



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1985

Corrigé de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Corrigé

Problème 1

Partie I

1.a. On vérifie la stabilité de l'espace et la linéarité.

Pour $P \in \mathbb{R}_p[X]$, le polynôme $P(X+1)$ a degré au plus p , donc $\Delta P = P(X+1) - P(X)$ appartient à $\mathbb{R}_p[X]$.

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_p[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\Delta(aP + bQ)(X) = aP(X+1) + bQ(X+1) - aP(X) - bQ(X) = a\Delta P(X) + b\Delta Q(X).$$

Ainsi Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}_p[X]$ dans lui-même.

1.b. On interprète l'égalité $\Delta P = 0$ comme une invariance par translation.

Si P est constant, $P(X+1) - P(X) = 0$, donc $P \in \text{Ker } \Delta$. Réciproquement, supposons $\Delta P = 0$. Alors $P(X+1) = P(X)$ pour tout réel X .

En évaluant successivement aux entiers naturels, on obtient par récurrence $P(m) = P(0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Le polynôme $P - P(0)$ possède ainsi une infinité de racines distinctes. Comme un polynôme non nul a au plus autant de racines que son degré, ce polynôme est nul.

Ainsi P est constant, et $\text{Ker } \Delta = \text{Vect}(1)$.

1.c. On développe les termes de plus haut degré et on traite séparément les constantes.

Si P est constant, y compris si $P = 0$, alors $\Delta P = 0$ et $\deg(\Delta P) = -\infty$ selon la convention du sujet.

Si P est non constant, notons $d \geq 1$ son degré et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant. Par le binôme :

$$(X+1)^d - X^d = dX^{d-1} + \text{un polynôme de degré au plus } d-2,$$

avec un reste nul pour $d = 1$. La différence $(X + 1)^j - X^j$ a degré au plus $j - 1$ pour chaque $1 \leq j < d$, et est nulle pour $j = 0$. Ces termes ne contribuent donc pas au coefficient de X^{d-1} dans ΔP .

Ce coefficient vaut $da_d \neq 0$. Ainsi $\deg(\Delta P) = d - 1$, et son coefficient dominant vaut da_d .

2. La définition récursive détermine bien une unique famille de polynômes.

Pour le justifier, fixons $m \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et considérons $V_m = \{Q \in \mathbb{R}_m[X] : Q(0) = 0\}$. Cet espace a pour base $(X, \dots, X^m)$, donc dimension m . La question 1.c montre que $\Delta(V_m) \subset \mathbb{R}_{m-1}[X]$.

La restriction de Δ à V_m a un noyau nul : un élément de ce noyau est constant par 1.b et s'annule en 0, donc est nul. Les espaces V_m et $\mathbb{R}_{m-1}[X]$ ont la même dimension m . Par le théorème du rang, cette restriction est donc bijective.

À partir de $P_0 = 1$, on peut ainsi construire successivement, pour chaque $m \leq p$, l'unique $P_m \in V_m$ tel que $\Delta P_m = P_{m-1}$. Cette construction justifie les polynômes utilisés ensuite.

2.a. On combine la diminution du degré par Δ et la relation des coefficients dominants.

Le polynôme $P_0 = 1$ a degré 0 et coefficient dominant $a_0 = 1$. Supposons P_{n-1} de degré $n - 1$ pour un entier $1 \leq n \leq p$. Comme $\Delta P_n = P_{n-1} \neq 0$, P_n n'est pas constant. La question 1.c donne :

$$\deg(P_n) - 1 = \deg(\Delta P_n) = \deg(P_{n-1}) = n - 1.$$

Donc $\deg(P_n) = n$. Si a_n est son coefficient dominant, la même question donne $na_n = a_{n-1}$. Par récurrence :

$$\deg(P_n) = n \text{ et } a_n = \frac{1}{n!} \text{ pour } 0 \leq n \leq p,$$

avec la convention $0! = 1$.

2.b. On établit d'abord la propriété de base, puis on extrait chaque coordonnée par une différence finie évaluée en 0.

Les polynômes $P_0, \dots, P_p$ ont des degrés distincts $0, \dots, p$. Pour montrer leur liberté,

supposons

$$\sum_{j=0}^p c_j P_j = 0$$

avec au moins un coefficient non nul et prenons le plus grand indice m tel que $c_m \neq 0$. Le coefficient de X^m de la somme vaut $\frac{c_m}{m!} \neq 0$, ce qui contredit la nullité du polynôme.

