



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

1990

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

On fixe $n \geq 2$ et on reprend les notations E , μ_k et L du sujet. La famille $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ est la base usuelle de l'espace des polynômes de degré au plus n , et $\dim E = n + 1$.

1. Méthode 1 — Comparaison par les croissances comparées.

L'intégrande est continu sur toute partie bornée de $] -\infty; 0]$. À l'extrémité infinie, on étudie sa valeur absolue : $|t^k e^t| = |t|^k e^t$. En posant $s = -t$, les croissances comparées donnent $s^{k+2} e^{-s} \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow +\infty$.

Il existe donc $A \geq 1$ tel que, pour $t \leq -A$, $|t^k e^t| \leq 1/t^2$. L'intégrale de $1/t^2$ converge en $-\infty$. Par comparaison, $\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt$ converge absolument, donc converge.

Cette preuve vaut pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. Elle donne aussi $t^k e^t \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$, résultat utilisé dans les intégrations par parties suivantes.

Méthode 2 — Intégrale gamma.

Sur un segment $[-B; 0]$, avec $B > 0$, le changement de variable affine $s = -t$ donne :

$$\int_{-B}^0 t^k e^t dt = (-1)^k \int_0^B s^k e^{-s} ds.$$

L'intégrale gamma de paramètre $k + 1 > 0$ converge et vaut $\Gamma(k + 1) = k!$. En passant à la limite, on établit la convergence et, plus précisément :

$$\int_{-\infty}^0 t^k e^t dt = (-1)^k k!.$$

La première méthode se réutilise pour d'autres poids exponentiels ; la seconde reconnaît une intégrale usuelle et fournit sa valeur.

2. Écrivons

$$f = \sum_{k=0}^n a_k \mu_k,$$

avec des coefficients réels a_k . Par la question 1 et la linéarité d'une somme finie d'intégrales absolument convergentes, $\int_{-\infty}^0 f(t)e^t dt$ existe.

Pour tout réel x , la fonction $t \mapsto f(t)e^t$ est continue entre 0 et x . En utilisant les intégrales orientées lorsque $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt = \int_{-\infty}^0 f(t)e^t dt + \int_0^x f(t)e^t dt.$$

Le membre de droite est défini pour tout x . Ainsi $g(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$ définit bien une fonction sur $\mathbb{R}$.

On établit une identité utile pour la suite. Posons $c_f = \int_{-\infty}^0 f(t)e^t dt$. Alors

$g(x) = e^{-x}(c_f + \int_0^x f(t)e^t dt)$. Le théorème fondamental du calcul intégral s'applique à cette dernière intégrale, d'intégrande continu. En dérivant le produit :

$$g'(x) = -g(x) + f(x).$$

Donc, pour toute fonction $f \in E$, $L(f)$ est dérivable et vérifie $L(f)' + L(f) = f$. Aucune dérivation sous une intégrale impropre n'a été utilisée.

3. a. On calcule les intégrales avec des primitives explicites. Pour $\mu_0 = 1$,

$$\int_{-\infty}^x e^t dt = e^x, \text{ donc } L(\mu_0) = \mu_0.$$

Comme $((t-1)e^t)' = te^t$ et que $(t-1)e^t \rightarrow 0$ en $-\infty$, on obtient $\int_{-\infty}^x te^t dt = (x-1)e^x$.

Ainsi $L(\mu_1) = \mu_1 - \mu_0$.

Enfin :

$$((t^2 - 2t + 2)e^t)' = (2t - 2 + t^2 - 2t + 2)e^t = t^2 e^t.$$

Le terme de bord en $-\infty$ est encore nul. Donc $\int_{-\infty}^x t^2 e^t dt = (x^2 - 2x + 2)e^x$, et $L(\mu_2) = \mu_2 - 2\mu_1 + 2\mu_0$.

3. b. Rectification typographique : l'indice k , omis après « tout entier » dans le PDF, est explicité dans l'énoncé transcrit.

Soit $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Pour $A < x$, une intégration par parties sur $[A; x]$ donne :

$$\int_A^x t^{k+1} e^t dt = [t^{k+1} e^t]_A^x - (k+1) \int_A^x t^k e^t dt.$$

Les intégrales convergent lorsque $A \rightarrow -\infty$, par la question 1 et l'ajout d'un segment borné. Le terme $A^{k+1} e^A$ tend vers 0, d'après les croissances comparées. Après passage à la limite et multiplication par e^{-x} :

$$L(\mu_{k+1})(x) = x^{k+1} - (k+1)L(\mu_k)(x).$$

On a donc $L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} - (k+1)L(\mu_k)$.

