



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1988

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

PROBLÈME 1

On travaille dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 2$. La lettre I désigne l'endomorphisme identité.

1. a. Calcul de $f \circ f$.

Il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique. Pour $1 \leq k \leq n$, la linéarité donne

$$(f \circ f)(e_k) = f(2^{k-1}e_{n-k+1}) = 2^{k-1}2^{n-k}e_k = 2^{n-1}e_k.$$

Les endomorphismes $f \circ f$ et $2^{n-1}I$ coïncident sur une base, donc

$$f \circ f = 2^{n-1}I.$$

1. b. Isomorphisme et inverse.

Méthode 1 — Construction directe de l'inverse.

Comme $2^{n-1} > 0$, l'endomorphisme $g = 2^{1-n}f$ est bien défini. La question précédente donne

$$f \circ g = 2^{1-n}(f \circ f) = I, \quad g \circ f = 2^{1-n}(f \circ f) = I.$$

Ainsi, g est un inverse à gauche et à droite de f . L'endomorphisme f est un isomorphisme et

$$f^{-1} = 2^{1-n}f.$$

Méthode 2 — Noyau et dimension finie.

Si $f(v) = 0$, alors $f(f(v)) = 0$. Or $f(f(v)) = 2^{n-1}v$, donc $v = 0$. Ainsi, $\text{Ker } f = \{0\}$: f est injectif.

Un endomorphisme injectif d'un espace de dimension finie est bijectif, par le théorème du rang. L'inverse existe donc. En composant $f \circ f = 2^{n-1}I$ à gauche par f^{-1} , on obtient $f = 2^{n-1}f^{-1}$, soit $f^{-1} = 2^{1-n}f$.

La première méthode donne immédiatement l'inverse ; la seconde utilise une démarche générale applicable lorsque le noyau est plus simple à étudier.

2. Matrice de f .

La colonne k de la matrice est le vecteur des coordonnées de $f(e_k) = 2^{k-1}e_{n-k+1}$. Elle comporte donc un seul coefficient non nul, à la ligne $n - k + 1$.

En notant $M = (m_{j,k})_{1 \leq j,k \leq n}$,

$$m_{j,k} = \begin{cases} 2^{k-1} & \text{si } j + k = n + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 2^{n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La formule des coefficients précise la matrice pour toute taille $n \geq 2$, y compris les petites tailles où les lignes schématiques se confondent.

3. Étude pour $n = 5$.

On a $f^2 = 16I$. Si $v \neq 0$ est un vecteur propre de valeur propre réelle μ , alors $f^2(v) = \mu^2 v = 16v$, donc $\mu^2 = 16$. Les seules valeurs propres possibles sont 4 et -4 .

Écrivons $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + x_5 e_5$. Les images des vecteurs de base donnent

$$f(v) = 16x_5 e_1 + 8x_4 e_2 + 4x_3 e_3 + 2x_2 e_4 + x_1 e_5.$$

Pour $\mu = 4$, l'équation $f(v) = 4v$ impose $x_5 = x_1/4$, $x_4 = x_2/2$ et laisse x_3 libre. Ainsi,

$$E_4 = \text{Ker}(f - 4I) = \text{Vect} \left(e_1 + \frac{1}{4}e_5, e_2 + \frac{1}{2}e_4, e_3 \right).$$

Les trois vecteurs sont libres : leurs coordonnées aux places 1, 2 et 3 imposent successivement l'annulation de leurs coefficients dans une combinaison nulle. Donc $\dim E_4 = 3$.

Pour $\mu = -4$, l'équation impose $x_5 = -x_1/4$, $x_4 = -x_2/2$ et $4x_3 = -4x_3$, donc $x_3 = 0$. Ainsi,

$$E_{-4} = \text{Ker}(f + 4I) = \text{Vect} \left(e_1 - \frac{1}{4}e_5, e_2 - \frac{1}{2}e_4 \right), \quad \dim E_{-4} = 2.$$

Les espaces propres sont non nuls : 4 et -4 sont donc bien des valeurs propres. Les espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe ; leurs dimensions totalisent $3 + 2 = 5$. Ils engendrent donc $\mathbb{R}^5$.