La famille est donc libre de cardinal $p + 1$ dans $\mathbb{R}_p[X]$, de dimension $p + 1$: elle est une base. Tout polynôme P possède une décomposition unique

$$P = \sum_{j=0}^p \alpha_j P_j.$$

La relation récursive donne, pour $r, j \in \llbracket 0, p \rrbracket$:

$$\Delta^r P_j = \begin{cases} P_{j-r} & \text{si } r \leq j, \\ 0 & \text{si } r > j. \end{cases}$$

En effet, chaque application de Δ diminue l'indice de 1 jusqu'à P_0 , puis $\Delta P_0 = 0$. En évaluant en 0, on obtient $(\Delta^r P_j)(0) = 1$ si $r = j$, et 0 sinon : pour $j > r$, $P_{j-r}(0) = 0$ par la définition.

Par linéarité de Δ^r ,

$$(\Delta^r P)(0) = \sum_{j=0}^p \alpha_j (\Delta^r P_j)(0) = \alpha_r.$$

Ainsi :

$$P = \sum_{n=0}^p (\Delta^n P)(0) P_n.$$

Partie II

1. On fixe $n \in \llbracket 1, p \rrbracket$ dans les trois sous-questions.

1.a. On vérifie que la famille des produits annoncés satisfait la même définition récurrente.

Posons $Q_0 = 1$ et, pour $n \geq 1$,

$$Q_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X - j).$$

On a $Q_n(0) = 0$. En prenant le produit vide égal à 1, la factorisation suivante est valable aussi pour $n = 1$:

$$Q_n(X+1) - Q_n(X) = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+2)}{n!} ((X+1) - (X-n+1)).$$

Le dernier facteur vaut n , donc $\Delta Q_n = Q_{n-1}$. Ainsi $Q_0 = P_0$, et si $Q_{n-1} = P_{n-1}$, alors $\Delta(Q_n - P_n) = 0$ et $(Q_n - P_n)(0) = 0$. Par I.1.b, la différence est constante ; sa valeur en 0 impose qu'elle soit nulle.

Par récurrence, $Q_n = P_n$ pour tous les indices considérés. Donc :

$$P_n(X) = \frac{1}{n!} X(X-1) \cdots (X-n+1).$$

1.b. On distingue les entiers positifs ou nuls et les entiers négatifs.

Si $k \geq n$, alors $P_n(k) = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n} \in \mathbb{Z}$. Si $0 \leq k < n$, l'un des facteurs $k - j$, avec $j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, est nul, donc $P_n(k) = 0 \in \mathbb{Z}$.

Enfin, si $k < 0$, écrivons $k = -m$ avec $m \geq 1$. Le produit donne :

$$P_n(-m) = \frac{(-1)^n}{n!} m(m+1) \cdots (m+n-1) = (-1)^n \binom{m+n-1}{n} \in \mathbb{Z}.$$

Ces trois cas couvrent tous les entiers. Ainsi $P_n(k)$ est entier pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On aura également $P_0(k) = 1 \in \mathbb{Z}$ dans la question suivante.

1.c. Rectification locale : la borne supérieure de la somme est n , au lieu de p dans le PDF. La formule ainsi écrite utilise uniquement les coefficients binomiaux définis pour les indices $0 \leq k \leq n$.

Méthode 1 — Binôme d'endomorphismes

Notons T l'endomorphisme de $\mathbb{R}_p[X]$ défini par $T(P)(X) = P(X + 1)$. Alors $\Delta = T - \text{Id}$. Les endomorphismes T et $-\text{Id}$ commutent, donc le binôme s'applique :

$$\Delta^n = (T - \text{Id})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k.$$

Une récurrence sur k donne $T^k(P)(X) = P(X + k)$. En appliquant l'identité à P :

$$\Delta^n P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X + k).$$

Méthode 2 — Récurrence et formule de Pascal

La formule est vraie pour $n = 0$ avec une somme réduite à $P(X)$. Supposons-la vraie à un rang $n \geq 0$. Alors :

$$\Delta^{n+1} P(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (P(X + k + 1) - P(X + k)).$$

Le coefficient de $P(X)$ est $(-1)^{n+1}$ et celui de $P(X + n + 1)$ est 1. Pour $1 \leq j \leq n$, le

coefficient de $P(X + j)$ est la somme des contributions des indices $j - 1$ et j :

$$\binom{n}{j-1}(-1)^{n-j+1} - \binom{n}{j}(-1)^{n-j} = (-1)^{n+1-j} \left(\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right).$$

La formule de Pascal transforme la parenthèse en $\binom{n+1}{j}$. Les deux coefficients aux extrémités ont aussi la forme voulue. On obtient donc la formule au rang $n + 1$, puis à tous les rangs par récurrence.