Pour la formule explicite, on raisonne par récurrence. Au rang 0, elle donne $L(\mu_0) = \mu_0$, ce qui est établi en 3.a. Supposons :

$$L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j.$$

La relation précédente entraîne :

$$L(\mu_{k+1}) = \mu_{k+1} + (-1)^{k+1} (k+1)! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j.$$

Le terme μ_{k+1} est précisément le terme d'indice $j = k+1$ de la même expression, car $(-1)^{k+1} (k+1)! (-1)^{k+1} / (k+1)! = 1$. Ainsi :

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, \quad L(\mu_k) = (-1)^k k! \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \mu_j.$$

3. c. Pour

$$f = \sum_{k=0}^n a_k \mu_k,$$

les intégrales intervenant sont convergentes. La linéarité de l'intégrale et la finitude de la somme donnent directement :

$$L(f) = \sum_{k=0}^n a_k L(\mu_k).$$

Par 3.b, $L(\mu_k)$ est un polynôme de degré k , donc appartient à E . La combinaison linéaire ci-dessus appartient aussi à E . Ainsi L est bien une application de E dans E .

4. a. Pour $f, h \in E$ et $a, b \in \mathbb{R}$, la linéarité des intégrales convergentes donne, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$L(af + bh)(x) = aL(f)(x) + bL(h)(x).$$

L'application L est donc linéaire. Pour l'injectivité, on peut utiliser deux approches.

Méthode 1 — Identité différentielle.

Si $L(f) = 0$, alors sa dérivée est également nulle. L'identité établie à la question 2, $L(f)' + L(f) = f$, donne donc $f = 0$. Le noyau de L est réduit à la fonction nulle : L est injective.

Méthode 2 — Conservation du coefficient dominant.

Par 3.b, le coefficient de μ_k dans $L(\mu_k)$ vaut $(-1)^k k! (-1)^k / k! = 1$, et tous ses autres termes sont de degré strictement inférieur à k .

Si $f \neq 0$ possède le degré d et le coefficient dominant $a_d \neq 0$, la formule de 3.c montre que $L(f)$ possède également le terme dominant $a_d \mu_d$. Les images des termes de degré inférieur à d ne peuvent pas l'annuler. Donc $L(f) \neq 0$, ce qui établit aussi l'injectivité.

La première méthode utilise la fonction définie par l'intégrale ; la seconde explique l'injectivité à partir de l'action de L sur les polynômes.

4. b. Les lignes et les colonnes sont indexées par $0, \dots, n$. La colonne k contient les coordonnées de $L(\mu_k)$. La formule de 3.b donne exactement :

$$M_{j,k} = \begin{cases} (-1)^{k-j} \frac{k!}{j!} & \text{si } 0 \leq j \leq k \leq n, \\ 0 & \text{si } j > k. \end{cases}$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Elle est donc inversible.

Notons D l'endomorphisme de dérivation sur E . On a $D(\mu_0) = 0$ et $D(\mu_k) = k\mu_{k-1}$ pour $k \geq 1$. L'identité $L(f)' + L(f) = f$ s'écrit $(\text{Id}_E + D) \circ L = \text{Id}_E$. Comme L est inversible, on en déduit $L^{-1} = \text{Id}_E + D$.

Ainsi, dans la même base :

$$(M^{-1})_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k, \\ k & \text{si } j = k - 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, l'inverse a des 1 sur la diagonale, les nombres $1, 2, \dots, n$ sur la première diagonale au-dessus, et des zéros ailleurs.

On peut aussi contrôler cette formule directement avec la relation de 3.b. Pour $k \geq 1$, $L(\mu_k) + kL(\mu_{k-1}) = \mu_k$, et pour $k = 0$, $L(\mu_0) = \mu_0$. Ce sont exactement les identités $L \circ (\text{Id}_E + D) = \text{Id}_E$ sur les vecteurs de base.

