



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1985

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Problème 1

Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré inférieur ou égal à p . On convient que le polynôme nul est de degré $-\infty$. On note Δ l'application de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même qui, à tout polynôme P de $\mathbb{R}_p[X]$, associe le polynôme ΔP défini par :

$$\Delta P(X) = P(X + 1) - P(X).$$

Partie I

1.a. Vérifier que Δ est une application linéaire.

1.b. Quel est le noyau de Δ ?

1.c. Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P , pour tout $P \in \mathbb{R}_p[X]$.

2. On définit les polynômes P_n , pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq p$, par :

$$P_0 = 1, \text{ et } \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \Delta P_n = P_{n-1} \text{ et } P_n(0) = 0.$$

2.a. Calculer le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n .

2.b. Montrer que la famille $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, et que tout polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ se décompose sous la forme :

$$P = \sum_{n=0}^p \alpha_n P_n,$$

avec $\alpha_n = (\Delta^n P)(0)$,

où $\Delta^0 = \text{Id}_{\mathbb{R}_p[X]}$ et $\forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}.$

Partie II

1. Soit $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

1.a. Montrer que $P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \cdots (X-n+1)$.

1.b. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P_n(k) \in \mathbb{Z}$.

1.c. Prouver, pour tout $P \in \mathbb{R}_p[X]$:

$$\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k).$$

2. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_p[X]$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(I) Les composantes de P dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$ sont dans $\mathbb{Z}$.

(II) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$.

Partie III

1.a. Écrire la matrice M de Δ dans la base $(P_n)_{0 \leq n \leq p}$.

1.b. Calculer M^k pour tout entier naturel k non nul.

2.a. Quelles sont les valeurs propres de M ?

2.b. Montrer que M n'est pas diagonalisable.

Problème 2

Dans tout ce problème, on désigne par C_f le graphe de la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Partie 1

1.a. Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1.b. Montrer que f est continue et dérivable en 0. Que vaut $f'(0)$?

1.c. Préciser la position de C_f par rapport à sa tangente à l'origine.

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$h(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1}.$$

2.a. Étudier les variations de h sur $\mathbb{R}_+$.

2.b. Montrer qu'il existe un unique réel α strictement positif tel que $h(\alpha) = 0$. Écrire un programme Python donnant, par dichotomie, une valeur approchée de α à 10^{-6} près.

3.a. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$, pour $x \in \mathbb{R}_+$.

3.b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$.

3.c. Tracer la représentation graphique C_f de f dans un repère orthonormé.

On donne $\alpha \simeq 1,9$ et $f(\alpha) \simeq 1,1$.

Partie 2

1. Pour $a > 0$, montrer que l'intégrale impropre $K(a) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax} dx$ converge et la calculer.

2.a. Montrer que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente. On notera I cette intégrale.

2.b. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = f(x)e^{-2nx}$. Montrer que l'intégrale impropre $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.a. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 0$, montrer qu'on peut écrire $\frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}}$ sous forme d'une somme de n termes. Pour $n = 0$, la somme est vide et vaut 0.

3.b. Calculer $f(x) - f_n(x)$, et en déduire que :

$$I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i+1) + I_n.$$

4. Le but de cette question est de montrer que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

On remarque que :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx + \int_1^{+\infty} f_n(x) dx.$$

4.a. On considère la fonction φ définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = \frac{1 - e^{-2x}}{2x}$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = 1$.

Montrer que $0,4 \leq \varphi(x) \leq 1$ pour tout $x \in [0; 1]$, puis montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_0^1 f_n(x) dx \leq 2,5 \int_0^1 x e^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2,5}{2n+1}.$$

4.b. Montrer que, si $x \in [1; +\infty[$, on a $0,8 \leq 1 - e^{-2x} \leq 1$.

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\int_0^{+\infty} x^2 x e^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2}{2n+1},$$

et en déduire une majoration de $\int_1^{+\infty} f_n(x) dx$.

4.c. Conclure.