La première méthode exploite la structure d'endomorphisme ; la seconde explique directement l'apparition des coefficients binomiaux dans les différences successives.

2. On démontre séparément les deux implications.

Supposons (I). Écrivons

$$P = \sum_{n=0}^p \alpha_n P_n$$

avec tous les $\alpha_n \in \mathbb{Z}$. Par II.1.b et $P_0 = 1$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les valeurs $P_n(k)$ sont entières. La somme finie

$$P(k) = \sum_{n=0}^p \alpha_n P_n(k)$$

est donc entière. Ainsi (II) est vérifiée.

Réciproquement, supposons (II). La question I.2.b donne $\alpha_n = (\Delta^n P)(0)$. Pour $n \geq 1$, II.1.c donne :

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(k).$$

Tous les termes sont entiers, donc $\alpha_n \in \mathbb{Z}$. Pour $n = 0$, $\alpha_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$ directement.

Toutes les coordonnées sont donc entières : (I) est vérifiée.

Les propriétés (I) et (II) sont équivalentes.

Partie III

1.a. On place dans chaque colonne les coordonnées de l'image du vecteur de base correspondant.

Comme $\Delta P_0 = 0$ et $\Delta P_j = P_{j-1}$ pour $1 \leq j \leq p$, la matrice M est d'ordre $p + 1$, avec des 1 sur la première diagonale au-dessus de la diagonale principale, et des 0 partout ailleurs.

Plus précisément, en numérotant les lignes et colonnes de 1 à $p + 1$:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La première colonne est nulle, et la colonne numéro $j + 1$ est la colonne canonique numéro j , pour $1 \leq j \leq p$.

1.b. On utilise l'action des itérés de Δ sur les polynômes de base.

Pour $k \geq 1$ et $0 \leq j \leq p$, 1.2.b donne $\Delta^k P_j = P_{j-k}$ si $j \geq k$, et 0 sinon. La matrice de Δ^k dans la même base est M^k . Ainsi :

$$(M^k)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i + k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad 1 \leq i, j \leq p + 1.$$

Pour $1 \leq k \leq p$, les 1 sont sur la diagonale située k positions au-dessus de la diagonale principale. Pour $k \geq p + 1$, aucun couple d'indices ne satisfait $j = i + k$, donc $M^k = 0$.

En particulier, $M^{p+1} = 0$, tandis que $M^p \neq 0$ puisque son coefficient de ligne 1 et de colonne $p + 1$ vaut 1.

2.a. On peut lire les valeurs propres sur la diagonale, ou les contraindre par la puissance nulle.

Méthode 1 — Matrice triangulaire

La matrice M est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont nuls. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire étant ses coefficients diagonaux, son spectre est $\{0\}$.

Méthode 2 — Action sur un vecteur propre

Si $MZ = \lambda Z$ pour une colonne $Z \neq 0$, alors $M^{p+1}Z = \lambda^{p+1}Z$. Comme $M^{p+1} = 0$, $\lambda^{p+1}Z = 0$, donc $\lambda = 0$.

Réciproquement, la première colonne canonique est non nulle et appartient au noyau de M , puisque la première colonne de M est nulle. Ainsi 0 est bien valeur propre et c'est la seule.

La première méthode utilise la forme triangulaire ; la seconde s'applique à toute matrice dont une puissance est nulle.

2.b. On compare la dimension de l'unique espace propre à celle de l'espace total.

Pour une colonne $Z = {}^t(z_1, \dots, z_{p+1})$, la multiplication donne $MZ = {}^t(z_2, \dots, z_{p+1}, 0)$. Ainsi $MZ = 0$ si et seulement si $z_2 = \dots = z_{p+1} = 0$.

L'espace propre de 0 est donc de dimension 1. Puisque 0 est la seule valeur propre, tous les vecteurs propres sont dans cet espace. Ils ne peuvent former une base de l'espace de dimension $p + 1 \geq 3$.