Par exemple, pour $n = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. a. Un vecteur propre f est, par définition, non nul. Si $\lambda = 0$, l'égalité $L(f) = \lambda f$ donnerait $f \in \text{Ker } L$, donc $f = 0$ par 4.a : contradiction. Ainsi $\lambda \neq 0$.

En appliquant l'identité de la question 2 à $L(f) = \lambda f$:

$$\lambda f' + \lambda f = f,$$

$$\text{donc } \forall x \in \mathbb{R}, (1 - \lambda)f(x) = \lambda f'(x).$$

La fonction $\varphi(x) = e^{(\lambda-1)x/\lambda} f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée vaut :

$$\varphi'(x) = e^{\frac{\lambda-1}{\lambda}x} \left(\frac{\lambda-1}{\lambda} f(x) + f'(x) \right) = 0.$$

Une fonction dérivable de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ est constante, par le théorème des accroissements finis. Ainsi φ est constante.

5. b. Méthode 1 — Utilisation de la fonction constante de 5.a.

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $e^{(\lambda-1)x/\lambda} f(x) = C$ pour tout x . Comme l'exponentielle ne s'annule pas et que $f \neq 0$, on a $C \neq 0$. Posons $c = (1 - \lambda)/\lambda$. Alors $f(x) = Ce^{cx}$.

Si $c \neq 0$, la dérivée d'ordre $n + 1$ de cette fonction vaut $Cc^{n+1}e^{cx}$ et ne s'annule jamais. Pourtant $f \in E$ impose $f^{(n+1)} = 0$. Cette contradiction montre que $c = 0$, donc $\lambda = 1$, et f est constant.

Réciproquement, 3.a donne $L(\mu_0) = \mu_0$, donc tout polynôme constant est fixé par L . On conclut :

$$\text{Sp}(L) = \{1\}, \quad \text{Ker}(L - \text{Id}_E) = \text{Vect}(\mu_0).$$

Le seul espace propre est de dimension 1, alors que $\dim E = n + 1 \geq 3$. Il ne fournit pas une base de E : L n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 — Comparaison des degrés.

Pour un vecteur propre non nul de degré d , 5.a donne $(1 - \lambda)f = \lambda f'$. Si $\lambda \neq 1$, le membre de gauche a le degré d . Le membre de droite est nul si $d = 0$, et de degré $d - 1$ si $d \geq 1$, puisque $\lambda \neq 0$. L'égalité est impossible. Donc $\lambda = 1$.

L'égalité devient alors $f' = 0$, ce qui impose que f soit constant. Avec $L(\mu_0) = \mu_0$, on retrouve le spectre $\{1\}$ et l'espace propre $\text{Vect}(\mu_0)$. Sa dimension est insuffisante pour diagonaliser L .

La première méthode suit la fonction auxiliaire demandée par l'énoncé ; la seconde exploite directement la structure polynomiale et évite de manipuler une exponentielle.

Problème 2

Partie A : Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$

1. Le calcul exact de la différence donne :

$$v_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Méthode 1 — Développements limités.

Posons $h = 1/n$, qui tend vers 0^+ . On a $1/(n+1) = h/(1+h)$. Les développements

usuels au voisinage de 0 donnent :

$$\frac{h}{1+h} = h - h^2 + o(h^2), \quad \ln(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

On soustrait ces développements, et non de simples équivalents :

$$v_n = -\frac{h^2}{2} + o(h^2) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Ainsi $v_n \sim -1/(2n^2)$.

Méthode 2 — Encadrement d'une intégrale.

Comme $\ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$, on peut écrire, après le changement affine $t = n + s$:

$$-v_n = \int_0^1 \left(\frac{1}{n+s} - \frac{1}{n+1} \right) ds = \int_0^1 \frac{1-s}{(n+s)(n+1)} ds.$$

Pour $s \in [0; 1]$, le dénominateur est compris entre $n(n+1)$ et $(n+1)^2$. Par comparaison et $\int_0^1 (1-s) ds = 1/2$:

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq -v_n \leq \frac{1}{2n(n+1)}.$$

En multipliant par n^2 , les deux bornes tendent vers $1/2$, donc $n^2 v_n \rightarrow -1/2$. On retrouve $v_n \sim -1/(2n^2)$.

La première méthode détermine le terme de second ordre ; la seconde donne aussi un encadrement explicite et établit que $v_n < 0$ pour tout $n \geq 1$.

