



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1989

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Partie A

Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$, et p, q deux endomorphismes de E tels que :

$$p \circ p = p, \quad q \circ q = q, \quad p \circ q = q \circ p.$$

On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.

1. a. Vérifier $g \circ g = g$.
1. b. Montrer que les valeurs propres de p et de q sont dans $\{0, 1\}$.
1. c. Démontrer que les valeurs propres de f sont dans $\{0, 1, 2\}$.
2. a. Démontrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q) \neq \{0\}$.
2. b. Démontrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(q) \neq \{0\}$.

Partie B

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes nuls ou de degré inférieur ou égal à N .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, on note T_n l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ définie de la façon suivante :

si

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k X^k,$$

avec $\lambda_0, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, alors

$$T_n(P) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k.$$

Ainsi, par exemple, avec $N = 4$:

$$T_3(X + X^2 + 2X^3 + X^4) = X + X^2 + 2X^3 \quad \text{et} \quad T_4(X + X^2) = X + X^2.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, T_n est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}_N[X]$.
2. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$: $T_n \circ T_n = T_n$.
2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq N$, déterminer le noyau et l'image de T_n .
2. c. Montrer, pour tous $n, r \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq N$ et $r \leq N$: $T_n \circ T_r = T_r \circ T_n$.
3. Soient n, r deux entiers naturels tels que $0 < n \leq r < N$.
 3. a. Comparer $\text{Ker}(T_n)$ et $\text{Ker}(T_r)$; comparer $\text{Im}(T_n)$ et $\text{Im}(T_r)$.
 3. b. Montrer que 0 et 2 sont valeurs propres de $T_n + T_r$.
 3. c. L'endomorphisme $T_n + T_r$ est-il diagonalisable ?

Problème 2

Partie I

1. Montrer que, pour tout réel $x \in]-\infty, 1/4]$, il existe un réel unique $y \in]-\infty, 1/2]$ tel que $x = y - y^2$, et calculer y en fonction de x .

On note f l'application de $] - \infty, 1/4]$ vers $] - \infty, 1/2]$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x}).$$

2. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C dans un repère orthonormé $(O; i, j)$ d'unité 4 cm.
3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $] - \infty, 1/4[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] - \infty, 1/4[$:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} (1-4x)^{-n+\frac{1}{2}}.$$

Partie II

L'objet de cette partie est de déterminer une approximation de f sur $] - 1/4, 1/4[$ par des fonctions polynomiales.

1. a. Montrer, en utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in] - 1/4, 1/4[$:

$$f(x) = Q_n(x) + R_n(x),$$

où

$$Q_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(2k-2)!}{(k-1)!k!} x^k$$

et $R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$

1. b. Calculer Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}.$

2. a. Pour $x \in [0, 1/4[$ fixé, quelle est la borne supérieure de l'application de $[0, x]$ vers $\mathbb{R}$ définie par $t \mapsto \frac{x-t}{1-4t}$?

2. b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, 1/4[$:

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{(4x)^n}{2\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt[3]{n}}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1/4, 0]$:

$$|R_n(x)| \leq \frac{(-4x)^n |x|}{(n+1)\sqrt[3]{n}} \leq \frac{1}{4(n+1)\sqrt[3]{n}}.$$

4. Donner un majorant de $|f(x) - Q_n(x)|$, indépendant de $x \in]-1/4, 1/4[$, et tendant vers 0 quand n tend vers l'infini.

5. a. Déterminer le plus petit entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N \implies \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{6 \times 10^{-4} (n+1)\sqrt[3]{n}} < 1.$$

5. b. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq N \implies \left| R_n\left(-\frac{1}{6}\right) \right| < 10^{-4}.$$

Partie III

On étudie dans cette partie une autre méthode d'approximation de f sur $[0, 1/4[$ par des fonctions polynomiales.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'applications polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = x + (P_n(x))^2.$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4 .
2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de P_n et de $P_{n+1} - P_n$ sont des entiers naturels.

En déduire que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. b. Montrer, par récurrence sur n , que, pour tout $x \in [0, 1/4]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \leq f(x)$. Montrer que l'inégalité $P_n(x) < f(x)$ est stricte lorsque $x > 0$.
2. c. Démontrer que, pour tout $x \in [0, 1/4]$, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.