Par définition de la diagonalisabilité, M n'est pas diagonalisable.

Problème 2

Partie 1

1.a. On utilise les développements des exponentielles puis une identité algébrique pour le quotient, sans composition de développements limités.

La formule de Taylor-Young appliquée séparément aux fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ en 0 donne :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

En soustrayant : $e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Pour $x \neq 0$ voisin de 0, on peut donc écrire :

$$f(x) = \frac{x}{1 + u(x)}, \text{ où } u(x) = \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

La quantité $u(x)$ tend vers 0, donc $1 + u(x)$ est non nul au voisinage de 0. L'identité exacte :

$$\frac{1}{1 + u} = 1 - u + \frac{u^2}{1 + u}$$

donne ici $\frac{u(x)^2}{1 + u(x)} = o(x^2)$, puisque $u(x)$ est de l'ordre de x^2 . Ainsi :

$$f(x) = x \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

C'est le développement limité demandé à l'ordre 3.

1.b. On lit la continuité et la dérivée dans le développement précédent.

La question 1.a donne $f(x) \rightarrow 0 = f(0)$ lorsque $x \rightarrow 0$. Ainsi f est continue en 0.

Pour $x \neq 0$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \rightarrow 1.$$

Le taux d'accroissement admet donc une limite finie : f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

1.c. La tangente à l'origine a pour équation $y = f(0) + f'(0)x = x$.

Méthode 1 — Signe du premier terme de l'écart

La question 1.a donne $f(x) - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc $\frac{f(x) - x}{x^3} \rightarrow -\frac{1}{6}$. Ce quotient est négatif pour x non nul assez proche de 0.

Si $x > 0$, $x^3 > 0$, donc $f(x) - x < 0$: la courbe est au-dessous de la tangente à droite de l'origine. Si $x < 0$, $x^3 < 0$, donc $f(x) - x > 0$: elle est au-dessus à gauche. La courbe traverse sa tangente en l'origine.

Méthode 2 — Une comparaison valable sur toute la droite

Pour $x > 0$, posons $D(x) = e^x - e^{-x} - 2x$. On a $D(0) = 0$ et :

$$D'(x) = e^x + e^{-x} - 2 = (e^{x/2} - e^{-x/2})^2 > 0.$$

Ainsi $e^x - e^{-x} > 2x$ pour $x > 0$, et les dénominateurs sont positifs. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{2x^2}{e^x - e^{-x}} < \frac{2x^2}{2x} = x.$$

De plus, f est impaire : pour $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$, et cela reste vrai en 0. Pour $x < 0$, l'inégalité appliquée à $-x > 0$ donne $f(x) > x$.

La seconde méthode confirme les positions locales et montre qu'elles valent respectivement sur toutes les demi-droites positive et négative.

2. La fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, puisque $e^{2x} + 1 > 0$.

2.a. On détermine le signe de la dérivée en utilisant une variable exponentielle positive.

La dérivation du quotient donne :

$$h'(x) = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{1}{2}.$$

Posons $z = e^{2x} \geq 1$. Alors :

$$h'(x) = \frac{-z^2 + 6z - 1}{2(z + 1)^2} = -\frac{(z - (3 + 2\sqrt{2}))(z - (3 - 2\sqrt{2}))}{2(z + 1)^2}.$$

Comme $3 - 2\sqrt{2} < 1 \leq z$, le second facteur du numérateur est strictement positif. Le signe de h' est donc positif pour $z < 3 + 2\sqrt{2}$, nul pour l'égalité, et négatif ensuite.

Notons $\eta = \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}) = \ln(1 + \sqrt{2})$. L'exponentielle étant strictement croissante, h est strictement croissante sur $[0; \eta]$ et strictement décroissante sur $[\eta; +\infty[$.

On a $h(0) = 0$, donc $h(\eta) > 0$. Enfin, la seconde expression de h donne

$$h(x) = 1 - \frac{x}{2} - \frac{2}{e^{2x} + 1} \rightarrow -\infty \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

2.b. Code adapté en Python. On utilise les variations pour l'unicité, puis une dichotomie sur un intervalle contenant la racine positive.

Sur $]0; \eta]$, h est strictement positive. Sur $[\eta; +\infty[$, elle est continue, strictement décroissante, part d'une valeur strictement positive et tend vers $-\infty$. Le théorème de la bijection donne donc un unique $\alpha > \eta$ tel que $h(\alpha) = 0$. La racine 0 est exclue par la condition de stricte positivité sur α .

