$ et $s = y - t$. En additionnant trois fois la première équation et deux fois la seconde, on obtient $-13r = 0$. Ainsi $r = 0$, puis $s = 0$. Les solutions sont exactement $X = (x, y, x, y)$, avec $x, y \in \mathbb{R}$.

L'espace propre a donc pour base $((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$ et dimension 2. Cette description est équivalente à celle obtenue avec v_+ et v_- . La méthode par blocs donne d'abord tout le spectre réel; le système direct vérifie concrètement la dimension de l'espace propre.

Partie B

1. Condition d'existence d'un vecteur non nul dans le noyau.

Question adaptée au programme actuel : α, β et le vecteur X sont réels.

Pour $A = (\alpha, \alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta)$, les paramètres de A.2.b sont

$$s_+ = 4\alpha + 6\beta, \quad s_- = -2\beta, \quad c = -2\beta, \quad d = -2\beta.$$

L'hypothèse $\beta \neq 0$ impose $s_- \neq 0$ et $d \neq 0$. Sur la droite $\text{Vect}(v_-)$, le noyau est donc nul.

Sur le plan V , l'équation propre pour $\lambda = 0$ n'a que la solution nulle, puisque $c^2 + d^2 = 8\beta^2 > 0$.

Le noyau de f_A peut ainsi provenir uniquement de la droite $\text{Vect}(v_+)$. Sur cette droite, f_A agit par le scalaire $s_+ = 4\alpha + 6\beta$. Il existe donc un vecteur non nul dans le noyau si et seulement si

$$4\alpha + 6\beta = 0, \quad \text{soit} \quad 2\alpha + 3\beta = 0.$$

Lorsque cette condition est satisfaite, $\text{Ker } f_A = \text{Vect}(v_+)$, et on peut choisir $X = (1, 1, 1, 1)$. Si elle n'est pas satisfaite, le noyau est réduit au vecteur nul. Les deux sens de l'équivalence sont donc établis.

2. Construction de matrices dont le produit est nul.

Question adaptée au programme actuel : on cherche des paramètres réels.

Pour construire un exemple, prenons $\beta = 2$ et $\alpha = -3$. Alors $2\alpha + 3\beta = 0$, donc la question précédente donne $M_A v_+ = 0$, avec $A = (-3, -1, 1, 3)$.

Prenons ensuite $u = 1$ et $v = 0$, d'où $B = (1, 1, 1, 1)$. La matrice M_B a tous ses coefficients égaux à 1 : chacune de ses colonnes est v_+ . Chaque colonne de $M_A M_B$ est donc $M_A v_+ = 0$, ce qui établit

$$M_A M_B = 0_4.$$

Le quadruplet $(\alpha, \beta, u, v) = (-3, 2, 1, 0)$ satisfait bien $\beta \neq 0$ et $u \neq 0$.

On peut préciser pourquoi cette construction est naturelle en caractérisant toutes les solutions réelles autorisées. La valeur sur v_- de $M_A M_B$ est $(-2\beta)(-2v)v_- = 4\beta v v_-$. Si le produit est nul et $\beta \neq 0$, alors $v = 0$. Dans ce cas, $M_B = uH$, où H a tous ses coefficients égaux à 1. Chaque ligne de M_A a pour somme $4\alpha + 6\beta$, donc

$$M_A M_B = u(4\alpha + 6\beta)H.$$

Avec $u \neq 0$, ce produit est nul si et seulement si $2\alpha + 3\beta = 0$. Toutes les solutions sont donc obtenues en choisissant $\beta \neq 0$, $u \neq 0$, $v = 0$ et $\alpha = -3\beta/2$, ce qui inclut l'exemple donné.

PROBLÈME 2

Partie I — Calcul de I_1

1. Convergence de I_1 .

La fonction $x \mapsto 1/(1+x^3)$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Son intégrale sur $[0, 1]$ est donc définie et finie. Pour $x \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{1+x^3} \leq \frac{1}{x^3}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} x^{-3} dx = 1/2$ converge. Le théorème de comparaison des intégrales positives établit donc la convergence de I_1 .

2. Décomposition de la fraction rationnelle.

Pour tout réel x , $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4 > 0$. Si $x \neq -1$, les dénominateurs de la formule sont donc non nuls, et

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) = \frac{x^2-x+1-(x-2)(x+1)}{3(x+1)(x^2-x+1)}.$$

Or $(x-2)(x+1) = x^2 - x - 2$, donc le numérateur vaut 3. De plus, $(x+1)(x^2-x+1) = 1+x^3$. Ainsi,

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) = \frac{1}{1+x^3},$$

ce qui vérifie l'identité sur tout son domaine.

