



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques

1984

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Les parties I, II et III peuvent être traitées de manière indépendante. Dans III, on signale les résultats de II à utiliser.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ celui des nombres réels.

PARTIE I

On note $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ l'application réciproque de la restriction du cosinus à $[0, \pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions P_n et Q_n définies par :

$$Q_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q_n(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} & \text{si } \theta \in]0, \pi[, \\ n+1 & \text{si } \theta = 0, \\ (-1)^n(n+1) & \text{si } \theta = \pi. \end{cases}$$

$$P_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad P_n(x) = Q_n(\arccos x).$$

1. a. Montrer que Q_n est continue sur $[0, \pi]$ et dérivable sur $]0, \pi[$.

1. b. Montrer que P_n est continue sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$.

2. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P_n(-1)$, $P_n(0)$, $P_n(1)$.

2. b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $P'_n(0)$.

3. a. Pour tout $x \in [-1, 1]$, déterminer $P_0(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

3. b. Montrer que P_n vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], P_{n+2}(x) + P_n(x) = 2xP_{n+1}(x).$$

3. c. En déduire que P_n est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et la parité.

4. a. Montrer, pour tout $a \in]0, \pi]$, l'existence de l'intégrale :

$$\int_0^a \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} d\theta.$$

4. b. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ existe et qu'elle est égale à l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} d\theta.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \cos \theta$.

PARTIE II

1. Si a et b sont deux réels vérifiant $a < b$, et f une fonction continue sur $[a, b]$ et à dérivée continue sur $[a, b]$, montrer que la suite numérique

$$\left(\int_a^b f(x) \sin(nx) dx \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.$$

On pourra utiliser une intégration par parties.

2. On considère la fonction g définie par :

$$g : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. a. Montrer que g est continue.

2. b. Montrer que g est dérivable et que sa dérivée est continue.

PARTIE III

Dans cette partie, on admet l'existence des intégrales $\int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$ pour $a \in]0, \pi/2]$ et $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction φ_n définie par :

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(nx)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ n & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue.

1. b. Montrer que $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ converge.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x) dx$ converge ; on pourra utiliser une intégration par parties.

Dans la suite, on pose $L = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Montrer que $\int_1^{+\infty} \varphi_1(x) dx$ n'est pas absolument convergente. On pourra utiliser $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin x| \geq \sin^2 x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$, et on pose $J_n = I_{2n}$, $K_n = I_{2n+1}$.

2. a. Calculer I_0 , I_1 et I_2 .

2. b. Calculer, suivant la parité de n , $I_{n+2} - I_n$.

En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de K_n et, pour $n > 1$, montrer que

$$J_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Calculer, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{P_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$, où P_n est défini dans la partie I.

2. c. Montrer que, pour $n > 1$:

$$J_n - K_n = \int_0^{\pi/2} \sin(2nx) \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$, en utilisant II.

2. d. Dédurre que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et indiquer sa limite.

2. e. Soit $a \in]0, \pi/2]$. Montrer que la suite $\left(\int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$ a même limite que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3. On se propose d'établir, pour tout $a > 0$:

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi_n(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. a. Vérifier l'existence de l'intégrale $\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx$.

3. b. Démontrer (1) pour $a \in]0, \pi/2]$.

On pourra considérer $\int_0^a \frac{\sin(nx)}{x} dx - \int_0^a \frac{\sin(nx)}{\sin x} dx$ et appliquer II.

3. c. Démontrer (1) pour $a \in]\pi/2, +\infty[$ en montrant que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\pi/2}^a \varphi_n(x) dx = 0$.

4. Déterminer le nombre L , c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$.