L'endomorphisme f est diagonalisable, avec une base propre formée des cinq vecteurs précédents. Cette preuve ne fait intervenir ni déterminant ni polynôme caractéristique.

4. a. Image d'une combinaison de deux vecteurs de base.

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq (n+1)/2$ et tout réel λ , la linéarité donne

$$f(e_k + \lambda e_{n-k+1}) = 2^{k-1}e_{n-k+1} + \lambda 2^{n-k}e_k.$$

Cette formule demeure valable si $2k = n+1$, auquel cas les deux vecteurs de base sont identiques.

4. b. Construction des vecteurs propres.

Supposons d'abord $1 \leq k < (n+1)/2$. Alors e_k et e_{n-k+1} sont distincts, donc libres. Le vecteur $e_k + \lambda e_{n-k+1}$ est toujours non nul.

Pour qu'il soit propre de valeur propre μ , il faut et il suffit, d'après 4. a et l'identification des coefficients, que

$$\lambda 2^{n-k} = \mu, \quad 2^{k-1} = \mu \lambda.$$

En substituant la première égalité dans la seconde,

$$\lambda^2 = 2^{2k-n-1}.$$

Les deux solutions réelles sont

$$a_k = 2^{k-(n+1)/2}, \quad b_k = -2^{k-(n+1)/2}.$$

Elles sont distinctes car $a_k > 0$. Les valeurs propres correspondantes sont

$$a_k 2^{n-k} = 2^{(n-1)/2}, \quad b_k 2^{n-k} = -2^{(n-1)/2}.$$

Posons $c = 2^{(n-1)/2} > 0$. Nous avons donc obtenu les vecteurs propres $e_k + a_k e_{n-k+1}$ pour c , et $e_k - a_k e_{n-k+1}$ pour $-c$.

Le cas $2k = n + 1$ n'existe que si n est impair, avec $k = (n + 1)/2$. Alors

$$f(e_k) = 2^{k-1} e_k = c e_k.$$

De plus, $e_k + \lambda e_{n-k+1} = (1 + \lambda) e_k$. Pour $\lambda \neq -1$, ce vecteur est propre pour c ; pour $\lambda = -1$, il est nul et n'est pas un vecteur propre. Le vecteur central ne fournit donc aucune direction propre pour $-c$.

4. c. Diagonalisation dans le cas général.

Méthode 1 — Construction d'une base propre.

Posons $p = \lfloor n/2 \rfloor$. Pour $1 \leq k \leq p$, notons

$$u_k^+ = e_k + a_k e_{n-k+1}, \quad u_k^- = e_k - a_k e_{n-k+1}, \quad a_k = 2^{k-(n+1)/2} > 0.$$

La question 4. b montre que u_k^+ et u_k^- sont propres pour c et $-c$. Dans chaque plan engendré par e_k, e_{n-k+1} , ces deux vecteurs engendrent les vecteurs de base grâce aux identités

$$e_k = \frac{1}{2}(u_k^+ + u_k^-), \quad e_{n-k+1} = \frac{1}{2a_k}(u_k^+ - u_k^-).$$

Si $n = 2p$, les paires d'indices $(k, n - k + 1)$, pour $1 \leq k \leq p$, couvrent tous les indices. Les $2p = n$ vecteurs u_k^+, u_k^- engendrent donc $\mathbb{R}^n$ et forment une base propre.

Si $n = 2p + 1$, ces paires couvrent tous les indices sauf $p + 1$. On complète la famille par

e_{p+1} , propre pour c . On obtient encore une famille génératrice de n vecteurs, donc une base propre.

Ainsi, f est diagonalisable. Plus précisément,

$$\dim E_c = \begin{cases} p & \text{si } n = 2p, \\ p + 1 & \text{si } n = 2p + 1, \end{cases} \quad \dim E_{-c} = p.$$

Une base de E_c est $(u_k^+)_{1 \leq k \leq p}$, complétée par e_{p+1} lorsque n est impair ; une base de E_{-c} est $(u_k^-)_{1 \leq k \leq p}$.

Méthode 2 — Décomposition à partir de $f^2 = c^2 I$.

Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, définissons

$$v_+ = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{c} f(v) \right), \quad v_- = \frac{1}{2} \left(v - \frac{1}{c} f(v) \right).$$

Comme $f^2 = c^2 I$, on vérifie directement

$$f(v_+) = \frac{1}{2} (f(v) + cv) = cv_+, \quad f(v_-) = \frac{1}{2} (f(v) - cv) = -cv_-.$$

Ainsi, $v_+ \in E_c$, $v_- \in E_{-c}$ et $v = v_+ + v_-$. De plus, si $z \in E_c \cap E_{-c}$, alors $cz = -cz$, donc $2cz = 0$ et $z = 0$ puisque $c > 0$.

On a donc démontré directement $\mathbb{R}^n = E_c \oplus E_{-c}$. La réunion de bases de ces espaces propres est une base propre, ce qui prouve la diagonalisation.

Cette seconde méthode exploite une identité quadratique concrète sans invoquer de critère général sur les polynômes annulateurs. La première fournit les vecteurs propres explicitement ; la seconde décompose tout vecteur à partir de son image par f .

PROBLÈME 2

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, $f_n(x) = e^{-n(x+1/x)}$; on a $f_n(0) = 0$. Toutes les dérivées en 0 sont prises à droite.

1. Expression en fonction de f_1 et dérivabilité.

Pour $x > 0$,

$$f_n(x) = \left(e^{-(x+1/x)}\right)^n = f_1(x)^n.$$

La formule vaut aussi pour $x = 0$, puisque $n \geq 1$ et $f_n(0) = f_1(0)^n = 0$.

Sur $]0; +\infty[$, la fonction f_1 est dérivable par composition de fonctions dérivables, et

$$f_1'(x) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) e^{-(x+1/x)}.$$

À droite en 0, on a $0 \leq f_1(x) \leq e^{-1/x} \rightarrow 0$, donc f_1 est continue en 0. Pour sa dérivée, puisque $f_1(0) = 0$,

$$0 \leq \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x} = \frac{1}{x} e^{-x-1/x} \leq \frac{1}{x} e^{-1/x}.$$

En posant $t = 1/x$, le dernier membre est te^{-t} , qui tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$ par croissance comparée. Ainsi, $f_1'(0) = 0$ et f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

Rectification locale de l'énoncé : le PDF demande la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ alors que f_1 y est seulement définie sur $\mathbb{R}_+$. La question adaptée porte sur son domaine de définition, avec une dérivée à droite en 0.

2. Variations, comparaison et courbes.

Pour $x > 0$, la dérivation donne

$$f'_n(x) = n \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) e^{-n(x+1/x)}.$$

Comme $n > 0$ et l'exponentielle est positive, le signe de la dérivée est celui de $1 - x^2$. Elle est donc positive sur $]0; 1[$, nulle en 1, et négative sur $]1; +\infty[$.

À l'origine, la formule $f_n = f_1^n$ donne la continuité et la dérivabilité à droite, avec $f'_n(0) = 0$. À l'infini, $0 < f_n(x) < e^{-nx} \rightarrow 0$. Enfin, $f_n(1) = e^{-2n}$.

x	0	1	$+\infty$
Signe de f'_n	0, puis +	0	—
Variation de f_n	0	$\nearrow e^{-2n}$	$\searrow 0$

Le maximum global est donc e^{-2n} , atteint uniquement en $x = 1$. En particulier, $f_n(x) \leq e^{-2n}$ pour tout $x \geq 0$.

On peut aussi vérifier directement cette majoration : pour $x > 0$,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0,$$

donc $e^{-n(x+1/x)} \leq e^{-2n}$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. En 0, l'inégalité est stricte.