2. D'après A.1, $|v_n| \sim 1/(2n^2)$. Ces termes sont positifs, et la série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2$$

converge. Le critère d'équivalence des séries à termes positifs donne la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} |v_n|.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} v_n$$

est donc absolument convergente, et en particulier convergente.

3. Méthode 1 — Somme télescopique.

Pour $N \geq 2$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} v_n = u_N - u_1.$$

Or $u_1 = 1$, et la série de A.2 converge. Par conséquent :

$$u_N = 1 + \sum_{n=1}^{N-1} v_n \longrightarrow 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

La suite converge donc, et sa limite est

$$\gamma = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n.$$

Méthode 2 — Suite monotone et minorée.

A.1 a établi $v_n < 0$, donc $u_{n+1} < u_n$: la suite est décroissante. Pour $k \geq 1$ et $t \in [k; k+1]$, $1/t \leq 1/k$. En intégrant puis en sommant :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \ln(n+1).$$

Ainsi $u_n \geq \ln(n+1) - \ln n = \ln(1 + 1/n) > 0$. La suite est minorée par 0. Le théorème de convergence des suites monotones assure donc sa convergence vers une limite γ .

La première méthode suit la question sur la série ; la seconde établit directement la convergence et donne $0 \leq \gamma \leq 1$.

Partie B : Expression intégrale de γ

1. Les seuls problèmes possibles se situent en $x = 0$. Pour $x > 0$, les intégrandes sont continues jusqu'à 1.

Le développement de Taylor de l'exponentielle donne $1 - e^{-x} = x + o(x)$, donc $(1 - e^{-x})/x \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^+$. L'intégrande de I se prolonge par continuité en 0 avec la valeur 1. L'intégrale I existe.

Pour un entier $n \geq 1$ fixé, le binôme donne $(1 - x/n)^n = 1 - x + O(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$; pour $n = 1$, cette égalité est exacte sans reste. Donc :

$$\frac{1 - (1 - x/n)^n}{x} \rightarrow 1.$$

L'intégrande de I_n admet lui aussi un prolongement continu en 0. Ainsi chaque intégrale I_n existe. Ces intégrandes sont non négatifs sur $[0; 1]$, car $e^{-x} \leq 1$ et $0 \leq (1 - x/n)^n \leq 1$.

2. a. Méthode 1 — Étude d'une fonction auxiliaire.

Posons $h(t) = t - \ln(1+t)$ sur $] -1; +\infty[$. Cette fonction est dérivable et $h'(t) = 1 - 1/(1+t) = t/(1+t)$. Le dénominateur est positif.

La fonction h décroît sur $] -1; 0]$ et croît sur $[0; +\infty[$. Elle atteint donc son minimum en 0, où $h(0) = 0$. Ainsi $h(t) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln(1+t) \leq t$. L'égalité a lieu seulement en $t = 0$.

Méthode 2 — Comparaison d'intégrales.

Si $t \geq 0$, $1/(1+s) \leq 1$ pour $s \in [0; t]$, donc $\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+s} ds \leq t$.

Si $-1 < t < 0$, on a $1/(1+s) \geq 1$ sur $[t; 0]$. Ainsi :

$$\ln(1+t) = - \int_t^0 \frac{1}{1+s} ds \leq - \int_t^0 1 ds = t.$$

Les deux méthodes établissent l'inégalité sur tout le domaine. L'étude de fonction donne aussi ses variations ; la comparaison d'intégrales met en évidence le changement d'orientation pour les valeurs négatives.

2. b. Soit $n \geq 1$. Pour $0 \leq x < n$, le réel $t = -x/n$ appartient à $] -1; 0]$. Par B.2.a :

$$n \ln \left(1 - \frac{x}{n} \right) \leq -x.$$

L'exponentielle étant croissante, on obtient $(1 - x/n)^n \leq e^{-x}$. Pour $x = n$, le membre de gauche vaut 0 et le membre de droite est strictement positif. L'inégalité est donc valable sur tout $[0; n]$.

2. c. Pour $0 \leq x < \sqrt{n}$, les deux logarithmes sont définis : $x^2 < n$ et $x < n$, car $n \geq 1$ entraîne $\sqrt{n} \leq n$.