3. Dérivée de f et calcul de I_1 .

Posons $q(x) = x^2 - x + 1 > 0$. Le logarithme et l'arctangente sont dérivables pour les arguments utilisés, donc f est dérivable sur $[0, +\infty[$, avec une dérivée à droite en 0. On a

$$\frac{d}{dx} \ln q(x) = \frac{2x-1}{q(x)}.$$

Pour l'arctangente, $1 + ((2x-1)/\sqrt{3})^2 = 4q(x)/3$, donc

$$\frac{d}{dx} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2/\sqrt{3}}{4q(x)/3} = \frac{\sqrt{3}}{2q(x)}.$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \frac{2x-1}{q(x)} - 2\sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2q(x)} = \frac{2x-4}{q(x)} = \frac{2(x-2)}{q(x)}.$$

La décomposition de I.2 montre alors qu'une primitive de $1/(1+x^3)$ sur $[0, +\infty[$ est

$$F(x) = \frac{1}{3} \ln(x+1) - \frac{1}{6} f(x) = \frac{1}{6} \ln \left(\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$

Il faut regrouper les logarithmes avant le passage à la limite : chacun des termes logarithmiques initiaux diverge séparément, mais leur combinaison possède une limite. En effet, $(x+1)^2/(x^2-x+1) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, donc son logarithme tend vers 0. L'arctangente tend vers $\pi/2$, d'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

À la borne 0, le logarithme vaut 0 et $\arctan(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6$, donc $F(0) = -\sqrt{3}\pi/18$. En appliquant le théorème fondamental sur $[0, R]$ puis en faisant tendre R vers $+\infty$,

$$I_1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{9} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Partie II — Étude de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. Convergence de chaque intégrale I_n .

Fixons $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto (1+x^3)^{-n}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Comme $1+x^3 \geq 1$,

$$0 \leq \frac{1}{(1+x^3)^n} \leq \frac{1}{1+x^3}.$$

L'intégrale de la majorante converge par I.1. La comparaison établit donc la convergence de I_n . De plus, $I_n > 0$, car l'intégrande est continue et strictement positive, par exemple sur $[0, 1]$.

2. Relation de récurrence et convergence de la suite.

Fixons $n \geq 1$ et $R > 0$. Effectuons l'intégration par parties sur le segment $[0, R]$, avec la fonction $u(x) = (1 + x^3)^{-n}$ et la primitive x de la fonction constante 1. On a $u'(x) = -3nx^2(1 + x^3)^{-n-1}$, donc

$$\int_0^R \frac{dx}{(1 + x^3)^n} = \left[\frac{x}{(1 + x^3)^n} \right]_0^R + 3n \int_0^R \frac{x^3}{(1 + x^3)^{n+1}} dx.$$

L'identité $x^3 = (1 + x^3) - 1$ donne

$$\int_0^R \frac{dx}{(1 + x^3)^n} = \frac{R}{(1 + R^3)^n} + 3n \left(\int_0^R \frac{dx}{(1 + x^3)^n} - \int_0^R \frac{dx}{(1 + x^3)^{n+1}} \right).$$

Les deux intégrales possèdent des limites finies d'après II.1. Pour $R \geq 1$, $0 \leq R/(1 + R^3)^n \leq R^{1-3n} \rightarrow 0$, puisque $1 - 3n \leq -2$. Le passage à la limite est donc justifié et donne $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$, soit

$$3nI_{n+1} = (3n - 1)I_n.$$

Méthode 1 — Convergence de la suite par la relation de récurrence.

L'égalité précédente s'écrit $I_{n+1} = (1 - 1/(3n))I_n$. Pour $n \geq 1$, $0 < 1 - 1/(3n) < 1$ et $I_n > 0$, donc $0 < I_{n+1} < I_n$. La suite est décroissante et minorée par 0. Le théorème de la limite monotone assure qu'elle converge vers un réel $\ell \geq 0$.

Méthode 2 — Monotonie directement sous l'intégrale.

Pour $x \geq 0$, $(1 + x^3)^{-n-1} \leq (1 + x^3)^{-n}$. Les deux intégrales étant convergentes, la

croissance de l'intégrale donne $I_{n+1} \leq I_n$. La suite est encore décroissante et positive, donc convergente par le même théorème.

La première preuve exploite la formule exacte ; la seconde montre que la monotonie était déjà contenue dans l'expression intégrale. À ce stade, aucune de ces preuves ne détermine la limite.

3. Trois majorations d'intégrales.

Fixons $a \in]0, 1[$ et $n \geq 1$.