Pour choisir un intervalle de dichotomie, on calcule :

$$h(1) = \frac{e^2 - 3}{2(e^2 + 1)} > 0, \text{ et } h(2) = -\frac{2}{e^4 + 1} < 0.$$

La première inégalité est justifiée, par exemple, par la série exponentielle :

$$e^2 > 1 + 2 + \frac{2^2}{2} = 5 > 3. \text{ Ainsi } \alpha \in]1; 2[. \text{ Les variations montrent que } h \text{ est positive sur }]0; \alpha[\text{ et négative sur }]\alpha; +\infty[.$$

Le programme complet est :

Python

```
import numpy as np

def h(x):
    return (np.exp(2 * x) - 1) / (np.exp(2 * x) + 1) - x / 2

a = 1.0
b = 2.0

while b - a > 1e-6:
    m = (a + b) / 2
    if h(m) > 0:
        a = m
    else:
        b = m

alpha_approx = (a + b) / 2
print(alpha_approx)
```

Les variables a et b sont les bornes de l'intervalle contenant α , et m son milieu. Si $h(m) > 0$, alors $m < \alpha$ et on remplace la borne inférieure par m . Sinon, $m \geq \alpha$ et on remplace la borne supérieure. L'intervalle conserve donc toujours la racine.

Sa longueur est divisée par 2 à chaque itération. La boucle s'arrête lorsque $b - a \leq 10^{-6}$, donc le milieu renvoyé vérifie $|\alpha_{\text{approx}} - \alpha| \leq \frac{b-a}{2} \leq 5 \times 10^{-7}$.

Ce code a été exécuté. Après 20 itérations, il donne $\alpha_{\text{approx}} = 1,9150080680847168$, avec un intervalle final $[1,9150075912475586; 1,915008544921875]$. La valeur approchée respecte donc la précision demandée. Le contrôle de précision provient de la longueur de l'intervalle, et non du seul affichage décimal.

3.a. On dérive le quotient pour $x > 0$ et on traite $x = 0$ séparément.

Pour $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{4x(e^x - e^{-x}) - 2x^2(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}.$$

Or $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$, donc :

$$f'(x) = \frac{4x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} - \frac{x}{2} \right) = \frac{4x(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} h(x).$$

Le facteur devant $h(x)$ est strictement positif pour $x > 0$. En $x = 0$, cette expression comporte un dénominateur nul et ne doit pas être utilisée ; la question 1.b donne directement $f'(0) = 1$. Cela couvre tout $\mathbb{R}_+$.

3.b. On utilise le signe de h puis l'imparité de f .

Par 2.b, $h(x) > 0$ pour $0 < x < \alpha$, $h(\alpha) = 0$ et $h(x) < 0$ pour $x > \alpha$. La question 3.a donne donc $f'(x) > 0$ sur $]0; \alpha[$, $f'(\alpha) = 0$ et $f'(x) < 0$ sur $]\alpha; +\infty[$.

Ainsi f est strictement croissante sur $[0; \alpha]$ puis strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$. Sa valeur en 0 est 0, et :

$$f(x) = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow +\infty,$$

car $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ par croissances comparées et $1 - e^{-2x} \rightarrow 1$. Elle atteint son maximum positif en α .

L'imparité établie en 1.c donne $f(-\alpha) = -f(\alpha)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. En dérivant $f(-x) = -f(x)$ pour $x \neq 0$, on obtient $f'(-x) = f'(x)$. Les variations sur toute la droite sont donc :

- f décroît strictement sur $] -\infty; -\alpha]$, de la limite 0 jusqu'à $-f(\alpha)$.
- f croît strictement sur $[-\alpha; \alpha]$, de $-f(\alpha)$ à $f(\alpha)$, en passant par $f(0) = 0$.
- f décroît strictement sur $[\alpha; +\infty[$, de $f(\alpha)$ jusqu'à la limite 0.

Ainsi $-\alpha$ est le point de minimum global et α le point de maximum global.