La fonction est dérivable sur cet intervalle, avec une dérivée à droite en 0. On calcule :

$$\varphi'_n(x) = 1 - \frac{n}{n-x} + \frac{2x}{n-x^2} = -\frac{x}{n-x} + \frac{2x}{n-x^2}.$$

En mettant au même dénominateur :

$$\varphi'_n(x) = \frac{x(n+x^2-2x)}{(n-x)(n-x^2)} = \frac{x((x-1)^2+n-1)}{(n-x)(n-x^2)}.$$

Les facteurs du dénominateur sont strictement positifs. Le numérateur est non négatif. Pour $x > 0$, il est même strictement positif : si $n > 1$, le terme $n - 1$ est positif ; si $n = 1$, on a $0 < x < 1$, donc $(x - 1)^2 > 0$.

Ainsi φ_n est strictement croissante sur $[0; \sqrt{n}[$, et $\varphi_n(0) = 0$. Pour compléter les variations, si $n > 1$, seul $-\ln(1 - x^2/n)$ diverge lorsque $x \rightarrow \sqrt{n}^-$; la limite de φ_n est donc $+\infty$. Si $n = 1$, la simplification $\varphi_1(x) = x - \ln(1 + x)$ donne la limite finie $1 - \ln 2$ en 1^- .

On obtient donc une croissance de 0 vers $+\infty$ pour $n > 1$, et de 0 vers $1 - \ln 2$ pour $n = 1$. Dans tous les cas, $\varphi_n(x) \geq 0$ sur son domaine.

2. d. Pour $0 \leq x < \sqrt{n}$, la positivité établie en B.2.c s'écrit :

$$x + n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) - \ln \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) \geq 0.$$

En exponentiant, puis en multipliant par le facteur positif $1 - x^2/n$, on obtient :

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1 - \frac{x^2}{n}\right) e^{-x}.$$

Pour $x \in [\sqrt{n}; n]$, le membre de droite est non positif puisque $1 - x^2/n \leq 0$, tandis que le membre de gauche est non négatif. L'inégalité reste donc vraie sur cette partie du domaine, y compris aux bornes.

Ainsi elle est établie pour tous $n \geq 1$ et $x \in [0; n]$.

3. On utilise directement les deux encadrements de B.2. Pour $0 \leq x \leq n$:

$$0 \leq e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq \frac{x^2}{n} e^{-x}.$$

Pour $0 < x \leq 1$, on divise par $x > 0$. Les intégrales existent d'après B.1, et l'on obtient :

$$0 \leq I_n - I = \int_0^1 \frac{e^{-x} - (1 - x/n)^n}{x} dx \leq \frac{1}{n} \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

Une primitive de $x e^{-x}$ est $-(x + 1)e^{-x}$, donc l'intégrale du majorant vaut $1 - 2/e$. Ainsi :

$$0 \leq I_n - I \leq \frac{1 - 2/e}{n} \rightarrow 0.$$

La suite (I_n) converge vers I . Le passage à la limite repose sur cette majoration explicite, sans échange de limite et d'intégrale.

4. Question adaptée au programme actuel : le changement de variable non affine nécessaire, $y = 1/x$, est indiqué dans le sujet.

On établit d'abord la convergence de l'intégrale sur $[1; +\infty[$. Pour $y \geq 1$, $0 \leq e^{-y}/y \leq e^{-y}$, et $\int_1^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-1}$ converge. Par comparaison, $\int_1^{+\infty} e^{-y}/y dy$ existe.

Pour $0 < \varepsilon < 1$, le changement de variable $y = 1/x$ est de classe C^1 , strictement décroissant et de dérivée non nulle sur $[\varepsilon; 1]$. Avec $x = 1/y$ et $dx = -dy/y^2$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{e^{-1/x}}{x} dx = \int_1^{1/\varepsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $1/\varepsilon \rightarrow +\infty$ et le membre de droite tend vers une limite finie. Le membre de gauche définit donc une intégrale convergente, et :

$$J = \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy.$$

5. Chaque intégrale J_n existe, puisque son intégrande est continu sur $[1; n]$; pour $n = 1$, elle vaut 0.

Par B.4 et Chasles :

$$J - J_n = \int_1^n \frac{e^{-x} - (1 - x/n)^n}{x} dx + \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Les deux termes sont non négatifs, par B.2.b. L'encadrement utilisé en B.3 donne pour le premier :

$$0 \leq \int_1^n \frac{e^{-x} - (1 - x/n)^n}{x} dx \leq \frac{1}{n} \int_1^n x e^{-x} dx \leq \frac{1}{n} \int_1^{+\infty} x e^{-x} dx = \frac{2}{en}.$$

La dernière intégrale converge et vaut $2/e$, en utilisant la primitive $-(x+1)e^{-x}$ et la limite $(x+1)e^{-x} \rightarrow 0$ en $+\infty$.