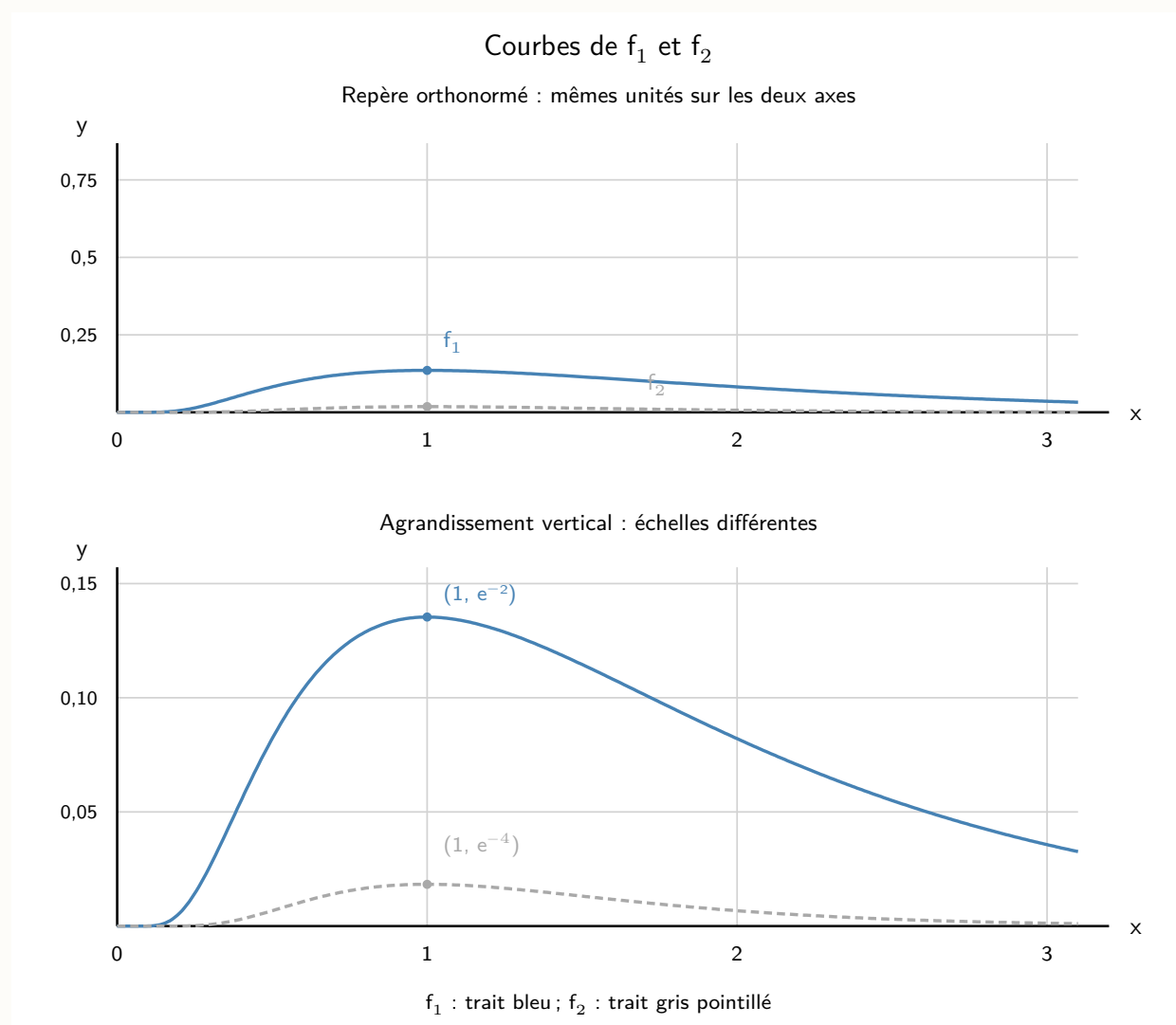
Pour comparer deux courbes successives, observons que, pour $x > 0$,

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) e^{-(x+1/x)} < f_n(x),$$

car $0 < e^{-(x+1/x)} < 1$. Les courbes se rencontrent donc seulement à l'origine ; celle de f_{n+1} est strictement en dessous de celle de f_n pour $x > 0$.

Pour tout n , la courbe part de l'origine avec une tangente horizontale, monte jusqu'au point $(1, e^{-2n})$, où la tangente est horizontale, puis descend vers l'asymptote horizontale $y = 0$.

La figure illustre ces propriétés pour $n = 1$ et $n + 1 = 2$. Le panneau supérieur emploie un repère orthonormé, avec la même longueur pour une unité sur chaque axe. Le panneau inférieur agrandit verticalement les mêmes courbes pour rendre leur comparaison plus lisible ; ses échelles sont différentes. Les points sont calculés directement à partir des expressions exactes des fonctions.