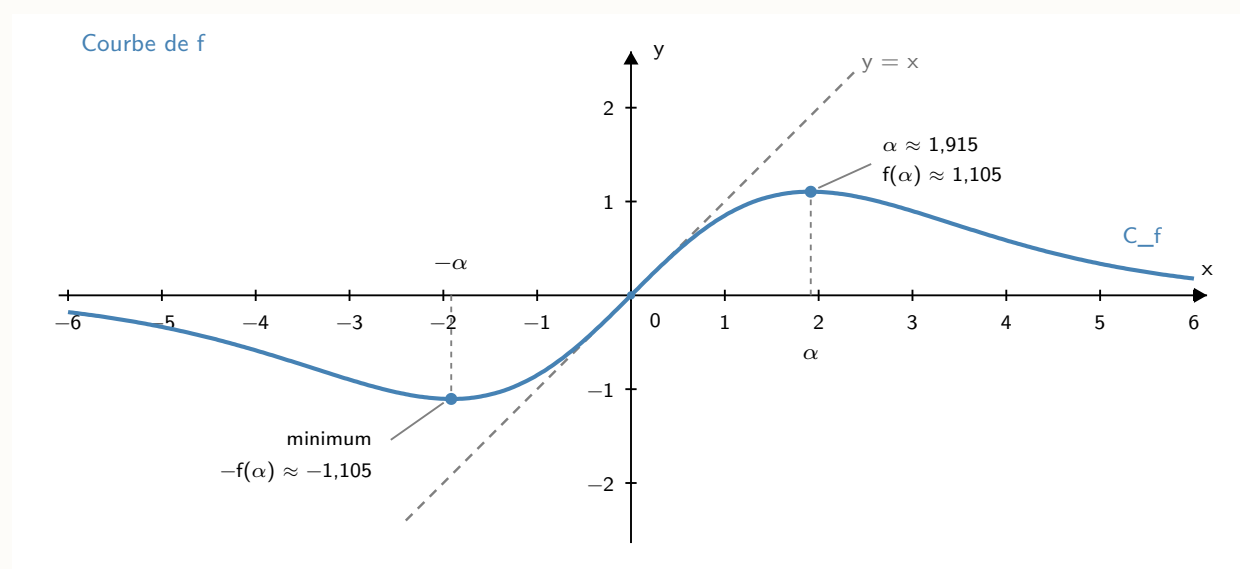
3.c. On rassemble les éléments nécessaires au tracé dans un repère orthonormé.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine, puisque f est impaire. Elle passe par

l'origine avec la tangente $y = x$. Elle est au-dessous de cette tangente pour $x > 0$ et au-dessus pour $x < 0$. L'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est une asymptote horizontale aux deux infinis.

Le maximum est atteint en $\alpha \simeq 1,915008$, avec $f(\alpha) \simeq 1,104653$, et le minimum est son symétrique. Ces valeurs sont cohérentes avec les approximations fournies dans le sujet.

Le tracé ci-dessous utilise la même échelle sur les deux axes. La courbe est calculée avec la formule exacte de f ; les coordonnées des extrema sont approchées.



Partie 2

1. On effectue deux intégrations par parties sur un segment, puis on passe à la limite.

Fixons $a > 0$ et $R > 0$. La première intégration par parties donne :

$$\int_0^R x^2 e^{-ax} dx = -\frac{R^2 e^{-aR}}{a} + \frac{2}{a} \int_0^R x e^{-ax} dx.$$

Pour le dernier terme, une seconde intégration par parties donne :

$$\int_0^R x e^{-ax} dx = -\frac{R e^{-aR}}{a} + \frac{1}{a} \int_0^R e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2} - e^{-aR} \left(\frac{R}{a} + \frac{1}{a^2} \right).$$

En reportant :

$$\int_0^R x^2 e^{-ax} dx = \frac{2}{a^3} - e^{-aR} \left(\frac{R^2}{a} + \frac{2R}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right).$$

L'intégrande est continu sur $[0; +\infty[$. Lorsque $R \rightarrow +\infty$, les trois produits d'un polynôme par e^{-aR} tendent vers 0, par croissances comparées et $a > 0$.

La limite finie de l'intégrale sur $[0; R]$ établit donc sa convergence et sa valeur :

$$K(a) = \frac{2}{a^3}.$$

2.a. On traite la borne 0 par continuité et l'infini par comparaison à l'intégrale $K(1)$.

La partie 1 a montré que f est continue en 0. Elle est continue en tout point non nul, car $e^x - e^{-x} \neq 0$ pour $x \neq 0$. L'intégrale sur $[0; 1]$ est donc finie.