Sur $[0, a]$, $0 < (1 + x^3)^{-n} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^a \frac{dx}{(1 + x^3)^n} \leq \int_0^a 1 \, dx = a.$$

Sur $[a, 1]$, $x^3 \geq a^3$, donc $(1 + x^3)^{-n} \leq (1 + a^3)^{-n}$. Ainsi,

$$\int_a^1 \frac{dx}{(1 + x^3)^n} \leq \frac{1 - a}{(1 + a^3)^n}.$$

Enfin, pour $x \geq 1$, $1 + x^3 \geq x^3$, donc $(1 + x^3)^{-n} \leq x^{-3n}$. Comme $3n > 1$, l'intégrale de référence converge et

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^3)^n} \leq \int_1^{+\infty} x^{-3n} \, dx = \frac{1}{3n - 1}.$$

Les trois inégalités demandées sont établies.

4. Limite de I_n .

D'après Chasles et II.3, pour chaque $a \in]0, 1[$ et chaque $n \geq 1$,

$$0 \leq I_n \leq a + \frac{1-a}{(1+a^3)^n} + \frac{1}{3n-1}.$$

Fixons a avant de faire tendre n vers l'infini. Comme $1+a^3 > 1$, les deux derniers termes tendent vers 0. La limite ℓ existe par II.2, donc $0 \leq \ell \leq a$ pour chaque $a \in]0, 1[$. Si $\ell > 0$, on pourrait choisir un tel a avec $a < \ell$, ce qui contredirait l'inégalité. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

La limite est obtenue par des majorations explicites, sans échange entre une limite et une intégrale.

Partie III — Étude de séries numériques associées à la suite $(I_n)_{n \geq 1}$

1. a. Développement de w_n et convergence de sa série.

Puisque $I_n > 0$, on a $u_n = n^{1/3} I_n > 0$, donc $v_n = \ln u_n$ est défini. La relation de II.2 donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/3} \left(1 - \frac{1}{3n}\right).$$

Les deux facteurs sont strictement positifs. En prenant le logarithme,

$$w_n = v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln \left(1 - \frac{1}{3n}\right).$$

On utilise le développement limité usuel $\ln(1+z) = z - z^2/2 + o(z^2)$ en 0, pour $z = 1/n$ puis $z = -1/(3n)$. Ces changements d'échelle sont affines et donnent

$$\frac{1}{3} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{3n} - \frac{1}{6n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

$$\ln \left(1 - \frac{1}{3n} \right) = -\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

En additionnant,

$$w_n = -\frac{2}{9n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Ainsi $n^2 w_n \rightarrow -2/9$, et par continuité de la valeur absolue $n^2 |w_n| \rightarrow 2/9$. On a donc $|w_n| \sim 2/(9n^2)$. La série de Riemann

$$\sum 1/n^2$$

converge; la comparaison par équivalence de termes positifs donne la convergence de

$$\sum |w_n|.$$

La série de terme général w_n est donc absolument convergente.

b. Limite strictement positive de u_n .

Pour $n \geq 2$, le télescopage donne

$$v_n = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} w_k.$$

La série de terme général w_k converge d'après III.1.a. La suite v_n converge donc vers un

réel fini

$$L = v_1 + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k.$$

Puisque $u_n = e^{v_n}$ et que l'exponentielle est continue,

$$u_n \longrightarrow h = e^L > 0.$$

Cette preuve montre la stricte positivité de la limite, et pas seulement sa non-négativité. Conformément à la consigne, on ne cherche pas à calculer h .

c. Nature de la série de terme général I_n .

L'égalité $n^{1/3} I_n = u_n \rightarrow h > 0$ signifie

$$I_n \sim \frac{h}{n^{1/3}}.$$

Les deux suites comparées sont positives. La série de Riemann

$$\sum 1/n^{1/3}$$

diverge, puisque son exposant $1/3$ est inférieur à 1. La comparaison par équivalence donne donc la divergence de

$$\sum I_n.$$

Ses sommes partielles tendent vers $+\infty$.

2. a. Absence de convergence absolue.

Pour chaque $n \geq 1$, $|a_n| = |(-1)^{n-1} I_n| = I_n$. D'après III.1.c,

$$\sum I_n$$

diverge. La série de terme général a_n n'est donc pas absolument convergente.

b. Expression intégrale des sommes partielles.

Fixons $n \geq 1$. Chaque intégrale I_k converge ; la linéarité pour une somme finie permet donc d'écrire

$$A_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k = \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{(1+x^3)^k} dx.$$

Pour $x \geq 0$, posons $q = 1/(1+x^3)$, qui appartient à $]0, 1]$. La somme géométrique finie de raison $-q$ vaut

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} q^k = q \frac{1 - (-q)^n}{1 + q}.$$

Le dénominateur $1 + q$ est strictement positif, même lorsque $x = 0$ et $q = 1$. En substituant l'expression de q , on obtient

$$A_n = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{(1+x^3)^n}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \frac{1}{1+x^3} dx.$$

Cette formule est établie en ne permutant l'intégrale qu'avec une somme finie. Aucun échange avec une série infinie n'est effectué.

c. Convergence de la série alternée.