3. a. Existence et unicité de u_n pour tout $a \neq 0$.

Fixons $n \geq 1$. Ni $x = 0$ ni $x = 1$ ne résout l'équation : en 0, elle donnerait $0 = -a$, impossible ; en 1, elle donnerait $e^{-2n} = 0$, impossible.

Pour $x > 0$, $f_n(x) > 0$. Le signe de $a(x - 1)$ impose donc $x > 1$ si $a > 0$, et $0 < x < 1$ si $a < 0$. Ces cas doivent être étudiés séparément.

Méthode 1 — Comparaison de deux fonctions monotones.

Si $a > 0$, posons $h(x) = f_n(x) - a(x - 1)$ sur $]1; +\infty[$. Cette fonction est continue, et, pour $x > 1$,

$$h'(x) = f'_n(x) - a < 0.$$

Elle est donc strictement décroissante. On a $h(1) = e^{-2n} > 0$ et $h(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, puisque $f_n(x) \rightarrow 0$ et $a(x - 1) \rightarrow +\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires fournit un zéro, unique par stricte monotonie. Il appartient à $]1; +\infty[$.

Si $a < 0$, posons $b = -a > 0$. L'équation devient $f_n(x) = b(1 - x)$ sur $[0; 1]$. La différence $h(x) = f_n(x) - b(1 - x)$ est continue et vérifie

$$h(0) = -b < 0, \quad h(1) = e^{-2n} > 0, \quad h'(x) = f'_n(x) + b > 0 \quad (0 < x < 1).$$

Elle est strictement croissante, et le théorème des valeurs intermédiaires donne un unique zéro dans $]0; 1[$.

Ainsi, pour chaque $a \neq 0$, il existe exactement une solution u_n , avec $u_n > 1$ si $a > 0$ et $0 < u_n < 1$ si $a < 0$.

Méthode 2 — Étude de la pente issue du point $(1, 0)$.

Pour $x > 0, x \neq 1$, posons $g_n(x) = f_n(x)/(x - 1)$. L'équation recherchée équivaut à $g_n(x) = a$.

Sur chacun des intervalles $]0; 1[$ et $]1; +\infty[$,

$$g'_n(x) = \frac{(x-1)f'_n(x) - f_n(x)}{(x-1)^2} < 0.$$

En effet, si $x < 1$, $x-1 < 0$ et $f'_n(x) > 0$; si $x > 1$, $x-1 > 0$ et $f'_n(x) < 0$. Dans les deux cas, le premier terme du numérateur est négatif et on lui soustrait $f_n(x) > 0$.

Sur $]0; 1[$, $g_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $g_n(x) \rightarrow -\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^-$. Par continuité et stricte décroissance, g_n réalise une bijection de $]0; 1[$ sur $] -\infty; 0[$.

Sur $]1; +\infty[$, $g_n(x) \rightarrow +\infty$ lorsque $x \rightarrow 1^+$ et $g_n(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$. Elle réalise donc une bijection de $]1; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$.

Pour chaque $a \neq 0$, une seule de ces deux branches contient a dans son image, et elle fournit une unique solution. La première méthode compare directement les deux membres; la seconde interprète a comme une pente et servira aussi à la question 3. d.

3. b. Limite de u_n .

Le réel $a \neq 0$ est ici fixé, indépendant de n . L'équation définissant u_n et la majoration de la question 2 donnent

$$|a| |u_n - 1| = f_n(u_n) \leq e^{-2n}.$$

On peut diviser par $|a| > 0$:

$$0 \leq |u_n - 1| \leq \frac{e^{-2n}}{|a|} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $u_n \rightarrow 1$, par valeurs supérieures si $a > 0$ et par valeurs inférieures si $a < 0$.

3. c. Limite de v_n .

Pour chaque n , le coefficient $1/n$ est strictement positif. La question 3. a assure l'existence et l'unicité de v_n , avec $v_n > 1$.

L'équation donne

$$v_n - 1 = nf_n(v_n), \quad 0 < v_n - 1 \leq ne^{-2n}.$$

Par croissance comparée, $ne^{-2n} \rightarrow 0$. Le théorème d'encadrement donne donc $v_n \rightarrow 1$.

