



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1986

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

PROBLÈME 1

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

Partie I

1. Pour $s \in \mathbb{R}$ fixé, résoudre le système (I) à cinq équations, d'inconnue

$$(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 :$$

$$\begin{cases} -sx + y = 0, \\ x - sy + z = 0, \\ y - sz + t = 0, \\ z - st + u = 0, \\ t - su = 0. \end{cases}$$

Il est conseillé de prendre u comme inconnue auxiliaire.

2. À quelle condition, portant sur s , ce système admet-il une autre solution que l'élément nul de $\mathbb{R}^5$?

Partie II

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, et $s \in \mathbb{R}$ fixés, on se propose de résoudre le système (II) à n équations, d'inconnue $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -sx_1 + x_2 = 0, \\ x_1 - sx_2 + x_3 = 0, \\ x_2 - sx_3 + x_4 = 0, \\ \vdots \\ x_{n-2} - sx_{n-1} + x_n = 0, \\ x_{n-1} - sx_n = 0. \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'il existe des polynômes $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ tels que, pour toute solution du système et tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$, on ait $x_{n-p} = A_p(s)x_n$. Montrer que, pour tout $p \in \{1, \dots, n-3\}$,

$$A_{p+2}(s) = sA_{p+1}(s) - A_p(s).$$

2. On définit un polynôme A_n par la relation

$$A_n(s) = sA_{n-1}(s) - A_{n-2}(s).$$

Prouver que le système (II) possède des solutions autres que l'élément nul de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $A_n(s) = 0$.

3. Déterminer :

3. a. Le degré de A_n .

3. b. Le coefficient du terme de plus haut degré de A_n .

3. c. Le terme de degré zéro de A_n .

3. d. La parité de A_n .

3. e. Le coefficient de s^{n-2} dans $A_n(s)$.

PROBLÈME 2

Partie I

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on définit les fonctions P_n et Q_n de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par

$$P_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \leq n, \\ 0 & \text{si } x > n, \end{cases} \quad Q_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

1. a. Étudier les fonctions P_1 , P_2 et P_3 d'une part, Q_1 , Q_2 et Q_3 d'autre part. Tracer leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé, l'unité étant prise égale à 4 cm. Pour $i \in \{1, 2, 3\}$, on notera C_i la courbe représentative de P_i et Γ_i celle de Q_i . On tracera enfin sur le même graphique la courbe E représentative de la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

1. b. Montrer que la fonction P_n est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $P_n^{(n)}$ aux points où cette dérivée existe. La fonction P_n est-elle de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$?

2. a. Soit φ_1 la fonction définie sur $[0, 1[$ par

$$\varphi_1(t) = \ln(1-t) + \frac{t}{1-t} = \ln(1-t) - 1 + \frac{1}{1-t}.$$

Montrer que $\varphi_1 \geq 0$ (on pourra étudier les variations de φ_1), et en déduire les variations de la fonction Ψ_1 définie sur $]0, 1[$ par

$$\Psi_1(t) = \frac{1}{t} \ln(1-t).$$

2. b. Soit φ_2 la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi_2(t) = \ln(1+t) - \frac{t}{1+t} = \ln(1+t) - 1 + \frac{1}{1+t}.$$

Montrer que $\varphi_2 \geq 0$ (on pourra étudier les variations de φ_2), et en déduire les variations de la fonction Ψ_2 définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\Psi_2(t) = -\frac{1}{t} \ln(1+t).$$

Prolonger Ψ_2 par continuité en 0 et préciser les variations de ce prolongement sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on a

$$P_n(x) \leq P_{n+1}(x) \leq e^{-x} \leq Q_{n+1}(x) \leq Q_n(x).$$

4. a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. Quelle est la limite des suites de terme général $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

4. b. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, étudier l'existence des intégrales impropres

$$\int_0^{+\infty} P_n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx.$$

Lorsqu'elles existent, on note

$$I_n = \int_0^{+\infty} P_n(x) dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} Q_n(x) dx.$$

Calculer I_n et J_n . Quelle est la limite des suites de terme général I_n et J_n lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Partie II

On considère les fonctions $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, 4[\rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = e^{-x} - P_4(x), \quad g(x) = x + 3 \ln \left(1 - \frac{x}{4} \right).$$

1. Étudier les variations de la fonction g .
2. Établir qu'il existe un unique réel $\alpha \in]1, 4[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
3. En déduire les variations de la fonction f .
4. a. Montrer que l'on a l'encadrement $1,8 < \alpha < 1,9$.
4. b. Calculer une valeur décimale approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

Partie III

On considère l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$.

1. Montrer l'existence de cette intégrale. On note $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4} dx$. Montrer que

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx + \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx.$$

2. a. En utilisant la question 4. b de la partie II, montrer :

$$\forall x \in [0, \sqrt{2}], \quad 0 \leq e^{-x^4} - P_4(x^4) \leq 0,08.$$

2. b. Calculer $\int_0^{\sqrt{2}} P_4(x^4) dx$ (on pourra utiliser le changement de variable $u = x/\sqrt{2}$), et en donner une valeur décimale approchée à 10^{-2} près.

2. c. En déduire l'encadrement

$$0,87 \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-x^4} dx \leq 1.$$

3. a. Montrer :

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx \leq \frac{1}{4^{7/4}} \int_4^{+\infty} e^{-y} dy.$$

On pourra effectuer le changement de variable $y = x^4$.

3. b. En déduire une valeur décimale approchée de $\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-x^4} dx$ à 10^{-2} près.

4. Conclure.