Pour le second terme, $x \geq n \geq 1$ implique $1/x \leq 1/n$, donc :

$$0 \leq \int_n^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \leq \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} e^{-x} dx = \frac{e^{-n}}{n}.$$

Ainsi $0 \leq J - J_n \leq 2/(en) + e^{-n}/n \rightarrow 0$. On conclut que $J_n \rightarrow J$.

6. a. Pour un entier $n \geq 1$ fixé, le binôme donne $(1-x)^n = 1 - nx + O(x^2)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Le quotient $(1 - (1-x)^n)/x$ tend donc vers n .

Ce quotient est continu sur $]0; 1]$ et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur n . L'intégrale K_n existe.

6. b. Pour $x \in]0; 1]$, l'identité géométrique finie donne :

$$1 - (1-x)^n = x \sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j.$$

Ainsi

$$\frac{1 - (1-x)^n}{x} = \sum_{j=0}^{n-1} (1-x)^j.$$

Le membre de droite vaut n en 0, en accord avec le prolongement de B.6.a.

On intègre une somme finie et l'on utilise $\int_0^1 (1-x)^j dx = 1/(j+1)$:

$$K_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

7. a. Dans K_n , on effectue le changement de variable affine $x = nt$, d'abord à partir d'une borne inférieure positive, puis on utilise la convergence en 0. On obtient :

$$K_n = \int_0^n \frac{1 - (1-x/n)^n}{x} dx.$$

On sépare cette intégrale en $[0; 1]$ et $[1; n]$. La première partie est I_n . Pour la seconde, les termes sont intégrables sur un segment sans singularité :

$$\int_1^n \frac{1 - (1 - x/n)^n}{x} dx = \int_1^n \frac{1}{x} dx - \int_1^n \frac{(1 - x/n)^n}{x} dx = \ln n - J_n.$$

Ainsi $K_n = I_n + \ln n - J_n$, ce qui donne $I_n - J_n = K_n - \ln n$. Pour $n = 1$, les intégrales sur $[1; 1]$ sont nulles et la même identité est valable.

7. b. Par B.6.b et B.7.a, $I_n - J_n = u_n$. Les trois suites ont des limites établies : $I_n \rightarrow I$ par B.3, $J_n \rightarrow J$ par B.5 et $u_n \rightarrow \gamma$ par A.3. La différence de deux limites finies donne donc $I - J = \gamma$.

Les deux intégrales I et J convergent ; leurs intégrandes sont positifs et donc absolument intégrables sur $]0; 1]$. Leur différence peut être intégrée par linéarité :

$$\gamma = I - J = \int_0^1 \frac{1 - e^{-x} - e^{-1/x}}{x} dx.$$

On ne sépare pas ici le terme $1/x$ du terme e^{-x}/x , dont les intégrales individuelles divergeraient en 0 : c'est le quotient $(1 - e^{-x})/x$ qui possède l'intégrale convergente établie en B.1.

Partie C : Calcul d'une valeur approchée de γ à 10^{-3} près

1. a. On utilise la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $x \mapsto e^{-x}$, qui est de classe C^∞ . Pour tout entier $m \geq 0$ et tout $x \in [0; 1]$:

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^x (x-t)^m e^{-t} dt.$$

L'intégrale du reste est non négative. Pour $m = 2n - 1$, le facteur $(-1)^{m+1}$ vaut 1, donc la somme est inférieure ou égale à e^{-x} . Pour $m = 2n$, ce facteur vaut -1 , donc la somme est supérieure ou égale à e^{-x} .

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq e^{-x} \leq \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Pour $x = 0$, les trois expressions valent 1.