Pour $x \geq 1$, $1 - e^{-2x} \geq 1 - e^{-2} > 0$. Ainsi :

$$0 \leq f(x) = \frac{2x^2 e^{-x}}{1 - e^{-2x}} \leq \frac{2}{1 - e^{-2}} x^2 e^{-x}.$$

L'intégrale du majorant converge par la question 1 avec $a = 1$. Le critère de comparaison des intégrales positives assure la convergence sur $[1; +\infty[$, donc celle de

$$I = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

2.b. On utilise une domination par f sur le domaine d'intégration.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $0 < e^{-2nx} \leq 1$, donc $0 \leq f_n(x) = f(x)e^{-2nx} \leq f(x)$. La fonction f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et l'intégrale du majorant f converge par 2.a.

Par comparaison, $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq I_n \leq I$, et $I_0 = I$.

3.a. On applique la formule de la somme géométrique finie, en précisant le domaine du quotient.

Pour $x \neq 0$, $q = e^{-2x} \neq 1$. Pour $n \geq 1$:

$$\frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-2ix}.$$

Cette somme possède n termes. Pour $n = 0$, le quotient est nul et la somme vide vaut également 0.

Le quotient initial n'est pas défini en $x = 0$; son prolongement continu y vaut n , puisque chaque terme de la somme tend vers 1. Cette précision de domaine évite une division par zéro et permettra de traiter l'identité de la question suivante en 0.

3.b. On utilise la somme finie de 3.a, puis on intègre une identité entre fonctions intégrables.

Pour $x \neq 0$ et $n \geq 0$:

$$f(x) - f_n(x) = f(x)(1 - e^{-2nx}) = 2x^2 e^{-x} \frac{1 - e^{-2nx}}{1 - e^{-2x}} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} x^2 e^{-(2i+1)x}.$$

En $x = 0$, le membre de gauche vaut 0 et chaque terme du membre de droite vaut 0. L'identité est donc valable pour tout réel x , avec la convention de somme vide pour $n = 0$.

Les intégrales de f et f_n convergent par 2.a–2.b, et celles des termes du membre de droite convergent par la question 1, puisque $2i + 1 > 0$. Par linéarité pour cette somme finie :

$$I - I_n = 2 \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(2i+1)x} dx = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i + 1).$$

Ainsi

$$I = 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i + 1) + I_n,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On majore séparément les intégrales sur $[0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, selon la décomposition du sujet.

4.a. On établit d'abord les bornes de φ , puis on les applique à f_n .

Méthode 1 — Représentation par une intégrale sur un segment

Pour $x > 0$, une primitive en la variable t donne :

$$\int_0^1 e^{-2xt} dt = \left[-\frac{e^{-2xt}}{2x} \right]_0^1 = \frac{1 - e^{-2x}}{2x} = \varphi(x).$$

Pour $x = 0$, la même représentation vaut $\int_0^1 1 dt = 1 = \varphi(0)$. Si $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq t \leq 1$, alors $e^{-2t} \leq e^{-2xt} \leq 1$. En intégrant :

$$\frac{1 - e^{-2}}{2} \leq \varphi(x) \leq 1.$$

La série exponentielle donne $e^2 > 1 + 2 + \frac{2^2}{2} = 5$, donc $e^{-2} < \frac{1}{5}$. Par conséquent, $\frac{1 - e^{-2}}{2} > \frac{2}{5} = 0,4$. Ainsi $0,4 \leq \varphi(x) \leq 1$ sur $[0; 1]$.

Méthode 2 — Concavité et tangente

Posons $\psi(x) = 1 - e^{-2x}$ sur $[0; 1]$. Comme $\psi''(x) = -4e^{-2x} < 0$, cette fonction est concave. Elle est donc au-dessus de la corde joignant ses valeurs en 0 et en 1 :

$$\psi(x) \geq (1-x)\psi(0) + x\psi(1) = x(1 - e^{-2}).$$

Par ailleurs, la convexité de l'exponentielle donne $e^{-2x} \geq 1 - 2x$, donc $\psi(x) \leq 2x$. Pour $x > 0$, on divise ces deux bornes par $2x > 0$:

$$\frac{1 - e^{-2}}{2} \leq \varphi(x) \leq 1.$$

Avec $e^{-2} < \frac{1}{5}$ et $\varphi(0) = 1$, on retrouve les mêmes bornes sur tout le segment. La première méthode interprète φ comme une moyenne de valeurs exponentielles ; la seconde utilise deux comparaisons géométriques, une corde et une tangente.

