



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1988

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

On note n un entier naturel, $n \geq 2$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, I l'identité de $\mathbb{R}^n$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par $f(e_k) = 2^{k-1}e_{n-k+1}$, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$.

1. a. Exprimer $f \circ f$ en fonction de I et de n .
1. b. En déduire que f est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur lui-même, et calculer f^{-1} en fonction de f .
2. Écrire la matrice de f relativement à B .
3. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 5$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f ; f est-il diagonalisable?
4. On revient au cas général.
4. a. Pour tout entier k de l'intervalle $[1; \frac{n+1}{2}]$ et tout réel λ , calculer $f(e_k + \lambda e_{n-k+1})$.
4. b. Montrer que, pour chaque entier k de l'intervalle $[1; \frac{n+1}{2}[$, il existe deux réels distincts a_k et b_k , que l'on calculera, tels que $e_k + a_k e_{n-k+1}$ et $e_k + b_k e_{n-k+1}$ soient des vecteurs propres de f . Examiner le cas où $2k = n + 1$.
4. c. Montrer que f est diagonalisable.

PROBLÈME 2

Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes de la question 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = e^{-n\left(x + \frac{1}{x}\right)} \quad \text{si } x > 0, \quad f_n(0) = 0.$$

Les dérivées en 0 des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ sont entendues comme des dérivées à droite.

1. Exprimer f_n en fonction de f_1 . Montrer que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier les variations de f_n . Tracer approximativement la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé et la situer par rapport à celle de f_{n+1} .

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f_n(x) \leq e^{-2n}$.

3. a. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n(x) = a(x - 1)$$

admet une unique solution notée u_n .

3. b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

3. c. L'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(x - 1)$$

admet une unique solution notée v_n .

Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n \geq 1}$.

3. d. Pour $n \geq 2$, quelle est la pente a_n de la droite joignant le point $A(1, 0)$ au point $M_n(n, f_n(n))$?

Montrer que cette pente vérifie l'inégalité $a_n > \frac{e^{-n^2}}{n^2}$ pour tout entier $n \geq 2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$

$$f_n(x) = \frac{e^{-n^2}}{n^2}(x - 1)$$

admet une unique solution notée w_n . Montrer que $n < w_n$, et en déduire la limite de w_n lorsque n tend vers l'infini.

4. Montrer que, pour tout $x \geq 0$ fixé, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente.

Calculer la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

de cette série.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$.

On ne cherchera pas à calculer cette intégrale.

5. a. Démontrer que la fonction F_n est dérivable. Étudier le sens de variation de F_n .

5. b. Montrer que, pour tout $x > 0$, $f_n(x) < e^{-nx}$.

En déduire que l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

6. Montrer que les séries de termes généraux $J_n = \int_0^1 f_n(t) \, dt$, $K_n = \int_1^{+\infty} f_n(t) \, dt$ et I_n sont convergentes.