1. b. En soustrayant l'encadrement de C.1.a à 1, les inégalités s'inversent :

$$1 - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k x^k}{k!}.$$

Pour $x > 0$, on divise par x . Les termes constants des sommes se sont annulés ; on obtient des polynômes, avec des prolongements continus en 0. En intégrant sur $[0; 1]$:

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^1 x^{k-1} dx \leq I \leq \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_0^1 x^{k-1} dx.$$

Chaque intégrale vaut $1/k$. En posant $\ell = k - 1$:

$$\sum_{\ell=0}^{2n-1} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)} \leq I \leq \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)}.$$

Notons

$$S_n = \sum_{\ell=0}^{2n-2} \frac{(-1)^\ell}{(\ell+1)!(\ell+1)}.$$

La borne inférieure ajoute à S_n le seul terme d'indice $2n - 1$, qui vaut $-1/((2n)! 2n)$.

Ainsi :

$$-\frac{1}{(2n)!2n} \leq I - S_n \leq 0.$$

1. c. On choisit $n = 3$. L'encadrement précédent donne :

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} - \frac{1}{96} + \frac{1}{600} = \frac{28685}{36000},$$

$$S_3 - \frac{1}{6! \times 6} \leq I \leq S_3.$$

Comme $1/(6! \times 6) = 1/4320$, les bornes valent respectivement 0,796574074... et 0,796805555.... En particulier :

$$0,796574 < I < 0,796806.$$

La valeur $I_0 = 0,7966$ appartient à cet intervalle et vérifie

$$|I - I_0| < 0,000206 < 0,5 \times 10^{-3}. \text{ Ainsi } I \approx 0,7966 \text{ à la précision demandée.}$$

2. a. Pour $y \geq x \geq 1$, on a $0 \leq e^{-y}/y \leq e^{-y}/x$. Les intégrales convergent par comparaison à l'exponentielle. La croissance de l'intégrale donne :

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{e^{-x}}{x}.$$

2. b. Il suffit de vérifier $e^{-7}/7 < 1/4000$. La série exponentielle donne

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/k! > 1 + 1 + 1/2 = 5/2,$$

puisque les termes suivants sont positifs.

Ainsi :

$$\frac{e^{-7}}{7} < \frac{(2/5)^7}{7} = \frac{128}{546875} < \frac{1}{4000} = 0,25 \times 10^{-3}.$$

La dernière inégalité est exacte : $128 \times 4000 = 512000 < 546875$. Le réel $x_0 = 7$ satisfait donc la condition demandée. Numériquement, $e^{-7}/7$ vaut environ 0,0001303.

2. c. Résultat admis dans cette version adaptée, comme dans l'énoncé original : pour

$T = \int_1^7 e^{-y}/y \, dy$, on a $|T - 0,2193| \leq 0,25 \times 10^{-3}$. Cette donnée permet d'approcher la partie de J comprise entre 1 et 7.

Par Chasles, $J = T + R$, où $R = \int_7^{+\infty} e^{-y}/y \, dy$. D'après C.2.a et C.2.b,

$0 \leq R < 0,00025$. La donnée admise donne $0,21905 \leq T \leq 0,21955$. Par conséquent :

$$0,21905 \leq J < 0,21980.$$

On choisit $J_0 = 0,2194$. La distance à la borne inférieure vaut 0,00035, et celle à la borne supérieure vaut 0,00040. Ainsi $|J - J_0| < 0,0004 < 0,5 \times 10^{-3}$.

La valeur $J \approx 0,2194$ possède donc la précision demandée. Le léger décalage par rapport à 0,2193 tient compte du fait que le reste R est non négatif.

2. d. On utilise $\gamma = I - J$, puis l'inégalité triangulaire. Avec les valeurs retenues :

$$\gamma_0 = I_0 - J_0 = 0,7966 - 0,2194 = 0,5772.$$

Les erreurs établies en C.1.c et C.2.c donnent :

$$|\gamma - \gamma_0| \leq |I - I_0| + |J - J_0| < 0,000206 + 0,0004 = 0,000606 < 10^{-3}.$$

Ainsi $\gamma \approx 0,5772$ à 10^{-3} près, avec une borne d'erreur explicitement justifiée.

Relevé des adaptations

Problème 1, 3.b : l'indice k , omis dans la formulation « pour tout entier » du PDF, est rétabli ; la relation de récurrence et la formule demandées sont conservées.

Problème 2, B.4 : ajout de l'indication $y = 1/x$ pour le changement de variable non affine, conformément au référentiel fourni. La question et les intégrales à établir restent inchangées.