Application aux intégrales de f_n

Pour $0 < x \leq 1$, $1 - e^{-2x} = 2x\varphi(x)$, donc :

$$f_n(x) = \frac{2x^2 e^{-(2n+1)x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{xe^{-(2n+1)x}}{\varphi(x)} \leq 2,5xe^{-(2n+1)x}.$$

En $x = 0$, les deux membres valent 0. La croissance de l'intégrale donne la première majoration demandée. Pour la seconde, on utilise $x \leq 1$ et l'intégrale exponentielle de référence :

$$\int_0^1 xe^{-(2n+1)x} dx \leq \int_0^1 e^{-(2n+1)x} dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x} dx = \frac{1}{2n+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq 2,5 \int_0^1 xe^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2,5}{2n+1}.$$

4.b. On minore le dénominateur, puis on calcule l'intégrale auxiliaire portant sur x^3 .

Pour $x \geq 1$, $0 < e^{-2x} \leq e^{-2} < \frac{1}{5}$, donc $0,8 \leq 1 - e^{-2x} \leq 1$.

Fixons $n \geq 1$ et posons $a = 2n + 1 \geq 3$. Le produit $x^2 x$ de l'intégrande demandé est x^3 .

Sur $[0; R]$, une intégration par parties donne :

$$\int_0^R x^3 e^{-ax} dx = -\frac{R^3 e^{-aR}}{a} + \frac{3}{a} \int_0^R x^2 e^{-ax} dx.$$

Lorsque $R \rightarrow +\infty$, le terme de bord tend vers 0, et la dernière intégrale tend vers $K(a) = \frac{2}{a^3}$. L'intégrale du membre de gauche converge donc et vaut $\frac{6}{a^4}$.

Puisque $a \geq 3$, on a $a^3 \geq 27 \geq 3$, donc $\frac{6}{a^4} \leq \frac{2}{a}$. Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} x^2 xe^{-(2n+1)x} dx \leq \frac{2}{2n+1}.$$

Pour la queue de I_n , la borne du dénominateur donne, sur $[1; +\infty[$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{2}{0,8} x^2 e^{-ax} = 2,5x^2 e^{-ax} \leq 2,5x^3 e^{-ax},$$

la dernière inégalité utilisant $x \geq 1$. On en déduit :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} f_n(x) dx \leq 2,5 \int_1^{+\infty} x^3 e^{-ax} dx \leq 2,5 \int_0^{+\infty} x^3 e^{-ax} dx \leq \frac{5}{2n+1}.$$

C'est une majoration suffisante pour conclure. Le calcul exact de l'intégrale auxiliaire donne aussi la borne plus précise $\frac{15}{(2n+1)^4}$.

4.c. On regroupe les deux majorations et on passe à la limite dans l'identité de 3.b.

Pour $n \geq 1$, les questions 4.a–4.b donnent :

$$0 \leq I_n \leq \frac{2,5}{2n+1} + \frac{5}{2n+1} = \frac{7,5}{2n+1}.$$

Le majorant tend vers 0, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.

La question 3.b et la valeur de K donnent alors :

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \sum_{i=0}^{n-1} K(2i+1) = 4 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{(2i+1)^3}.$$

Cette série converge également par comparaison avec une série de Riemann d'exposant 3. L'expression de I est obtenue par une identité de sommes finies suivie d'un contrôle du reste I_n , sans échange entre une série infinie et une intégrale.

Relevé des adaptations

Problème 1, II.1.c : la borne supérieure de la somme des différences finies est rectifiée de p en n , ce qui évite des coefficients binomiaux d'indice supérieur à n non définis dans le sujet.

Problème 2, partie 1, 2.b : code adapté en Python ; la dichotomie et la précision demandée sont conservées. Le code fourni dans le corrigé a été exécuté.

Problème 2, partie 1, 3.c : le tracé demandé est intégré en SVG dans le corrigé à partir de la formule de f , avec une échelle identique sur les deux axes ; les extrema portent des valeurs numériques approchées.

Problème 2, partie 2, 3.a : le domaine $x \neq 0$ et la convention de somme vide pour $n = 0$ sont explicités. Le prolongement du quotient en 0 est expliqué dans le corrigé.