Méthode 1 — Contrôle d'un reste intégral.

Simplifions le facteur $q/(1+q)$ de III.2.b : il vaut $1/(x^3+2)$. Posons

$$K = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+2}, \quad R_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n(x^3+2)}.$$

Ces deux intégrales sont convergentes : pour $x \geq 0$, $0 < 1/(x^3+2) \leq 1/(1+x^3)$, dont l'intégrale vaut $I_1 < +\infty$, et

$$0 \leq \frac{1}{(1+x^3)^n(x^3+2)} \leq \frac{1}{2(1+x^3)^n},$$

dont l'intégrale est $I_n/2 < +\infty$. La linéarité entre intégrales convergentes donne alors

$$A_n = K - (-1)^n R_n.$$

De plus, $0 \leq R_n \leq I_n/2 \rightarrow 0$ par II.4. Ainsi $|A_n - K| \leq I_n/2 \rightarrow 0$, donc $A_n \rightarrow K$. La série de terme général a_n est convergente.

Méthode 2 — Deux sous-suites monotones de sommes partielles.

On peut aussi établir la convergence sans utiliser la formule intégrale de III.2.b. Posons $A_0 = 0$. Pour $m \geq 0$,

$$A_{2m+2} - A_{2m} = I_{2m+1} - I_{2m+2} \geq 0,$$

car I_n décroît. La suite des sommes partielles paires est donc croissante. De même,

$$A_{2m+3} - A_{2m+1} = -I_{2m+2} + I_{2m+3} \leq 0,$$

donc les sommes partielles impaires forment une suite décroissante. Enfin,

$$A_{2m+1} - A_{2m} = I_{2m+1} > 0. \text{ Ainsi } 0 = A_0 \leq A_{2m} \leq A_{2m+1} \leq A_1 = I_1.$$

Les deux sous-suites sont monotones et bornées, donc elles convergent. La différence I_{2m+1} tend vers 0 d'après II.4 : leurs limites sont égales. Toute somme partielle est soit paire soit impaire ; pour tout écart prescrit à la limite commune, tous les termes de chacune des deux sous-suites sont suffisamment proches à partir d'un certain rang. La suite entière (A_n) converge donc.

La première méthode identifie en plus la somme comme une intégrale ; la seconde démontre ici, avec des suites monotones, la convergence propre à cette série alternée, sans invoquer un critère général extérieur au référentiel.

d. Calcul de la somme.

Fixons $t > 0$. Pour $R > 0$, effectuons le changement affine $x = ty$ dans l'intégrale sur $[0, R]$. Comme $dx = t dy$ et $t^3 + x^3 = t^3(1 + y^3)$,

$$\int_0^R \frac{dx}{t^3 + x^3} = \frac{1}{t^2} \int_0^{R/t} \frac{dy}{1 + y^3}.$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, $R/t \rightarrow +\infty$ car $t > 0$. L'intégrale du membre de droite converge par I.1, ce qui justifie à la fois la convergence de celle de gauche et le passage à la limite. D'après I.3,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{t^3 + x^3} = \frac{I_1}{t^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}t^2}.$$

La première méthode de III.2.c a établi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = K = \int_0^{+\infty} 1/(x^3 + 2) dx.$$

Prenons $t = 2^{1/3} > 0$, de sorte que $t^3 = 2$. On obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{I_1}{2^{2/3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3} 2^{2/3}}.$$

La série est donc convergente, mais non absolument convergente, et sa somme est déterminée sans intégrer directement une série infinie.

Relevé des adaptations

- Problème 1, notations et questions A.1, A.2.a, A.2.b, A.2.c, B.1 et B.2 : remplacement du cadre scalaire initial par $\mathbb{R}$; conservation des matrices et des paramètres numériques. Les recherches de valeurs propres et de sous-espaces propres portent sur les réels.
- Problème 1, A.2.b : ajout des vecteurs $u = (1, 0, -1, 0)$ et $w = (0, 1, 0, -1)$ comme indication pour étudier le plan stable complémentaire des deux droites propres réelles de g . Cette étude est nécessaire pour décrire tout le spectre réel de f_A , notamment lorsque $a_2 = a_4$.
- Problème 1, B.2 : recherche d'un quadruplet réel. L'objectif de construire deux matrices non nulles dont le produit est nul est conservé et entièrement résolu.