On ne peut pas appliquer directement 3. b avec $a = 1/n$, puisque 3. b suppose a fixé ; la majoration ci-dessus prend explicitement en compte sa dépendance en n .

3. d. Pente a_n et limite de w_n .

Rectification locale de l'énoncé : pour $n = 1$, les points $A(1, 0)$ et $M_1(1, e^{-2})$ ont la même abscisse et des ordonnées distinctes. Leur droite est verticale et n'a pas de pente réelle. La définition et l'inégalité concernant a_n sont donc restreintes à $n \geq 2$. La suite $(w_n)_{n \geq 1}$ reste bien définie.

Pour $n \geq 2$, la pente est

$$a_n = \frac{f_n(n) - 0}{n - 1} = \frac{e^{-n(n+1/n)}}{n - 1} = \frac{e^{-n^2-1}}{n - 1}.$$

Comme $n - 1 > 0$, l'inégalité $a_n > e^{-n^2}/n^2$ équivaut à $n^2 > e(n - 1)$. Or

$$n^2 - 4(n - 1) = (n - 2)^2 \geq 0,$$

donc $n^2 \geq 4(n - 1) > e(n - 1)$, car $e < 4$.

Pour justifier cette dernière borne avec les outils du programme, la série exponentielle donne

$$e = \sum_{k=0}^{+\infty} 1/k!.$$

Pour $k \geq 2$, $k! \geq 2^{k-1}$, avec une inégalité stricte dès $k = 3$. Ainsi,

$$e < 2 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 3 < 4.$$

On a donc bien $a_n > \frac{e^{-n^2}}{n^2}$ pour tout $n \geq 2$.

Pour chaque $n \geq 1$, le coefficient $c_n = e^{-n^2}/n^2$ est strictement positif. La question 3. a assure une unique solution $w_n > 1$ de $f_n(x) = c_n(x-1)$.

Pour $n \geq 2$, utilisons la fonction strictement décroissante g_n étudiée dans la seconde méthode de 3. a. On a

$$g_n(n) = a_n > c_n = g_n(w_n).$$

La stricte décroissance impose $n < w_n$. Pour $n = 1$, l'inégalité $1 < w_1$ résulte déjà de la positivité du coefficient dans 3. a. Ainsi, $n < w_n$ pour tout $n \geq 1$.

Comme $n \rightarrow +\infty$, cette minoration donne $w_n \rightarrow +\infty$. Cette question montre qu'une pente dépendant de n et devenant très petite peut déplacer l'intersection loin de 1, contrairement aux deux questions précédentes.

4. Série de terme général $f_n(x)$.

Pour $x = 0$, tous les termes sont nuls : la série converge et sa somme vaut 0.

Pour $x > 0$ fixé, posons $q = e^{-(x+1/x)}$. On a $0 < q < 1$ et $f_n(x) = q^n$. Il s'agit d'une série géométrique convergente, dont la somme, à partir de $n = 1$, est

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \frac{q}{1-q} = \frac{1}{e^{x+1/x} - 1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{e^{x+1/x} - 1} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

5. a. Dérivabilité et variations de F_n .

La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, y compris en 0. Pour tout $x \geq 0$, l'intégrale sur le segment $[0; x]$ définissant $F_n(x)$ existe donc.

Le théorème fondamental du calcul intégral donne, pour $x > 0$,

$$F'_n(x) = f_n(x) > 0.$$

En 0, pour $h > 0$,

$$0 \leq \frac{F_n(h) - F_n(0)}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h f_n(t) \, dt \leq \max_{0 \leq t \leq h} f_n(t).$$

Par continuité de f_n en 0 et $f_n(0) = 0$, ce maximum tend vers 0 lorsque $h \rightarrow 0^+$. Ainsi, $F'_n(0) = 0$.

Enfin, si $0 \leq a < b$, alors

$$F_n(b) - F_n(a) = \int_a^b f_n(t) \, dt > 0.$$

L'inégalité est stricte car l'intégrande est continue et strictement positive à l'intérieur du segment. La fonction F_n est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$, avec $F_n(0) = 0$.
Aucun calcul explicite de F_n n'est nécessaire.

5. b. Convergence de I_n et limite de la suite.

