



PRÉPASIMPLE

prepasimple.fr

EM Lyon

Mathématiques 1

1983

Sujet de mathématiques approfondies

Mathématiques approfondies — Prépa ECG

Annales de concours · Sujet

Partie I

On considère, pour tout entier naturel p , les intégrales impropres

$$I_p = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx \quad \text{et} \quad J_p = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} dx.$$

1. Étude de I_p

1. (a) Montrer qu'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \geq M, \quad x^p e^{-x} \leq \frac{1}{x^2},$$

et en déduire que I_p existe pour $p \in \mathbb{N}$.

1. (b) Exprimer I_{p+1} à l'aide de I_p , puis en déduire la valeur de I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Étude de J_p

2. (a) Montrer que J_p existe pour $p \in \mathbb{N}^*$.

2. (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x > 0, \quad \frac{x^p}{e^x - 1} = x^p \sum_{k=1}^n e^{-kx} + \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1}.$$

2. (c) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A x^p e^{-kx} dx$.

2. (d) Montrer que, pour $x \geq 0$, $e^x - 1 \geq x$, puis que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $A > 0$,

$$0 \leq \int_0^A \frac{x^p e^{-nx}}{e^x - 1} dx \leq \frac{(p-1)!}{n^p}.$$

2. (e) En déduire que, pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| J_p - p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} \right| \leq \frac{(p+1)!}{n^p}.$$

3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on considère la série numérique de terme général $u_n = \frac{1}{n^{p+1}}$, pour $n \geq 1$.

Rappeler pour quelles valeurs de p cette série est convergente et, dans ce cas, exprimer sa somme en fonction de J_p .

Partie II

Soit x un nombre réel strictement positif et (u_n) la suite réelle ainsi définie :

$$u_0 = x; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{2\sqrt{u_n}}. \quad (1)$$

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 1$.
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est monotone et convergente.
2. (b) Déterminer la limite de cette suite.
3. On suppose maintenant que $x \neq 1$ et on considère la série de terme général $v_n = -1 + u_n$.
3. (a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n > 0$.
3. (b) Étudier la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$. Que peut-on conclure pour la série de terme général v_n ?

3. (c) En déduire que la suite (P_n) définie par

$$P_n = \prod_{k=0}^n u_k \quad (2)$$

est convergente. Ne pas essayer de calculer sa limite.

Partie III

1. À tout couple (a, b) de réels positifs ou nuls, on associe les suites (a_n) et (b_n) ainsi définies :

$$a_0 = a, \quad b_0 = b; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}. \end{cases} \quad (3)$$

1. (a) Calculer a_n et b_n en fonction de n dans les deux cas particuliers $a = 0, b \geq 0$ et $a \geq 0, b = 0$.
1. (b) Montrer que $a_n \leq b_n$ pour $n \geq 1$, et que les suites (a_n) et (b_n) sont monotones pour $n \geq 1$.
1. (c) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite. Cette limite, qui est fonction de (a, b) et qui ne peut être explicitée en général, sera notée $\mathcal{L}(a, b)$.
1. (d) Montrer que, pour $a \geq 0, b \geq 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$\mathcal{L}(a, b) = \mathcal{L}(b, a), \quad (4)$$

$$\mathcal{L}(\lambda a, \lambda b) = \lambda \mathcal{L}(a, b), \quad (5)$$

$$\sqrt{ab} \leq \mathcal{L}(a, b) \leq \frac{a+b}{2}. \quad (6)$$

2. On utilise la limite étudiée plus haut pour définir la fonction $F : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathcal{L}(1, x)$.

2. (a) Calculer $F(0)$ et $F(1)$. Montrer que F est positive et croissante.

2. (b) Montrer que, pour $x > 0$:

$$\sqrt{x} \leq F(x) \leq \frac{1+x}{2}, \quad (7)$$

$$F(x) = xF\left(\frac{1}{x}\right), \quad (8)$$

$$F(x) = \sqrt{x}F\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right), \quad (9)$$

$$F(x) = \frac{1+x}{2}F\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right). \quad (10)$$

3. En utilisant les résultats de 2 :

3. (a) Montrer que F est dérivable au point 1 et donner la valeur de $F'(1)$.

3. (b) Montrer que $F(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (c) Montrer que F est continue en 0. Est-elle dérivable en ce point ?
3. (d) Étudier les limites éventuelles, lorsque x tend vers $+\infty$, de $\frac{F(x)}{x}$ et $\frac{F(x)}{\sqrt{x}}$.
4. Pour $x > 0$, exprimer P_n , défini par (1) et (2), en fonction de $F(x)$ et $F(u_{n+1})$.
Retrouver ainsi que la suite (P_n) converge et exprimer sa limite en fonction de $F(x)$.