Pour $x > 0$, on a $e^{-n/x} < 1$, donc

$$0 < f_n(x) = e^{-nx} e^{-n/x} < e^{-nx}.$$

L'intégrande f_n est continue en 0, donc il n'y a pas de difficulté d'intégrabilité près de cette borne. Sur $[0; +\infty[$, elle est positive et majorée par l'intégrande de référence e^{-nt} , dont l'intégrale vaut $1/n$.

Le théorème de comparaison des intégrales impropres à intégrandes positives donne la convergence de I_n et

$$0 < I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-nt} dt = \frac{1}{n}.$$

La positivité stricte résulte par exemple de l'intégrale sur $[1; 2]$, où f_n est continue et strictement positive. Comme $1/n \rightarrow 0$, on conclut que $I_n \rightarrow 0$.

On peut aussi préciser que (I_n) est strictement décroissante : pour $t > 0$, $f_{n+1}(t) < f_n(t)$. Les deux intégrales convergent, et la différence est positive sur tout segment intérieur non trivial, donc $I_{n+1} < I_n$. La limite reste 0, par la majoration précédente.

6. Convergence des séries de termes J_n , K_n et I_n .

Chaque J_n est une intégrale sur un segment d'une fonction continue. Chaque K_n converge par la même comparaison avec e^{-nt} que dans 5. b. Toutes ces quantités sont positives, et la relation de Chasles, suivie du passage à la limite à l'infini, donne $I_n = J_n + K_n$.

Méthode 1 — Découpage au point 1.

Sur $[0; 1]$, la majoration globale de la question 2 donne

$$0 \leq J_n = \int_0^1 f_n(t) \, dt \leq e^{-2n}.$$

La série

$$\sum_{n \geq 1} e^{-2n}$$

est géométrique de raison $e^{-2} \in]0; 1[$. Par comparaison,

$$\sum_{n \geq 1} J_n$$

converge.

Sur $[1; +\infty[$, la question 5. b donne

$$0 \leq K_n \leq \int_1^{+\infty} e^{-nt} \, dt = \frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n}.$$

La série géométrique

$$\sum_{n \geq 1} e^{-n}$$

converge; la comparaison assure donc la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} K_n.$$

Comme $I_n = J_n + K_n$, la linéarité des séries convergentes donne la convergence de

$$\sum_{n \geq 1} I_n.$$

Méthode 2 — Domination géométrique par f_1 .

Pour $t > 0$, l'inégalité $t + 1/t \geq 2$ donne

$$f_n(t) = f_1(t)e^{-(n-1)(t+1/t)} \leq e^{-2(n-1)} f_1(t).$$

Elle est encore vraie en $t = 0$, où les deux membres sont nuls. L'intégrale I_1 converge par 5. b ; on peut donc intégrer cette majoration positive et obtenir

$$0 \leq I_n \leq e^{-2(n-1)} I_1.$$

La série du membre de droite est géométrique de raison $e^{-2} < 1$. Ainsi,

$$\sum I_n$$

converge par comparaison. Puisque $0 \leq J_n \leq I_n$ et $0 \leq K_n \leq I_n$, les séries

$$\sum J_n$$

et

$$\sum K_n$$

convergent également.

La première méthode adapte les majorations aux deux morceaux de l'intégrale ; la seconde conserve une fonction intégrable commune et isole une décroissance géométrique en n . Aucune interversion d'une série infinie et d'une intégrale n'est utilisée.

Relevé des adaptations

- Problème 2, question 1 : remplacement du domaine $\mathbb{R}$, indiqué par erreur dans la demande de dérivabilité, par le domaine réel de définition $\mathbb{R}_+$; précision de la dérivée à droite en 0, également utilisée en question 5. a.
- Problème 2, question 3. d : restriction à $n \geq 2$ de la définition et de l'inégalité concernant la pente a_n , car la droite est verticale pour $n = 1$. La définition de w_n pour tout $n \geq 1$ est conservée et le cas $n = 1$ est traité séparément.
- Problème 2, question 2 : les courbes demandées sont intégrées en SVG autonome dans le corrigé, avec des points calculés à partir des formules ; l'illustration choisit $n = 1$ et $n + 1 = 2$ et distingue le repère orthonormé d'un agrandissement vertical.